BEDFORD ◆ FOWLER

Estática

MECÁNICA PARA INGENIERÍA

Pearson Educación

MECÁNICA PARA INGENIERÍA

Estática

Anthony Bedford

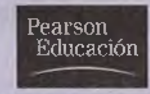
y

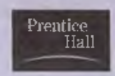
Wallace Fowler

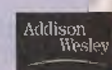
The University of Texas (Austin)

Versión en español de
José E. de la Cera Alonso
Universidad Autónoma Metropolitana
Unidad Azcapotzalco, México

Con la colaboración de
Antonio Martín-Lunas
Universidad Autónoma Metropolitana
Unidad Azcapotzalco, México







MÉXICO • ARGENTINA • BRASIL • COLOMBIA • COSTA RICA • CHILE
ESPAÑA • GUATEMALA • PERÚ • PUERTO RICO • VENEZUELA

Datos de catalogación bibliográfica

BEDFOR y FOWLER

Estádistica

Addison Wesley Longman de México,
S.A. de C.V.

ISBN: 968-444-398-6

Materia: Universitarios

Formato: 20 x 25.5 Páginas: 624

Versión en español de la obra titulada *Engineering Mechanics: Statics,* de A. Bedford y W. L. Fowler, publicada originalmente en inglés por Addison-Wesley Publishing Company, Reading, Massachusetts, E.U.A., © 1996 por Addison-Wesley Publishing Company, Inc.

Esta edición en español es la única autorizada.

Créditos de fotografias:

Portada	Medford Taylor/Superstok
Capítulo 1	Introducción: Mark Segal/Tony Stone Images/Chicago Inc.; 1.3 Dennis Mithcell/Allsport Photography Inc.
Capítulo 3	3.1 (a) ITAR-TASS; 3.1 (b): Tom Pantages; 3.23 NASA.
Capítulo 6	6.3 Brownie Harris/ The Image Bank; 6.15 Marshall Henrichs; 6.17 Pierre Berger/Photo Researchers, Inc.; 6.19 Marshall Henrichs.
Capítulo 9	9.21 Werner Dietrich/The Image Bank; 9.25 G+J Images/The Image Bank; 9.25 (a) Steve Niedorf/The Image Bank.
Capítulo 10	10.4 Cortesía de Uzi Landman; 10.19 (a) cortesía de SKF Industries.

Calle Cuatro No. 25, 2° piso
Fracc. Industrial Alce Blanco
53370 Naucalpan de Juárez, Estado de México

Cámara Nacional de la Industria Editorial Mexicana, Registro No. 1031.

ISBN 968-444-398-6

Impreso en México. *Printed in Mexico.*

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 03 02 01 00 99

NOV

Editorial Progreso, S.A. de C.V.
Naranjo 248, Col. Sta. Ma. la Ribera,
Delegación Cuauhtémoc, México, 06400, D.F.
Tel. 547-73-04 Fax 541-06-15

Sobre los autores

Anthony Bedford es profesor de ingeniería aeroespacial e ingeniería mecánica en la University of Texas en Austin. Obtuvo su licenciatura en la University of Texas en Austin, su grado de maestría en el California Institute of Technology, y su doctorado en la Rice University en 1967. Adquirió experiencia industrial en la Douglas Aircraft Company y en TRW Systems, y ha sido profesor en la University of Texas en Austin desde 1968.

La principal actividad profesional del doctor Bedford ha sido la educación y la investigación en ingeniería mecánica. Es autor y coautor de muchos artículos científicos sobre mecánica de materiales compuestos y de dos libros, *Hamilton's Principle in Continuum Mechanics* e *Introduction to Elastic Wave Propagation*. Ha desarrollado cursos para estudiantes de licenciatura y de posgrado en mecánica, y se le premió con el General Dynamics Teaching Excellence Award.

El doctor Bedford es ingeniero profesional y miembro de la Acoustical Society of America, de la American Society for Engineering Education, de la American Academy of Mechanics y de la Society for Natural Philosophy.

Wallace L. Fowler es profesor de ingeniería en el departamento de ingeniería aeroespacial e ingeniería mecánica de la University of Texas en Austin. El doctor Fowler obtuvo sus grados de licenciatura, maestría y doctorado en la University of Texas en Austin, en donde ha sido profesor desde 1966. Durante 1976 fue miembro del personal académico de la United States Air Force Pilot School, Edwards Air Force Base, California, y en 1981-1982 fue profesor visitante en la United States Air Force Academy. Desde 1991 ha sido director del Texas Space Grant Consortium.

Las áreas de enseñanza e investigación del doctor Fowler son la dinámica, la mecánica orbital y el diseño de vehículos para misiones espaciales. Es autor y coautor de muchos artículos técnicos sobre optimación de trayectorias y sobre dinámica de posición; ha publicado también muchos artículos sobre teoría y práctica de la enseñanza de la ingeniería. Ha recibido numerosos premios de enseñanza, entre los que se cuentan el Chancellor's Council Outstanding Teaching Award, el General Dynamics Teaching Excellence Award, el Halliburton Education Foundation Award of Excellence y el AIAA-ASEE Distinguished Aerospace Educator Award.

El doctor Fowler es ingeniero profesional, miembro de muchas sociedades técnicas y del American Institute of Aeronautics and Astronautics y de la American Society for Engineering Education.

Prefacio

Durante veinticinco años hemos impartido el curso introductorio de dos semestres de ingeniería mecánica. Durante ese tiempo, los estudiantes nos han manifestado con frecuencia que pueden entender la exposición de la materia en clase, pero que tienen dificultad para comprender el libro de texto. Este comentario nos indujo a examinar lo que hace el profesor en el aula que difiere de la presentación tradicional de los libros de texto, y la conclusión obtenida fue la redacción de este libro. Nuestro procedimiento es presentar el material como lo hacemos en clase, utilizando más figuras y haciendo énfasis en la importancia del análisis visual minucioso y la comprensión de los conceptos. A lo largo del libro consideramos que los estudiantes son nuestro auditorio.

Objetivos y temas

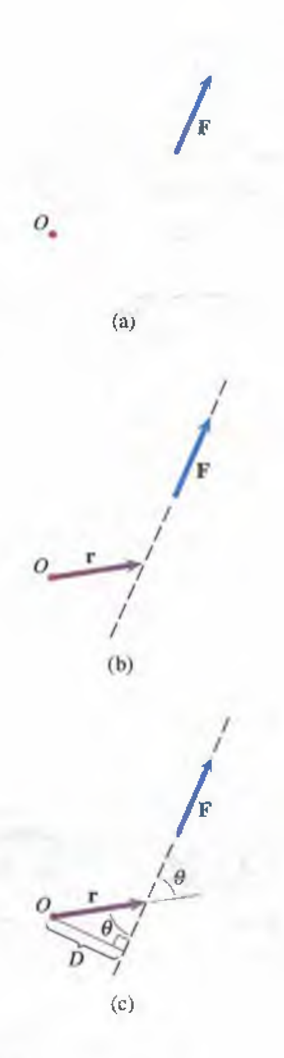


Figura 4.7
(a) La fuerza **F** y el punto O.
(b) Un vector **r** del punto O al punto en la línea de acción de **F**.
(c) El ángulo θ y la distancia perpendicular D.

Resolución de problemas Aquí destacamos la importancia crítica de adquirir destreza en la resolución de problemas. En los ejemplos resueltos enseñamos a los estudiantes a pensar sobre los problemas antes de que empiecen a resolverlos. ¿Qué principios son aplicables? ¿Qué se debe determinar y en qué orden? Las secciones llamadas *Estrategia* que preceden a casi todos los ejemplos son para ilustrar este análisis preliminar. Luego damos una descripción cuidadosa y completa de la solución, mostrando a menudo métodos alternativos. Finalmente, muchos ejemplos concluyen con una sección de *Comentarios* que señalan características de la solución, analizan o comparan métodos alternativos de solución, o bien muestran maneras de verificar las respuestas (véase el Ej. 5.8, pág. 244). Nuestro objetivo es enseñar a los estudiantes cómo abordar los problemas y evaluar críticamente los resultados. Además, para aquellos estudiantes que nos dicen que entienden el material de clase pero que no saben cómo empezar a resolver los problemas de tarea, les proporcionamos también breves secciones de Estrategia en algunos problemas seleccionados.

Visualización Uno de los elementos esenciales para tener éxito en la resolución de problemas es la visualización, en especial el uso de diagramas de cuerpo libre. En el aula, el profesor puede dibujar un diagrama paso a paso, describiendo cada uno de éstos y desarrollando la solución en paralelo con el diagrama. Hemos hecho lo mismo en este libro, es decir, hemos mostrado la misma secuencia de diagramas que usamos en clase, indicando con claridad las relaciones entre ellos. Por ejemplo, en vez de simplemente mostrar un diagrama de cuerpo libre, repetimos la figura inicial con la parte aislada resaltada y lo demás con una imagen menos intensa (véase el Ej. 3.1, pág. 88). De esta manera mostramos al estudiante exactamente cómo aislar la parte que se convertirá en el diagrama de cuerpo libre.

Utilizamos colores para ayudar a los estudiantes a distinguir y entender los diversos elementos de las figuras. Usando de manera consistente los mismos colores para elementos particulares, como el azul para los vectores de fuerza y el rojo para los pares, hemos tratado de hacer que el libro sea más fácil de leer y entender por parte de los estudiantes (véase p. ej., la Fig. 4.7, pág. 134). Además, el mayor realismo de las ilustraciones en color ayuda a motivar a los estudiantes (véase las Figs. 4.16 y 4.17 de la pág. 148 y las ilustraciones de los problemas a lo largo del libro).

Énfasis en los principios básicos Nuestro objetivo principal en este libro es enseñar a los estudiantes los conceptos y métodos fundamentales de la estática. Para entenderlos, los estudiantes deben tener antes que nada un sólido conocimiento de cómo se trabaja con vectores. Ofrecemos un tratamiento completo del análisis vectorial elemental que el profesor puede cubrir total o parcialmente, dependiendo de la preparación de los estudiantes. Inmediatamente después presentamos los conceptos de equilibrio y de diagrama de cuerpo libre, de manera que los estudiantes puedan empezar en seguida a usarlos y adquieran confianza a través de aplicaciones relativamente sencillas. Luego presentamos los conceptos de momento, par y sistemas equivalentes de fuerzas y momentos. El resto del libro se ocupa de las aplicaciones de estos conceptos. Al analizar cada aplicación destacamos de manera consistente el papel central que desempeñan los conceptos de equilibrio y de diagrama de cuerpo libre. Para ayudar a los estudiantes a identificar resultados importantes, se hace énfasis en las ecuaciones clave (p. ej., véase la pág. 24), y los conceptos analizados en cada capítulo se refuerzan volviéndolos a presentar en un resumen al final de cada capítulo.

Pensando como ingenieros La ingeniería es una disciplina apasionante que requiere creatividad e imaginación, así como conocimientos y una manera de pensar sistemática. En este libro tratamos de mostrar el papel que desempeña la mecánica dentro del contexto más amplio de la práctica de la ingeniería. Los ingenieros de la industria y la Junta para la Acreditación de la Ingeniería y la Tecnología (ABET, *Accrediting Board for Engineering and Technology*) fomentan en los profesores la inclusión del diseño en las primeras etapas del currículo de ingeniería. En muchos de los ejemplos y problemas incluimos ideas sencillas sobre diseño y seguridad sin sacrificar el énfasis en la mecánica fundamental. Muchos problemas se plantean en función de consideraciones de diseño y seguridad (p. ej., véase los Problemas 6.24-6.26, pág. 288); en algunos casos se pide a los estudiantes que escojan un parámetro de diseño de entre un conjunto de valores posibles con base en un criterio especificado (p. ej., véase los Problemas 5.69 y 5.70, pág. 237). Nuestros estudiantes han respondido positivamente a estos elementos motivantes y han desarrollado una conciencia de cómo se aplican esas ideas esenciales en la ingeniería.

Características pedagógicas

Con base en nuestra experiencia docente y en consejos de muchos colegas, hemos incluido varios aspectos pedagógicos para ayudar a los estudiantes a aprender y a ampliar su perspectiva de la mecánica.

Estrategia para la resolución de problemas Los ejemplos resueltos y los problemas de tarea constituyen la piedra angular de un curso de mecánica. A lo largo del libro proporcionamos descripciones de los métodos usados en los ejemplos, que los estudiantes encontrarán de utilidad al plantear y resolver los problemas. No damos recetas para que los

estudiantes las sigan rígidamente; más bien, describimos líneas generales de análisis aplicables a una amplia gama de problemas, damos consejos útiles y avisos sobre dificultades comunes, que equivalen a la información dada a nuestros estudiantes durante las horas de consulta (p. ej., véase las págs. 87, 279 y 355).

Aplicaciones Muchos de nuestros ejemplos y problemas son tomados de la práctica de la ingeniería y comprenden desde artículos caseros familiares hasta aplicaciones bastante exóticas de la ingeniería. Además, los ejemplos titulados "Aplicaciones a la ingeniería" proporcionan estudios de casos más detallados de diferentes ramas de la ingeniería. Estos ejemplos muestran cómo los principios aprendidos en el texto son directamente aplicables a problemas actuales y futuros de la ingeniería. Nuestra meta es ayudar a los estudiantes a ver la importancia de la mecánica en esas aplicaciones y motivarlos para que la aprendan (véase, p. ej., págs. 92, 282 y 408).

Problemas con computador Las encuestas indican que la mayor parte de los profesores hace algún uso de los computadores, pero no hay consenso sobre la manera en que deberían hacerlo. Nosotros damos al profesor la oportunidad de iniciar a los estudiantes en las aplicaciones de la mecánica en ingeniería sin imponer una metodología particular. Las secciones llamadas "Ejemplos con computador" contienen ejemplos y problemas adecuados al uso de una calculadora programable o de un computador (véase, p. ej., págs. 110 y 264). El profesor puede escoger cómo deben resolver los estudiantes esos problemas: usando un lenguaje de programación, una hoja de cálculo o un ambiente de alto nivel para la resolución de problemas. Esas secciones son independientes y autocontenidas.

Principio de capítulos Comenzamos cada capítulo con una ilustración que muestra una aplicación de las ideas estudiadas en el capítulo, a menudo escogiendo objetos familiares a los estudiantes. Al mostrar a los estudiantes cómo los conceptos de este curso se relacionan con el diseño y funcionamiento de objetos familiares, ellos pueden empezar a apreciar la importancia y lo atractivo de la ingeniería como carrera (véase págs. 1, 272 y 438).

Compromiso con los estudiantes y profesores

Hemos tomado precauciones para asegurar la exactitud de este libro. Los revisores examinaron cada parte del manuscrito tratando de detectar posibles errores. Cada uno de nosotros resolvió los problemas para asegurarnos de que sus respuestas fuesen correctas y que los problemas tuvieran un nivel apropiado de dificultad. James Whitenton examinó el texto completo en busca de errores que se pudieran haber introducido durante el proceso tipográfico.

Cualesquiera errores son responsabilidad de los autores. Damos la bienvenida a los comunicados de estudiantes y profesores respecto a errores o partes que puedan ser mejoradas. Nuestra dirección es Department of Aerospace Engineering and Engineering Mechanics, University of Texas at Austin, Austin, Texas 78712. Nuestra dirección electrónica es bedford@aw.com.

Suplementos de software

Edición para estudiantes de Working Model® El software Working Model® (Knowledge Revolution, Inc.) es un programa de modelado y simulación que permite al estudiante visualizar problemas de ingeniería. El programa calcula la interacción de fuerzas sobre un cuerpo (u objetos), anima los resultados y proporciona datos de salida como fuerza, momento, velocidad, aceleración, etc. en forma digital o gráfica. La edición estudiantil de este potente programa lo hace accesible a estudiantes de los primeros semestres. Está disponible tanto para Windows como para Macintosh. Contacte al representante de Addison-Wesley de su ciudad para mayor información (véase pág. ii).

Simulaciones con Working Model® Existe un disquete con aproximadamente 100 problemas y ejemplos del texto listos para trabajar con ellos en Working Model®. Estas simulaciones se han elaborado para permitir al estudiante cambiar variables y ver los resultados. El estudiante explora diferentes situaciones físicas motivado por la duda de "qué pasaría si..." y, así, desarrolla una agudeza conceptual más profunda que la adquirida con la sola resolución cuantitativa de los problemas. Para obtener una copia gratuita de este disquete, escriba a Addison-Wesley Iberoamericana (véase pág. ii).

Reconocimientos

Agradecemos a nuestros profesores, colegas y estudiantes lo que hemos aprendido sobre la mecánica y su enseñanza. Muchos colegas revisaron el manuscrito y compartieron generosamente sus conocimientos y experiencia para mejorar nuestro libro. Ellos son:

Edward E. Adams
Michigan Technological University

Jerry L. Anderson
Memphis State University

James G. Andrews
University of Iowa

Robert J. Asaro
University of California, San Diego

Leonard B. Baldwin
University of Wyoming

Gautam Batra
University of Nebraska

Mary Bergs
Marquette University

Donald Carlson
University of Illinois

Mitsunori Denda
Rutgers University

Craig Douglas
University of Massachusetts, Lowell

S. Olani Durrant
Brigham Young University

Robert W. Fitzgerald
Worcester Polytechnic Institute

George T. Flowers
Auburn University

Mark Frisina
Wentworth Institute

Robert W. Fuessle
Bradley University

William Gurley
University of Tennessee, Chattanooga

Ali Iranmanesh
Gadsden State Community College

David B. Johnson
Southern Methodist University

E.O. Jones, Jr.
Auburn University

Serope Kalpakjian
Illinois Institute of Technology

Kathleen A. Keil
California Polytechnic University, San Luis Obispo

Seyyed M. H. Khandani
Diablo Valley College

Charles M. Krousgrill
Purdue University

William M. Lee
U.S. Naval Academy

Major Robert M. Carpenter
Point Military Academy

Douglas Carroll
University of Missouri, Rolla

Namas Chandra
Florida State University

James Cheney
University of California, Davis

Ravinder Chona
Texas A&M University

Anthony DeLuzio
Merrimack College

K. Madhaven
Christian Brothers College

Gary H. McDonald
University of Tennessee

James McDonald
Texas Technical University

Saeed Niku
California Polytechnic State University, San Luis Obispo

James O'Connor
University of Texas, Austin

Samuel P. Owusu-Ofori
North Carolina A&T State University

John Hansberry
University of Massachusetts, Dartmouth

James Hill
University of Alabama

Allen Hoffman
Worcester Polytechnic Institute

Edward E. Hornsey
University of Missouri, Rolla

Robert A. Howland
University of Notre Dame

David J. Purdy
Rose-Hulman Institute of Technology

Daniel Riahi
University of Illinois

Robert Schmidt
University of Detroit

Robert J. Schultz
Oregon State University

Patricia M. Shamamy
Lawrence Technological University

Sorin Siegler
Drexel University

L. N. Tao
Illinois Institute of Technology

Richard J. Leuba
North Carolina State University

Richard Lewis
Louisiana Technological University

Bertram Long
Northeastern University

V. J. Lopardo
U.S. Naval Academy

Frank K. Lu
University of Texas, Arlington

John Tomko
Cleveland State University

Mark R. Virkler
University Of Missouri, Columbia

William H. Walston, Jr.
University of Maryland

Reynolds Watkins
Utah State University

Norman Wittels
Worcester Polytechnic Institute

Julius P. Wong
University of Louisville

Agradecemos particularmente a Eugene Davis, Serope Kalpakjian y Eric Sandgren la sugerencia de incluir muchos problemas basados en su amplio conocimiento de aplicaciones de la mecánica a la ingeniería. Agradecemos al personal de Addison-Wesley su amistad y generosa ayuda, especialmente a Bette Aarmson, Jennifer Duggan, Don Fowley, Joyce Grandy, Stuart Johnson, Laurie McGuire y Jim Rigney. Estamos muy agradecidos con nuestro editor David Chelton y con el artista James Bryant por haber llevado este trabajo más allá de nuestra modesta concepción. Agradecemos a nuestro presidente Richard Miksad su continuo apoyo, que hizo posible el proyecto. Por supuesto, agradecemos también a nuestras familias su valioso apoyo en todo momento.

Anthony Bedford y Wallace L. Fowler
Mayo de 1994
Austin, Texas

Nota acerca de la edición en español

La ciencia de la mecánica, así como la meta más elevada de la ingeniería —la aplicación de la tecnología para beneficio de la humanidad—, es universal y trasciende los idiomas y las fronteras. Así, nuestro libro va dirigido a todos los estudiantes de ingeniería, aunque algunas aplicaciones y enfoques de la ingeniería sean característicos de diferentes regiones. En el sistema de la University of Texas tenemos la fortuna de contar con muchos estudiantes de ingeniería provenientes de México, América Central y Sudamérica, y hemos procurado tener presentes sus enfoques e intereses al escribir este texto. Nuestro traductor, Ing. José de la Cera, y el revisor técnico, Ing. Antonio Martín-Lunas, ambos de la Universidad Autónoma Metropolitana, Unidad Azcapotzalco, México, han efectuado adaptaciones a fin de mejorar el libro en este aspecto. Agradecemos mucho sus contribuciones y nos sentimos complacidos y honrados por la traducción de nuestro libro a la lengua española.

Anthony Bedford y Wallace Fowler
Septiembre de 1994
Austin, Texas

Reconocimientos a los colaboradores de la edición en español

Addison-Wesley Iberoamericana desea agradecer las valiosas aportaciones de los profesores que evaluaron esta obra durante la preparación de la versión en español. Ellos fueron: Ing. Jaime Martínez Martínez (Universidad Nacional Autónoma de México), Ing. Antonio Martín-Lunas (Universidad Autónoma Metropolitana, unidad Azcapotzalco, México), Fís. Manuel B. Tienza Caballero (Universidad Iberoamericana, México), Ing. Javier Arjona Báez (Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey, campus Monterrey, México) y Dr. Luis Neri Vitela (Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey, campus Ciudad de México).

Así mismo, deseamos agradecer a los siguientes profesores sus comentarios:

Luis Eduardo Benítez H.
Universidad Nacional de Colombia

Tomás Alberto del Carril
Universidad Nacional de Buenos Aires

Sergio Díaz B.
Universidad Simón Bolívar
Caracas, Venezuela

Máximo Fioravanti
Universidad Nacional de Buenos Aires

Carlos E. Muñoz R.
Pontificia Universidad Javeriana
Santafé de Bogotá, Colombia

José Navarro Solé
Escuela Técnica Superior de Ingenieros Industriales
Barcelona, España

Lanzier Efraín Torres Ortiz
Universidad Nacional Autónoma de México

Alfredo Zatarain T.
Universidad Autónoma de Chapingo
Chapingo, México

Índice general

Dos de los edificios más altos del mundo son parte del perfil del horizonte de Chicago: el John Hancock Center, terminado en 1968, tiene 343 metros (1127 pies) de altura, y la Torre Sears, terminada en 1974, tiene 443 metros (1454 pies) de altura. La estructura de la Torre Sears consiste en 9 tubos de acero interconectados, cada uno de sección cuadrada con 75 pies por lado, que se levantan a diferente altura y dan al edificio su forma distintiva. La estructura del Hancock Center está reforzada con vigas de acero diagonales sobre la fachada del edificio; cada viga abarca 18 niveles.



Capítulo 1

Introducción

LAS innovadoras estructuras del John Hancock Center y de la Torre Sears, ambas concebidas por el ingeniero Fazlur Kahn (1929-1982), son dos soluciones al problema de resistir las cargas de viento y de gravedad sobre un gran edificio. Durante cada etapa del diseño de esas estructuras, los ingenieros se basaron en los principios de la estática. Esta ciencia constituye el sustento del arte del diseño estructural.

1.1 *Ingeniería y mecánica*

¿Cómo se diseñan los sistemas para predecir sus características antes de construirlos? Los ingenieros confían en su conocimiento y experiencia, en experimentos, el ingenio y la creatividad para producir nuevos diseños. Los ingenieros modernos cuentan con una poderosa técnica: desarrollan ecuaciones matemáticas basadas en las características físicas de los objetos que diseñan. Con estos **modelos matemáticos**, predicen el comportamiento de sus diseños, los modifican y los prueban antes de construirlos. Los ingenieros civiles usaron modelos matemáticos para analizar la respuestas a cargas de la estructura de acero de la Torre Sears. Y los ingenieros aeroespaciales usan modelos matemáticos para predecir las trayectorias que los transbordadores espaciales seguirán en su vuelo.

Los ingenieros son responsables de diseñar, construir y probar los objetos que usamos, desde sillas y afiladores de lápices hasta presas, automóviles y aeronaves. Deben tener un profundo conocimiento de la física que sustenta tales sistemas y deben poder usar modelos matemáticos para predecir el comportamiento de estos sistemas. Los estudiantes de ingeniería aprenden a analizar y predecir el comportamiento de los sistemas físicos mediante el estudio de la mecánica.

En su nivel más elemental, la mecánica es el estudio de las fuerzas y sus efectos. La mecánica elemental se divide en **estática**, que es el estudio de los objetos en equilibrio, y **dinámica**, que estudia los objetos en movimiento. Los resultados obtenidos en la mecánica elemental se aplican directamente a muchos campos de la ingeniería. Los ingenieros civiles y mecánicos que diseñan estructuras usan ecuaciones de equilibrio obtenidas por medio de la estática. Los ingenieros civiles que analizan las respuestas de edificios frente a sismos y los ingenieros aeroespaciales que determinan las trayectorias de satélites, usan las ecuaciones de movimiento contenidas en la dinámica.

La mecánica fue la primera ciencia analítica; por ello los conceptos fundamentales, los métodos analíticos y las analogías de la mecánica se encuentran virtualmente en todas las ramas de la ingeniería. Por ejemplo, los estudiantes de ingeniería química y eléctrica comprenden mejor los conceptos básicos de temas como el equilibrio, la energía y la estabilidad aprendiéndolos en sus contextos mecánicos originales; al estudiar mecánica vuelven a trazar el desarrollo histórico de esas ideas.

1.2 *Aprendizaje de la mecánica*

La mecánica consiste en principios amplios que rigen el comportamiento de los cuerpos. En este libro describimos esos principios y damos ejemplos que muestran algunas de sus aplicaciones. Aunque es esencial que se resuelvan problemas similares a esos ejemplos, nuestro objetivo es ayudar a entender estos principios suficientemente bien para aplicarlos a las nuevas situaciones que se presenten. Cada generación de ingenieros se enfrenta a nuevos problemas.

Resolución de problemas

En el estudio de la mecánica se aprenden procedimientos para resolver problemas que se usarán en cursos posteriores y a lo largo de la carrera. Aunque diferentes tipos de problemas requieren distintos métodos, los siguientes pasos se aplican a muchos de ellos:

- Identifique la información dada y la información, o respuesta, que se debe determinar. Suele ser útil que usted reformule el problema en sus propias palabras. Cuando sea apropiado, asegúrese de que entiende el sistema físico o el modelo implícito.
- Desarrolle una *estrategia* para el problema. Esto es, identifique los principios y ecuaciones aplicables y diga cómo los usará. Si es posible, dibuje diagramas para visualizar el problema.
- Siempre que pueda, trate de predecir la respuesta. Esto desarrollará su intuición y lo ayudará a reconocer una respuesta incorrecta.
- Resuelva las ecuaciones y, cuando sea posible, interprete sus resultados y compárelos con su predicción. El último paso se llama *verificación realista*. ¿Es razonable su respuesta?

Calculadoras y computadores

En este libro la mayoría de los problemas se diseñaron para que conduzcan a una expresión algebraica con la cual se calcule la respuesta en función de cantidades dadas. Una calculadora con funciones trigonométricas y logarítmicas es suficiente para determinar el valor numérico de tales respuestas. Es conveniente contar con una calculadora programable o un computador con programas para resolver problemas, como el *Mathcad* o el *TK! Solver*, pero no confíe demasiado en herramientas de las que no dispondrá en los exámenes.

En las secciones *Ejemplos con computador* hay ejemplos y problemas adecuados para resolverse con calculadora programable o computador.

Aplicaciones a la ingeniería

Si bien los problemas están diseñados principalmente para apoyar el aprendizaje de la mecánica, muchos de ellos ilustran el uso de esta ciencia en la ingeniería. Las secciones llamadas *Aplicación a la ingeniería* describen cómo se aplica la mecánica en varios campos de la ingeniería.

Algunos problemas destacan dos aspectos esenciales de la ingeniería:

- *Diseño.* En algunos problemas se pide escoger valores de parámetros que satisfagan criterios específicos de diseño.
- *Seguridad.* En algunos problemas se pide evaluar la seguridad de dispositivos y escoger valores de parámetros que satisfagan requisitos específicos de seguridad.

1.3 *Conceptos fundamentales*

Algunos temas de la mecánica le serán familiares debido a la experiencia diaria o por haberlos estudiado en cursos previos de física. En esta sección repasamos brevemente los fundamentos de la mecánica elemental.

Espacio y tiempo

El espacio se refiere simplemente al universo tridimensional en que vivimos. Nuestras experiencias diarias nos dan una noción intuitiva del espacio y de las posiciones de los puntos en él. La distancia entre dos puntos en el espacio es la longitud de la línea recta que los une.

Para medir la distancia entre puntos en el espacio se requiere una unidad de longitud. Usaremos tanto el Sistema Internacional de Unidades (SI) como el sistema inglés. En unidades SI, la unidad de longitud es el metro (m); en el sistema inglés es el pie.

El tiempo nos es muy familiar, pues nuestra vida se mide por él. Los ciclos diarios de luz y oscuridad y las horas, minutos y segundos medidos por un reloj nos dan una noción intuitiva del tiempo. Éste se mide por los intervalos entre eventos repetidos, como las oscilaciones del péndulo de un reloj o las vibraciones en un reloj de cristal de cuarzo. En los dos sistemas que usaremos la unidad de tiempo es el segundo (s). Los minutos (min), las horas (h) y los días también son de uso común.

Si la posición de un punto en el espacio en relación con algún punto de referencia cambia con el tiempo, la razón del cambio de su posición se llama *velocidad*, y la razón del cambio de su velocidad se denomina *aceleración*. En unidades SI, la velocidad se expresa en metros por segundo (m/s) y la aceleración en metros por segundo cuadrado (m/s^2). En las unidades del sistema inglés, la velocidad se expresa en pies por segundo (pie/s) y la aceleración en pies por segundo cuadrado (pie/s^2).

Leyes de Newton

La mecánica elemental se estableció sobre una base sólida con la publicación, en 1687, de *Philosophiae naturalis principia mathematica* de Isaac Newton. Aunque sumamente original, este trabajo se basó en conceptos fundamentales desarrollados durante una larga y difícil lucha por entender la naturaleza. Newton estableció tres "leyes" del movimiento que, expresadas en términos modernos, son:

1. *Cuando la suma de las fuerzas que actúan sobre una partícula es igual a cero, su velocidad es constante. En particular, si inicialmente la partícula se halla en reposo, permanecerá en reposo.*
2. *Cuando la suma de las fuerzas que actúan sobre una partícula no es igual a cero, la suma de las fuerzas es igual a la razón de cambio de la cantidad de movimiento de la partícula. Si la masa es constante, la suma de las fuerzas es igual al producto de la masa de la partícula y su aceleración.*
3. *Las fuerzas ejercidas por dos partículas entre sí son iguales en magnitud y opuestas en dirección.*

Observe que no definimos fuerza ni masa antes de enunciar las leyes de Newton. La concepción moderna es que estos términos se definen con

LEX I

Corpus omne perseverare in statu suo quiescendi vel movendi uniformiter in directum, nisi quatenus illud a viribus impressis cogitur statum suum mutare.

LEX II

Mutationem motis proportionalem esse vi motrici impressae et fieri secondum lineam rectam qua vis illa imprimitur.

LEX III

Actioni contrariam semper et aequalem esse reactionem: sive corporum duorum actiones in se mutuo semper esse aequales et in partes contrarias dirigi.

la segunda ley. Para demostrarlo, supongamos que escogemos un cuerpo arbitrario y especificamos que tiene masa unitaria. Luego definimos una unidad de fuerza como la fuerza que imparte a esta masa unitaria una aceleración de magnitud unitaria. En principio, podemos determinar la masa de cualquier cuerpo: le aplicamos una fuerza unitaria, medimos la aceleración resultante y usamos la segunda ley para determinar la masa. Podemos también determinar la magnitud de cualquier fuerza: la aplicamos a la masa unitaria, medimos la aceleración resultante y usamos la segunda ley para determinar la fuerza.

De esta manera, la segunda ley de Newton proporciona significados precisos a los términos **masa** y **fuerza**. En unidades SI, la unidad de masa es el kilogramo (kg). La unidad de fuerza es el newton (N), que es la fuerza requerida para impartir a una masa de un kilogramo una aceleración de un metro por segundo cada segundo (m/s^2). En las unidades del sistema inglés, la unidad de fuerza es la libra (lb). La unidad de masa es el slug, que es la cantidad de masa acelerada a un pie por segundo cuadrado por una fuerza de una libra.

Aunque los resultados que analizamos en este libro son aplicables a muchos de los problemas que surgen en la práctica de la ingeniería, hay límites para la validez de las leyes de Newton. Por ejemplo, éstas no dan resultados precisos si un problema implica velocidades que no son pequeñas comparadas con la velocidad de la luz (3×10^8 m/s). La teoría de la relatividad especial de Einstein se aplica a tales problemas. La mecánica elemental también falla en problemas que implican dimensiones que no son grandes comparadas con las dimensiones atómicas. Para describir los fenómenos en la escala atómica se debe usar la mecánica cuántica.

Gravitación de Newton

Otra de las contribuciones fundamentales de Newton a la mecánica es su postulado sobre la fuerza gravitatoria entre dos partículas en función de sus masas m_1 y m_2 y de la distancia r entre ellas (Fig. 1.1). Su expresión para la magnitud de la fuerza es

$$F = \frac{Gm_1m_2}{r^2}, \tag{1.1}$$

donde G es la **constante de la gravitación universal**.

Newton calculó la fuerza gravitatoria entre una partícula de masa m_1 y una esfera homogénea de masa m_2 y encontró que también está dada por la ecuación (1.1), en la que r denota la distancia de la partícula al centro de la esfera. Aunque la Tierra no es una esfera homogénea, podemos usar este resultado para obtener el peso aproximado de un cuerpo de masa m debido a la atracción gravitatoria de la Tierra,

$$W = \frac{Gmm_E}{r^2}, \tag{1.2}$$

donde m_E es la masa de la Tierra y r es la distancia del centro de la Tierra al objeto. Observe que el peso de un cuerpo depende de su posición con respecto al centro de la Tierra, mientras que la masa del cuerpo

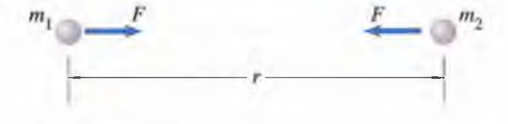


Figura 1.1
Las fuerzas gravitatorias entre dos partículas son iguales en magnitud y dirigidas a lo largo de la línea entre ellas.

es una medida de la cantidad de materia que contiene y que no depende de su posición.

Cuando el peso de un cuerpo es la única fuerza que actúa sobre él, la aceleración resultante se denomina aceleración debida a la gravedad. En este caso la segunda ley de Newton establece que $W = ma$, y de la ecuación (1.2) vemos que la aceleración debida a la gravedad es

$$a = \frac{Gm_E}{r^2}. \tag{1.3}$$

La **aceleración debida a la gravedad al nivel del mar** se denota con la letra g. Si denotamos con R_E el radio de la Tierra, vemos de la ecuación (1.3) que $Gm_E = gR_E^2$. Sustituyendo este resultado en la ecuación (1.3), obtenemos una expresión para la aceleración debida a la gravedad a una distancia r del centro de la Tierra en función de la aceleración debida a la gravedad al nivel del mar:

$$a = g\frac{R_E^2}{r^2}. \tag{1.4}$$

Como el peso del cuerpo es $W = ma$, el peso de un cuerpo a una distancia r del centro de la Tierra será

$$W = mg\frac{R_E^2}{r^2}. \tag{1.5}$$

Al nivel del mar, el peso de un cuerpo está dado en función de su masa por la simple relación

$$W = mg. \tag{1.6}$$

El valor de g varía de lugar en lugar sobre la superficie de la Tierra. Los valores que usaremos en los ejemplos y problemas son $g = 9.81$ m/s² en unidades SI y $g = 32.2$ pie/s² en unidades del sistema inglés.

Números

En ingeniería las mediciones, cálculos y resultados se expresan en números. Es necesario que sepa cómo expresamos los números en los ejemplos y problemas, y cómo deberá expresar los resultados de sus propios cálculos.

Cifras significativas Este término se refiere al número de dígitos significativos (o sea, exactos) en un número, contando hacia la derecha a partir del primer dígito no nulo. Los números 7.630 y 0.007630 están expresados con cuatro cifras significativas. Si se sabe que sólo los primeros cuatro dígitos del número 7 630 000 son exactos, esto se puede indicar escribiendo el número en notación científica como 7.630×10^6.

Si un número es el resultado de una medición, los dígitos significativos que contiene están limitados por la exactitud de la medición. Si el resultado de una medición es 2.43, esto significa que el valor real estará más cercano a 2.43 que a 2.42 o a 2.44.

Los números se pueden **redondear** a cierta cantidad de dígitos significativos. Por ejemplo, el valor de π se puede expresar con tres dígitos significativos, 3.14, o con seis dígitos significativos, 3.14159. En una calculadora o un computador, el número de dígitos significativos está limitado según el diseño de la máquina.

El uso de números en este libro Los números dados en los problemas deben tratarse como valores exactos sin preocuparse de cuántas cifras significativas contienen. Si un problema especifica que una cantidad es igual a 32.2, se puede suponer que su valor es 32.200... Se utilizarán por lo menos tres cifras significativas para expresar los resultados intermedios y las respuestas en los ejemplos, así como las respuestas a los problemas. Si usa calculadora, sus resultados deben tener esa exactitud. Asegúrese de evitar los errores de redondeo que ocurren si redondea resultados intermedios. En vez de esto, efectúe sus cálculos con la exactitud posible, conservando los valores en su calculadora.

1.4 *Unidades*

El sistema SI de unidades se ha estandarizado casi en todo el mundo (aunque en algunos países también se usa el sistema inglés). En esta sección resumiremos estos dos sistemas de unidades y explicaremos cómo convertir unidades de un sistema a otro.

Sistema internacional de unidades

En unidades SI, la longitud se mide en metros (m) y la masa en kilogramos (kg). El tiempo se mide en segundos (s), aunque también se usan el minuto (min), la hora (h), y el día. Los metros, kilogramos y segundos se denominan **unidades básicas** del SI. La fuerza se mide en newtons (N). Recuerde que esas unidades están relacionadas por la segunda ley de Newton: un newton es la fuerza requerida para imprimir a un cuerpo de un kilogramo masa una aceleración de un metro por segundo cuadrado,

$$1 \text{ N} = (1 \text{ kg})(1 \text{ m/s}^2) = 1 \text{ kg-m/s}^2.$$

Como el newton se puede expresar en función de las unidades básicas, se le llama **unidad derivada**.

Para expresar cantidades por medio de números de tamaño conveniente, los múltiplos de unidades se indican por medio de prefijos. En la tabla 1.1 se muestran los prefijos más comunes, sus abreviaturas y los múltiplos que representan. Por ejemplo, 1 km es 1 kilómetro, o sea 1000 m, y 1 Mg es 1 megagramo, que son 10^6 g o 1000 kg. Con frecuencia usamos kilonewtons (kN).

Tabla 1.1 Prefijos comunes usados en las unidades SI y los múltiplos que representan

Prefijo	Abreviatura	Múltiplo
nano-	n	10^{-9}
micro-	μ	10^{-6}
mili-	m	10^{-3}
kilo-	k	10^{3}
mega-	M	10^{6}
giga-	G	10^{9}

Sistema inglés de unidades

En las unidades del sistema inglés la longitud se mide en pies, la fuerza en libras (lb) y el tiempo en segundos (s). Éstas son las unidades básicas de este sistema. En este sistema de unidades la masa es una unidad derivada. La unidad de masa es el **slug**, que es la masa de material acelerado a un pie por segundo cuadrado por una fuerza de una libra. La segunda ley de Newton establece que

$$1 \text{ lb} = (1 \text{ slug})(1 \text{ pie/s}^2).$$

De esta expresión obtenemos

$$1 \text{ slug} = 1 \text{ lb-s}^2/\text{pie}.$$

Usaremos también otras unidades como la milla (1 mi = 5280 pies) y la pulgada (1 pie = 12 pulg), así como la kilolibra (1 klb = 1000 lb).

En algunas aplicaciones de ingeniería se usa una unidad alternativa de masa llamada libra masa (lbm), que es la masa de un material cuyo peso es de una libra al nivel del mar. El peso al nivel del mar de un cuerpo que tiene una masa de un slug es

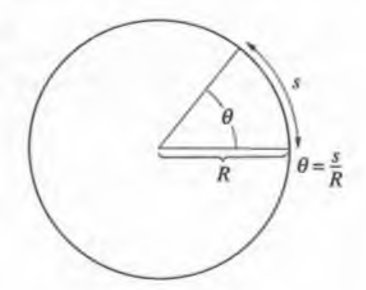
$$W = mg = (1 \text{ slug})(32.2 \text{ pie/s}^2) = 32.2 \text{ lb},$$

por lo que 1 lbm = (1/32.2) slug. Cuando se usa la libra masa, una libra de fuerza suele denotarse con la abreviatura lbf.

Unidades angulares

En ambos sistemas de unidades los ángulos se expresan por lo general en radianes (rad). En la figura 1.2 mostramos el valor de un ángulo θ en radianes; se define como la razón entre la parte de la circunferencia sustentada por θ y el radio del círculo. Los ángulos también se expresan en grados. Como hay 360 grados (360°) en un círculo completo y la totalidad de la circunferencia del círculo es $2\pi R$, entonces 360° equivalen a 2π radianes.

Las ecuaciones que contienen ángulos casi siempre se obtienen suponiendo que los ángulos se expresan en radianes. Por consiguiente, cuando se desee sustituir el valor de un ángulo expresado en grados en una ecuación, primero deberá convertirse a radianes. Una excepción notable a esta regla es que muchas calculadoras, cuando se usan para evaluar funciones como sen θ, aceptan ángulos expresados ya sea en grados o en radianes.



Figurd 1.2
Definición de un ángulo en radianes.

Conversión de unidades

La práctica de ingeniería con frecuencia requiere convertir valores expresados en unidades de una clase a valores en otras unidades. Si algunos datos de un problema están dados en unidades SI y otros en unidades del sistema inglés, todos ellos se deben expresar en términos de un solo sistema de unidades. En los problemas expresados en unidades SI, ocasionalmente se darán datos en unidades diferentes de las unidades básicas: segundos, metros, kilogramos y newtons. Estos datos se deben convertir a unidades básicas antes de resolver el problema. Así mismo, en problemas planteados en unidades del sistema inglés, los valores se deben convertir a las unidades básicas de segundo, pie, slug y libra. Cuando adquiera cierta experiencia, reconocerá situaciones en que esas reglas se pueden relajar, pero por ahora éstas representan el procedimiento más seguro para resolver problemas.

La conversión de unidades es sencilla pero debe hacerse con cuidado. Suponga que se quiere expresar 1 milla/h en función de pie/s. Como 1 milla equivale a 5280 pies y una hora a 3600 s, podemos considerar las expresiones

$$\left(\frac{5280 \text{ pie}}{1 \text{ mi}}\right) \quad \text{y} \quad \left(\frac{1 \text{ h}}{3600 \text{ s}}\right)$$

como razones cuyos valores son iguales a 1. De esta manera obtenemos

$$1 \text{ mi/h} = 1 \text{ mi/h} \times \left(\frac{5280 \text{ pie}}{1 \text{ mi}}\right) \times \left(\frac{1 \text{ h}}{3600 \text{ s}}\right) = 1.47 \text{ pie/s}.$$

En la tabla 1.2 se incluyen algunas conversiones útiles entre unidades.

Tabla 1.2 Conversión de unidades

Tiempo	1 minuto	=	60 segundos
	1 hora	=	60 minutos
	1 día	=	24 horas
Longitud	1 pie	=	12 pulgadas
	1 milla	=	5280 pies
	1 pulgada	=	25.4 milímetros
	1 pie	=	0.3048 metros
Ángulo	2π radianes	=	360 grados
Masa	1 slug	=	14.59 kilogramos
Fuerza	1 libra	=	4.448 newtons

Ejemplo 1.1

Si un corredor olímpico (Fig. 1.3) corre 100 m en 10 segundos, su velocidad media es de 10 m/s. ¿Cuál es su velocidad media en millas/hora?



Figura 1.3

SOLUCIÓN

$$10 \text{ m/s} = 10 \text{ m/s} \times \left(\frac{1 \text{ pie}}{0.3048 \text{ m}}\right) \times \left(\frac{1 \text{ mi}}{5280 \text{ pie}}\right) \times \left(\frac{3600 \text{ s}}{1 \text{ h}}\right)$$

$$= 22.4 \text{ mi/h}$$

Ejemplo 1.2

Suponga que en la ecuación de Einstein

$$E = mc^2,$$

la masa m está en kg y la velocidad de la luz c en m/s.
(a) ¿Cuál es el valor de E en unidades SI?
(b) Si el valor de E en unidades SI es igual a 20, ¿cuál es su valor en las unidades básicas del sistema inglés?

ESTRATEGIA

(a) Como conocemos las unidades de los términos m y c, podemos deducir las unidades de E de la ecuación dada.
(b) Podemos usar las conversiones de unidades para la masa y la longitud dadas en la tabla 1.2 para convertir E de unidades SI a unidades del sistema inglés.

SOLUCIÓN

(a) De la ecuación para E,

$$E = (m \text{ kg})(c \text{ m/s})^2,$$

las unidades de E son kg-m^2/s^2.

(b) De la tabla 1.2, 1 slug = 14.59 kg y 1 pie = 0.3048 metros. Por tanto,

$$1\ \text{kg-m}^2/\text{s}^2 = 1\ \text{kg-m}^2/\text{s}^2 \times \left(\frac{1\ \text{slug}}{14.59\ \text{kg}}\right) \times \left(\frac{1\ \text{pie}}{0.3048\ \text{m}}\right)^2$$

$$= 0.738\ \text{slug-pie}^2/\text{s}^2.$$

El valor de E en unidades del sistema inglés es

$$E = (20)(0.738) = 14.8\ \text{slug-pie}^2/\text{s}^2.$$

Ejemplo 1.3

El *Rocket* (Fig. 1.4) de George Stephenson, una de las primeras locomotoras de vapor, pesaba aproximadamente 7 ton con su carbonera. (1 ton = 2000 lb.) ¿Cuál era aproximadamente su masa en kilogramos?

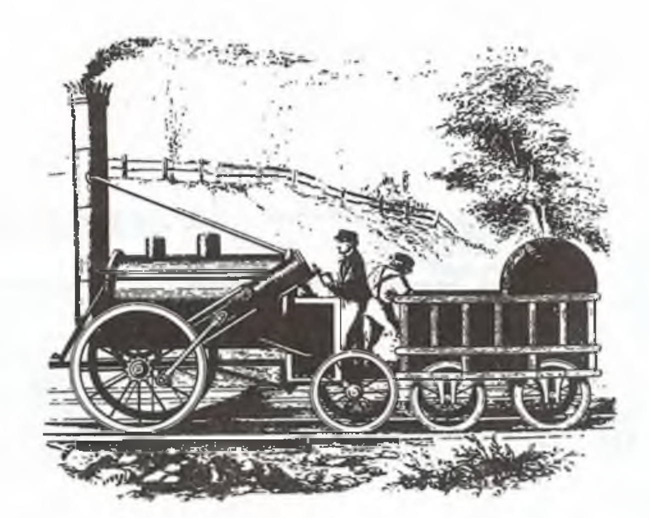


Figura 1.4

ESTRATEGIA

Podemos usar la ecuación (1.6) para obtener la masa en slugs y luego la conversión dada en la tabla 1.2 para determinar la masa en kilogramos.

SOLUCIÓN

La masa en slugs es

$$m = \frac{W}{g} = \frac{14\,000\ \text{lb}}{32.2\ \text{pie/s}^2} = 434.8\ \text{slugs}.$$

De la tabla 1.2, 1 slug es igual a 14.59 kg, por lo que la masa en kilogramos es (con tres cifras significativas)

$$m = (434.8)(14.59) = 6340\ \text{kg}.$$

Problemas

1.1 El valor π es 3.141592654... ¿Cuál es su valor con 4 cifras significativas?

1.2 ¿Cuál es el valor e (la base de los logaritmos naturales) con 5 cifras significativas?

1.3 Determine el valor de la expresión $1/(2 - \pi)$ con 3 cifras significativas.

1.4 Si $x = 3$, ¿cuál es el valor de la expresión $1 - e^{-x}$ con 3 cifras significativas?

1.5 Suponga que acaba de comprar un Ferrari Dino 246GT y quiere saber si puede usar su juego de llaves SAE (unidades del sistema inglés) para trabajar en él. Usted tiene llaves con anchos w = 1/4 pulg, 1/2 pulg, 3/4 pulg y 1 pulg, y el auto tiene tuercas con dimensiones n = 5 mm, 10 mm, 15 mm, 20 mm y 25 milímetros. Si definimos que una llave ajusta si w no es 2% mayor que n, ¿cuál de sus llaves puede usar?





P1.5

1.6 El *Rocket* de 1829, mostrado en el ejemplo 1.3, podía jalar un carro con 30 pasajeros a 25 mi/hora. Determine su velocidad con tres cifras significativas, (a) en pie/s, (b) en km/h.

1.7 Los "trenes bala" de alta velocidad comenzaron a correr entre Tokyo y Osaka en 1964. Si un tren bala viaja a 240 km/h, ¿cuál es su velocidad en mi/h con tres cifras significativas?

1.8 Los ingenieros que estudian ondas de choque suelen expresar la velocidad en milímetros por microsegundo (mm/μs). Suponga que la velocidad de un frente de onda es de 5 mm/μs. Determine esta velocidad: (a) en m/s, (b) en mi/s.

1.9 Un geofísico mide el movimiento de un glacial y descubre que se está moviendo 80 mm/año. ¿Cuál es su velocidad en m/s?

1.10 La aceleración debida a la gravedad al nivel del mar en unidades SI es $g = 9.81$ m/s^2. Convirtiendo unidades, use este valor para determinar la aceleración debida a la gravedad al nivel del mar en unidades del sistema inglés.

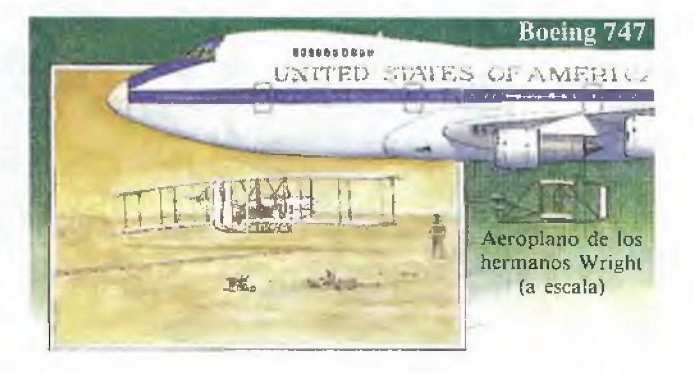
1.11 Un *estadio* (*furlong* = 1/8 de milla) *por quincena* es una unidad chusca de velocidad, inventada tal vez por un estudiante como comentario satírico sobre la enredada variedad de unidades con que los ingenieros tienen que tratar. Si usted camina 5 pie/s, ¿cuál es su velocidad en estadios por quincena con tres cifras significativas?

1.12 El área de la sección transversal de una viga es igual a 480 pulg^2. ¿Cuál es el área de su sección transversal en m^2?

1.13 Un camión puede cargar 15 yardas cúbicas de grava. (1 yarda = 3 pies). ¿Cuántos metros cúbicos puede cargar?

1.14 Un transductor de presión mide un valor de 300 lb/pulg^2. Determine el valor de la presión en pascales. Un pascal (Pa) es igual a 1 N/m^2.

1.15 Un caballo de fuerza equivale a 550 lb-pie/s. Un watt equivale a 1 N-m/s. Determine el número de watts generados por (a) el avión de los hermanos Wright (1903), que tenía un motor de 12 caballos de fuerza; (b) un avión *jet* con potencia de 100 000 caballos de fuerza a velocidad de crucero.



P1.15

1.16 En unidades del sistema SI, la constante de la gravitación universal es $G = 6.67 \times 10^{-11}$ N-m^2/kg^2. Determine el valor de G en unidades del sistema inglés.

1.17 Si la Tierra se modela como una esfera homogénea, la velocidad de un satélite en órbita circular es

$$v = \sqrt{\frac{gR_E^2}{r}},$$

donde R_E es el radio de la Tierra y r es el radio de la órbita.
(a) Si G está en m/s^2 y R_E y r en metros, ¿cuáles son las unidades de v?
(b) Si R_E = 6370 km y r = 6670 km, ¿cuál es el valor de v con tres cifras significativas?

(c) Para la órbita descrita en la parte (b), ¿cuál es el valor de v en mi/s con tres cifras significativas?

1.18 En la ecuación

$$T = \frac{1}{2}I\omega^2,$$

el término I está en kg-m^2 y ω está en s^{-1}.
(a) ¿Cuáles son las unidades SI de T?
(b) Si el valor de T es 100 cuando I está en kg-m^2 y ω está en s^{-1}, ¿cuál es el valor de T cuando se expresa en unidades del sistema inglés?

1.19 "El tractor" construido para transportar al *Saturno V* del edificio de montaje a la plataforma de lanzamiento es el vehículo terrestre más grande jamás construido; pesa 4.9×10^6 lb al nivel del mar.
(a) ¿Cuál es su masa en slugs?
(b) ¿Cuál es su masa en kilogramos?
(c) Un automóvil ordinario tiene una masa de aproximadamente 1000 kilogramos. ¿Cuántos automóviles se deberían tener para obtener un peso igual al del tractor al nivel del mar?

1.20 La aceleración debida a la gravedad es de 13.2 pie/s^2 en Marte y de 32.2 pie/s^2 en la Tierra. Si una mujer pesa 125 lb sobre la Tierra, ¿cuánto pesará en Marte?

1.21 La aceleración debida a la gravedad es de 13.2 pie/s^2 sobre la superficie de Marte y de 32.2 pie/s^2 sobre la superficie de la Tierra. Una mujer pesa 125 lb en la Tierra. Para sobrevivir y trabajar en la superfice de Marte, debe portar un traje y un equipo especiales, así como herramientas. ¿Cuál es el peso máximo admisible en la Tierra de la ropa, el equipo y las herramientas de la astronauta si los ingenieros no quieren que en Marte el peso total rebase las 125 libras?

1.22 Una persona tiene una masa de 50 kg.
(a) La aceleración debida a la gravedad al nivel del mar es $g = 9.81$ m/s^2. ¿Cuál es el peso de la persona al nivel del mar?
(b) La aceleración debida a la gravedad en la superficie de la Luna es de 1.62 m/s^2. ¿Cuál sería el peso de la persona en la Luna?

1.23 La aceleración debida a la gravedad al nivel del mar es $g = 9.81$ m/s^2. El radio de la Tierra es de 6370 km. La constante gravitatoria universal es $G = 6.67$ por 10^{-11} N-m^2/kg^2. Use esta información para determinar la masa de la Tierra.

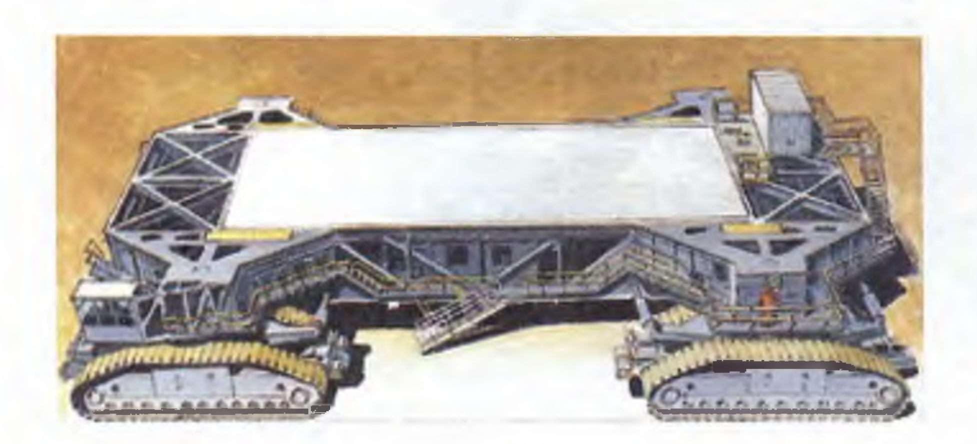
1.24 Una persona pesa 180 lb al nivel del mar. El radio de la Tierra es de 3960 millas. ¿Qué fuerza ejerce la atracción gravitatoria de la Tierra sobre la persona si ésta se encuentra en una estación espacial en órbita a 200 millas de la Tierra?

1.25 La aceleración debida a la gravedad en la superficie de la Luna es de 1.62 m/s^2. El radio de la Luna es $R_M = 1738$ km. Determine la aceleración debida a la gravedad en la Luna en un punto ubicado 1738 km arriba de su superficie.
Estrategia: Escriba una ecuación equivalente a la ecuación (1.4) para la aceleración debida a la gravedad en la Luna.

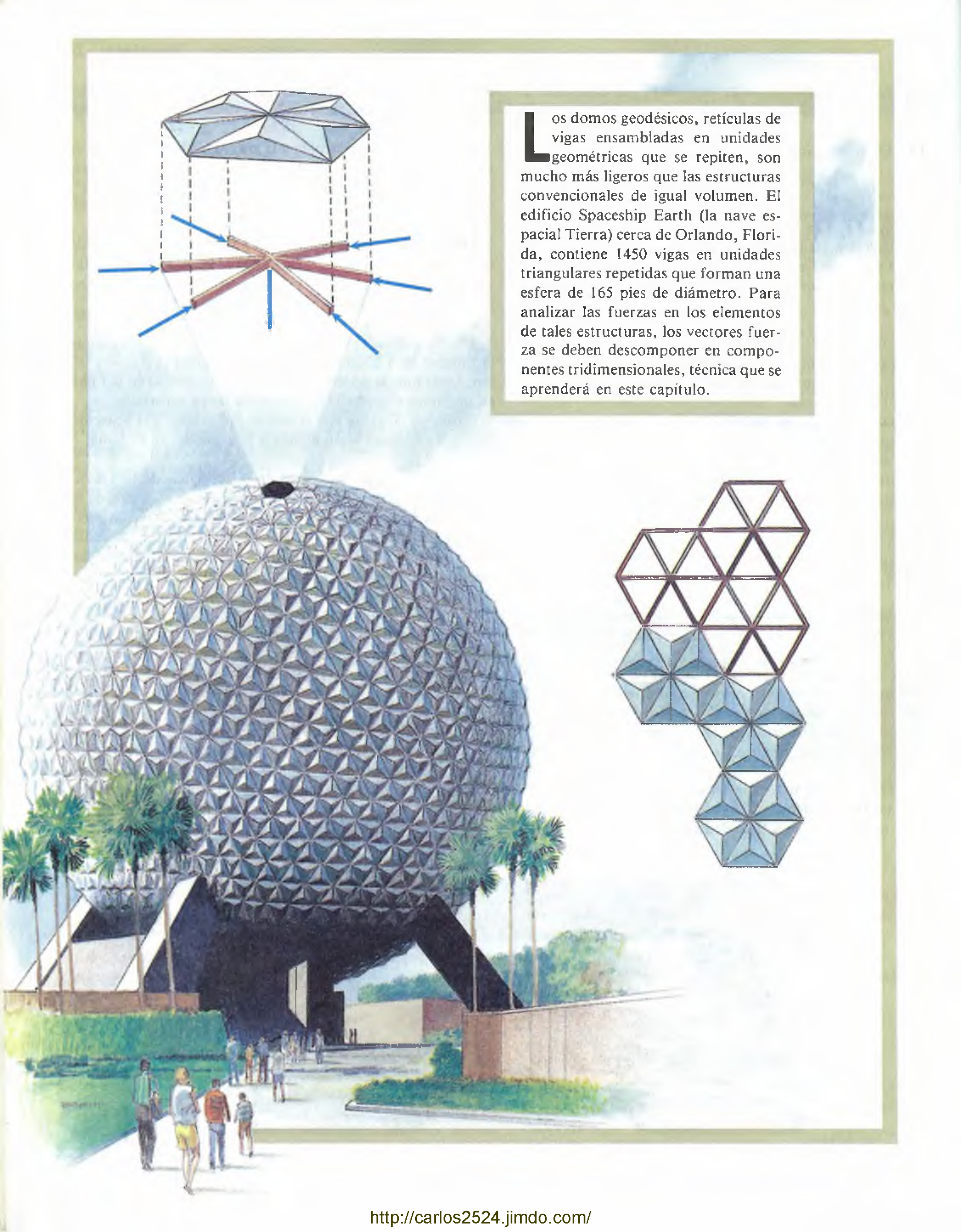
1.26 Si un cuerpo está cerca de la superficie de la Tierra, la variación de su peso con la distancia desde el centro de la Tierra con frecuencia puede despreciarse. La aceleración debida a la gravedad al nivel del mar es $g = 9.81$ m/s^2. El radio de la Tierra es de 6370 km. El peso de un cuerpo al nivel del mar es mg, donde m es su masa. ¿A qué altura sobre la superficie de la Tierra el peso del cuerpo se reduce a 0.99 mg?

1.27 Los centros de dos naranjas se encuentran a un metro de distancia. La masa de cada naranja es de 0.2 kg. ¿Qué fuerza gravitatoria ejercen entre sí las naranjas? (La constante gravitatoria universal es $G = 6.67 \times 10^{-11}$ N-m^2/kg^2.)

1.28 Una pulgada es igual a 25.4 milímetros. La masa de un metro cúbico de agua es de 1000 kilogramos. La aceleración debida a la gravedad al nivel del mar es $g = 9.81$ m/s^2. El peso de un pie cúbico de agua al nivel del mar es aproximadamente igual a 62.4 lb. Usando esta información, determine a cuántos newtons equivale una libra.



P1.19



Los domos geodésicos, retículas de vigas ensambladas en unidades geométricas que se repiten, son mucho más ligeros que las estructuras convencionales de igual volumen. El edificio Spaceship Earth (la nave espacial Tierra) cerca de Orlando, Florida, contiene 1450 vigas en unidades triangulares repetidas que forman una esfera de 165 pies de diámetro. Para analizar las fuerzas en los elementos de tales estructuras, los vectores fuerza se deben descomponer en componentes tridimensionales, técnica que se aprenderá en este capítulo.

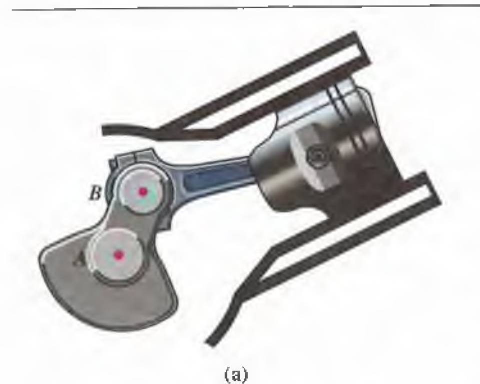
Capítulo 2

Vectores

PARA describir una fuerza que actúa sobre un elemento estructural, se deben especificar la magnitud de la fuerza y su dirección. Para describir la posición de un avión respecto a un aeropuerto, se deben especificar la distancia y la dirección del aeropuerto al avión. En ingeniería tratamos con muchas cantidades que tienen tanto magnitud como dirección y que se pueden expresar como vectores. En este capítulo estudiaremos operaciones con vectores y la descomposición de vectores en sus componentes, y daremos ejemplos de aplicaciones sencillas de los vectores a la ingeniería.

Operaciones y definiciones vectoriales

2.1 *Escalares y vectores*



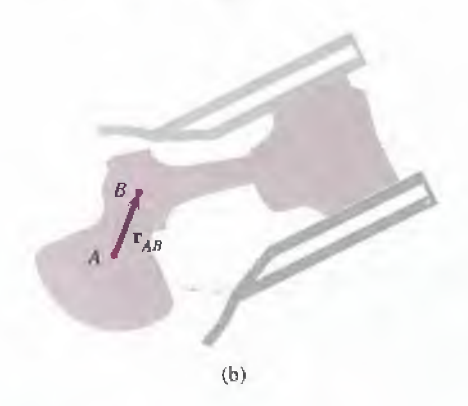


Figura 2.1
(a) Puntos A y B de un mecanismo.
(b) Vector $\mathbf{r}_{AB}$ *de* A a B.

Una cantidad física que puede ser descrita por un número real se denomina **escalar**. El tiempo es una cantidad escalar, así como la masa; por ejemplo, podemos decir que la masa de un automóvil vale 1200 kg.

Por el contrario, para describir una cantidad vectorial se debe especificar un número real, o **magnitud**, y una dirección. Dos cantidades vectoriales son iguales sólo si sus magnitudes y direcciones son iguales.

La posición de un punto en el espacio en relación con otro punto es una cantidad vectorial. Para describir la localización de una ciudad con respecto a su casa, no es suficiente decir que está a 100 millas. Debe decir que está 100 millas al oeste. La fuerza también es una cantidad vectorial. Si empuja un mueble, aplica una fuerza de magnitud suficiente para moverlo en la dirección deseada.

Representaremos vectores con letras en negritas, **U**, **V**, **W**,..., y denotaremos la magnitud de un vector **U** por medio de $|\mathbf{U}|$. En trabajos manuscritos, un vector **U** se puede representar con los símbolos $\bar{U}$, $\vec{U}$ o $\underset{\sim}{U}$. Un vector se representa gráficamente por medio de una flecha. La dirección de la flecha indica la dirección del vector, y la longitud de la flecha se define como proporcional a la magnitud.

Por ejemplo, consideremos los puntos A y B del mecanismo de la figura 2.1(a). La posición del punto B respecto al punto A se puede especificar con el vector $\mathbf{r}_{AB}$ de la figura 2.1(b). La dirección de $\mathbf{r}_{AB}$ indica la dirección del punto A hacia el punto B. Si la distancia entre los dos puntos es de 200 mm, la magnitud $|\mathbf{r}_{AB}| = 200$ mm.

En la figura 2.2, el cable AB ayuda a soportar la torre. La fuerza que el cable ejerce sobre la torre se puede representar con un vector **F**. Si el cable ejerce una fuerza de 800 N sobre la torre, $|\mathbf{F}| = 800$ N.

2.2 *Cómo operar con vectores*

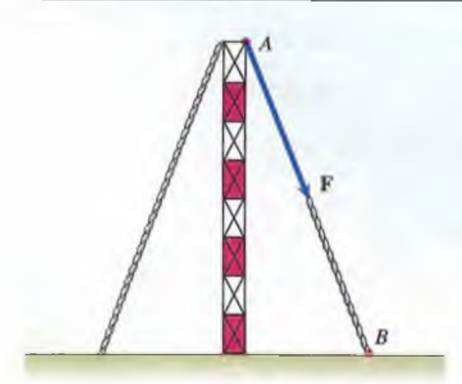


Figura 2.2
Representación, por un vector **F**, de la fuerza que el cable AB ejerce en la torre.

Los vectores sirven para representar cantidades físicas que tienen magnitud y dirección, aunque eso es sólo el principio de su utilidad. Así como existen reglas para operar con números reales, como las de la suma, etc., existen también reglas para operar con vectores. Esas reglas proporcionan una poderosa herramienta para el análisis en ingeniería.



Suma vectorial

Cuando un objeto se mueve de un lugar a otro en el espacio, decimos que experimenta un **desplazamiento**. Si movemos un libro (o más bien algún punto de un libro) de un lugar de la mesa a otro, como se muestra en la figura 2.3(a), podemos representar el desplazamiento con el vector **U**. La dirección de **U** indica la dirección del desplazamiento, y $|\mathbf{U}|$ es la distancia recorrida por el libro.

Supongamos que damos al libro un segundo desplazamiento **V**, como

se muestra en la figura 2.3(b). Los desplazamientos **U** y **V** equivalen a un solo desplazamiento del libro de su posición inicial a su posición final, que representamos con el vector **W** en la figura 2.3(c). Observe que la posición final del libro es la misma si primero ocurre el desplazamiento **U** y luego el desplazamiento **V** que si primero ocurre el desplazamiento **V** y luego el desplazamiento **U** (Fig. 2.3d). El desplazamiento **W** se define como la suma de los desplazamientos **U** y **V**,

$$\mathbf{U} + \mathbf{V} = \mathbf{W}.$$

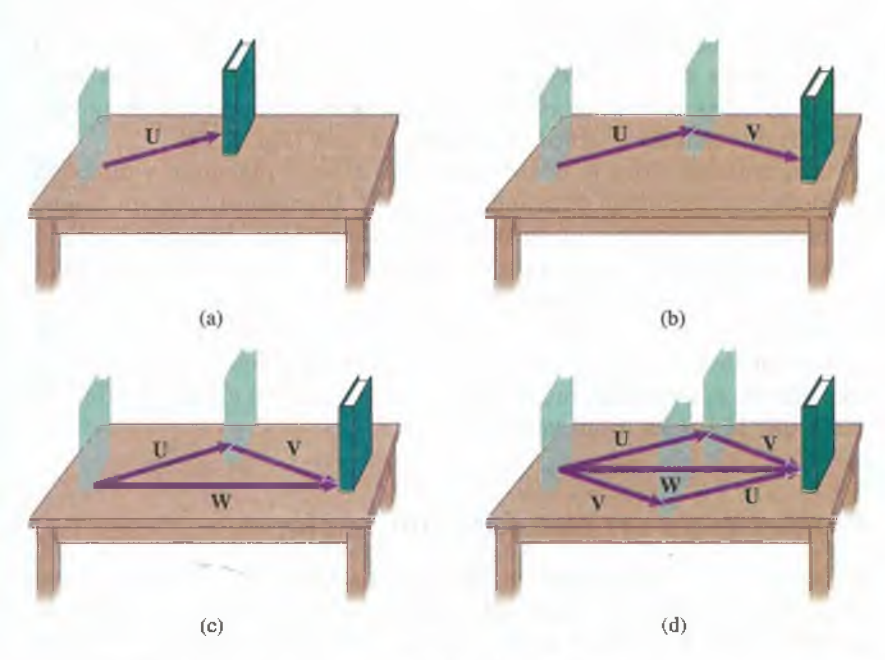
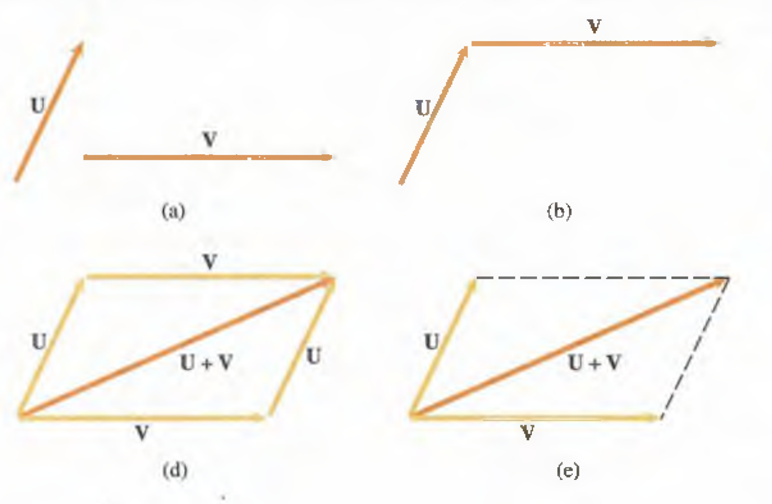


Figura 2.3
(a) Desplazamiento representado por el vector **U**.
(b) El desplazamiento **U** seguido por el desplazamiento **V**.
(c) Los desplazamientos **U** y **V** son equivalentes al desplazamiento **W**.
(d) La posición final del libro no depende del orden de los desplazamientos.

La definición de suma vectorial está basada en la suma de desplazamientos. Consideremos los vectores **U** y **V** de la figura 2.4(a). Si los colocamos cabeza con cola (Fig. 2.4b), su suma se define como el vector que va de la cola de **U** a la cabeza de **V** (Fig. 2.4c). Esto se llama **regla del triángulo** en la suma vectorial. La figura 2.4(d) demuestra que la suma es independiente del orden en que los vectores se colocan cabeza con cola. Así, surge la **regla del paralelogramo** de la suma vectorial (Fig. 2.4e).



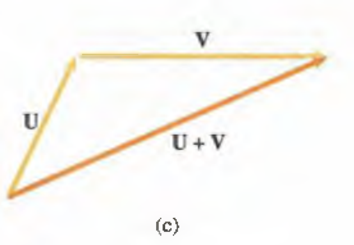


Figura 2.4
(a) Vectores **U** y **V**.
(b) La cabeza de **U** en la cola de **V**.
(c) Regla del triángulo para obtener la suma de **U** y **V**.
(d) La suma es independiente del orden en que los vectores se sumen.
(e) Regla del paralelogramo para obtener la suma de **U** y **V**.

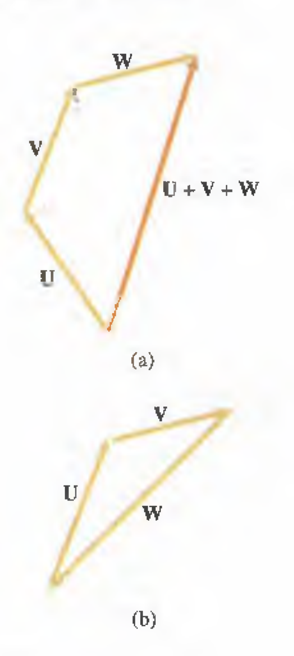


Figura 2.5
(a) Suma de tres vectores.
(b) Tres vectores cuya suma es igual a cero.

La definición de la suma vectorial implica que

$$\mathbf{U} + \mathbf{V} = \mathbf{V} + \mathbf{U} \quad \text{La suma vectorial es conmutativa.} \tag{2.1}$$

y

$$(\mathbf{U} + \mathbf{V}) + \mathbf{W} = \mathbf{U} + (\mathbf{V} + \mathbf{W}) \quad \text{La suma vectorial es asociativa.} \tag{2.2}$$

para vectores **U**, **V** y **W** cualesquiera. Estos resultados indican que al sumar dos o más vectores no importa el orden en que se sumen. La suma se obtiene colocando los vectores cabeza con cola en cualquier orden. El vector que va de la cola del primer vector a la cabeza del último es la suma (Fig. 2.5a). Si la suma es igual a cero, los vectores forman un polígono cerrado cuando se colocan cabeza con cola (Fig. 2.5b).

Una cantidad física se denomina **vector** si tiene magnitud y dirección y obedece la definición de la suma vectorial. Hemos visto que un desplazamiento es un vector. La posición de un punto en el espacio respecto a otro punto también es una cantidad vectorial. En la figura 2.6 el vector $\mathbf{r}_{AC}$ de A a C es la suma de $\mathbf{r}_{AB}$ y $\mathbf{r}_{BC}$.

Una fuerza tiene dirección y magnitud pero, ¿obedecen las fuerzas la definición de la suma vectorial? Por ahora supondremos que sí. Cuando abordemos la dinámica, mostraremos que la segunda ley de Newton implica que la fuerza es un vector.

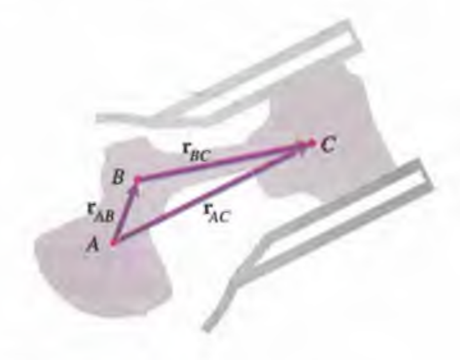


Figura 2.6
Las flechas que denotan las posiciones relativas de puntos son vectores.

Producto de un escalar y un vector

El producto de un escalar (número real) a y un vector **U** es un vector que se escribe como $a\mathbf{U}$. Su magnitud es $|a||\mathbf{U}|$, donde $|a|$ es el valor absoluto del escalar a. La dirección de $a\mathbf{U}$ es igual que la de **U** cuando a es positiva y es opuesta a la dirección de **U** cuando a es negativa.

El producto $(-1)\mathbf{U}$ se escribe $-\mathbf{U}$ y se llama "negativo del vector **U**"; tiene la misma magnitud que **U** pero dirección opuesta.

La división de un vector **U** por un escalar a se define como el producto

$$\frac{\mathbf{U}}{a} = \left(\frac{1}{a}\right)\mathbf{U}.$$

En la figura 2.7 se muestran un vector **U** y los productos de **U** con los escalares 2, -1 y $1/2$.

Las definiciones de la suma vectorial y del producto de un escalar y un vector implican que

$$a(b\mathbf{U}) = (ab)\mathbf{U}, \quad \text{El producto es asociativo con respecto a la multiplicación escalar.} \tag{2.3}$$

$$(a + b)\mathbf{U} = a\mathbf{U} + b\mathbf{U}, \quad \text{El producto es distributivo con respecto a la suma escalar.} \tag{2.4}$$

y

$$a(\mathbf{U} + \mathbf{V}) = a\mathbf{U} + a\mathbf{V} \quad \text{El producto es distributivo con respecto a la suma vectorial.} \tag{2.5}$$

para escalares a y b y vectores **U** y **V** cualesquiera. Necesitaremos estos resultados cuando estudiemos las componentes de los vectores.

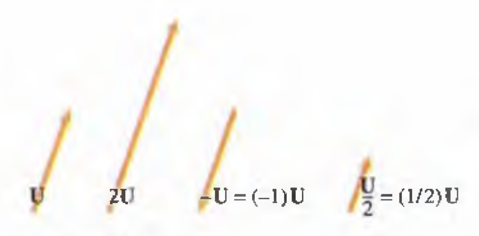


Figura 2.7
Un vector **U** y algunos de sus múltiplos escalares.

Resta vectorial

La diferencia de dos vectores **U** y **V** se obtiene sumando **U** al vector $(-1)\mathbf{V}$:

$$\mathbf{U} - \mathbf{V} = \mathbf{U} + (-1)\mathbf{V}. \tag{2.6}$$

Consideremos los vectores **U** y **V** de la figura 2.8(a). El vector $(-1)\mathbf{V}$ tiene la misma magnitud que el vector **V** pero dirección opuesta (Fig. 2.8b). En la figura 2.8(c) sumamos el vector **U** al vector $(-1)\mathbf{V}$ para obtener $\mathbf{U} - \mathbf{V}$.

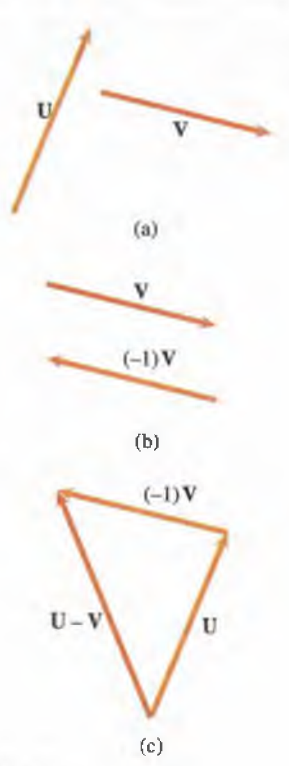


Figura 2.8
(a) Vectores **U** y **V**.
(b) Vectores **V** y $(-1)\mathbf{V}$.
(c) La suma de **U** y $(-1)\mathbf{V}$ es la diferencia vectorial $\mathbf{U} - \mathbf{V}$.

Vectores unitarios

Un **vector unitario** es simplemente un vector cuya magnitud es igual a la unidad. Un vector unitario especifica una dirección y permite expresar en forma conveniente un vector que tiene una dirección particular. Si un vector unitario **e** y un vector **U** tienen la misma dirección, podemos escribir **U** como el producto de su magnitud $|\mathbf{U}|$ y el vector unitario **e** (Fig. 2.9),

$$\mathbf{U} = |\mathbf{U}|\mathbf{e}.$$

Dividiendo ambos miembros de esta ecuación entre $|\mathbf{U}|$,

$$\frac{\mathbf{U}}{|\mathbf{U}|} = \mathbf{e},$$

vemos que al dividir cualquier vector **U** por su magnitud se obtiene un vector unitario con la misma dirección.



Figura 2.9
Como **U** y **e** tienen la misma dirección, el vector **U** es igual al producto de su magnitud y **e**.

Componentes vectoriales

Al expresar un vector **U** como la suma de un conjunto de vectores, cada vector se denomina **componente vectorial de U**. Supongamos que el vector **U** de la figura 2.10(a) es paralelo al plano definido por las dos líneas que se intersecan. Expresamos **U** como la suma de las componentes vectoriales **V** y **W** paralelas a las dos líneas (Fig. 2.10b), y decimos que el vector **U** está **descompuesto** en las componentes vectoriales **V** y **W**.

Algunos problemas se pueden resolver dibujando diagramas vectoriales a escala y midiendo los resultados, o aplicando la trigonometría a los diagramas. En los ejemplos siguientes demostraremos ambos procedimientos, y en la siguiente sección mostraremos que expresar vectores en términos de componentes vectoriales mutuamente perpendiculares constituye una manera mucho más sencilla de resolver problemas con vectores.

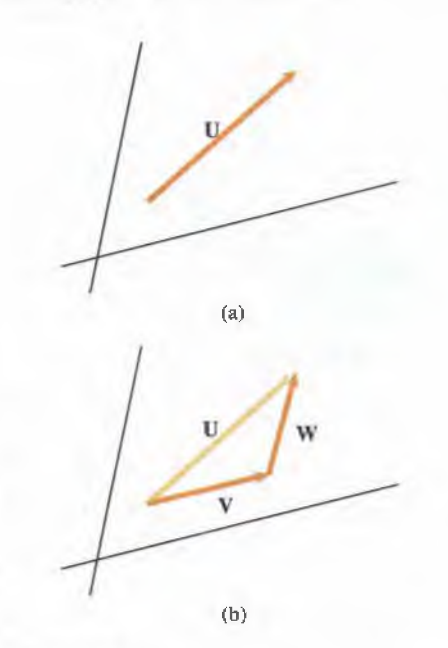
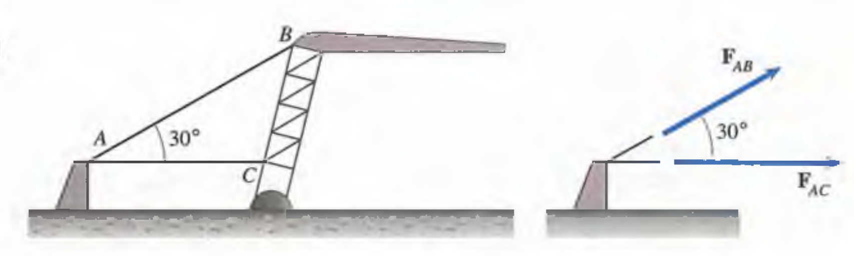


Figura 2.10
(a) Un vector **U** y dos líneas que se cortan
(b) Los vectores **V** y **W** son componentes vectoriales de **U**.

Ejemplo 2.1

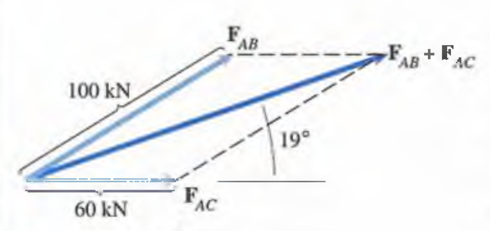
En la figura 2.11 los cables AB y AC ayudan a soportar el techo en voladizo de un estadio deportivo. Las fuerzas que los cables ejercen sobre la pila a la que están unidos se representan con los vectores $\mathbf{F}_{AB}$ y $\mathbf{F}_{AC}$. Las magnitudes de las fuerzas son $|\mathbf{F}_{AB}| = 100$ kN y $|\mathbf{F}_{AC}| = 60$ kN. Determine la magnitud y dirección de la suma de las fuerzas ejercidas sobre la pila por los cables (a) gráficamente y (b) usando la trigonometría.

Figura 2.11



ESTRATEGIA

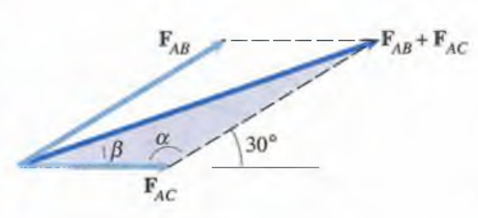
(a) Al dibujar el paralelogramo, con los vectores a escala, para sumar las dos fuerzas podemos medir la magnitud y dirección de su suma.
(b) Podemos calcular la magnitud y dirección de la suma de las fuerzas aplicando las leyes de los senos y los cosenos (Ap. A, Sec. A.2) a los triángulos formados por el paralelogramo de fuerzas.



(a) Solución gráfica.

SOLUCIÓN

(a) Construimos gráficamente el paralelogramo para obtener la suma de las dos fuerzas con las longitudes de $\mathbf{F}_{AB}$ y $\mathbf{F}_{AC}$ proporcionales a sus magnitudes (Fig. a). Midiendo la figura, calculamos que la magnitud del vector $\mathbf{F}_{AB} + \mathbf{F}_{AC}$ es de 155 kN y su dirección es de 19° sobre la horizontal.
(b) Consideremos el paralelogramo para obtener la suma de las dos fuerzas (Fig. b). Como $\alpha + 30° = 180°$, $\alpha = 150°$. Aplicando la ley de los cosenos al triángulo sombreado,



(b) Solución trigonométrica.

$$|\mathbf{F}_{AB} + \mathbf{F}_{AC}|^2 = |\mathbf{F}_{AB}|^2 + |\mathbf{F}_{AC}|^2 - 2|\mathbf{F}_{AB}|\,|\mathbf{F}_{AC}|\cos\alpha$$
$$= (100)^2 + (60)^2 - 2(100)(60)\cos 150°,$$

determinamos que la magnitud $|\mathbf{F}_{AB} + \mathbf{F}_{AC}|$ es de 154.9 kN.

Para obtener el ángulo β entre el vector $\mathbf{F}_{AB} + \mathbf{F}_{AC}$ y la horizontal, aplicamos la ley de los senos al triángulo sombreado:

$$\frac{\operatorname{sen}\beta}{|\mathbf{F}_{AB}|} = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{|\mathbf{F}_{AB} + \mathbf{F}_{AC}|}$$

La solución es

$$\beta = \operatorname{arcsen}\left(\frac{|\mathbf{F}_{AB}|\operatorname{sen}\alpha}{|\mathbf{F}_{AB} + \mathbf{F}_{AC}|}\right) = \operatorname{arcsen}\left(\frac{100\operatorname{sen}150°}{154.9}\right) = 18.8°.$$

Ejemplo 2.2

En la figura 2.12 la fuerza **F** se encuentra en el plano definido por las líneas L_A y L_B que se intersecan. Su magnitud es de 400 lb. Supongamos que **F** se quiere separar en componentes paralelas a L_A y a L_B. Determine las magnitudes de las componentes vectoriales (a) gráficamente y (b) usando la trigonometría.

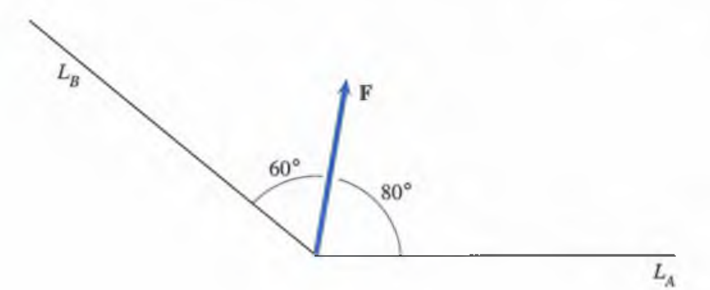
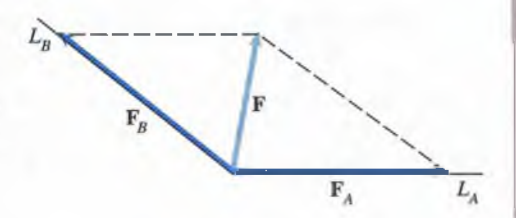


Figura 2.12

SOLUCIÓN

(a) Dibujamos líneas discontinuas desde la cabeza de **F** paralelas a L_A y L_B para construir las componentes vectoriales, que denotamos como $\mathbf{F}_A$ y $\mathbf{F}_B$ (Fig. a). Midiendo la figura, calculamos que sus magnitudes son $|\mathbf{F}_A| = 540$ lb y $|\mathbf{F}_B| = 610$ lb.



(a) Solución gráfica.

(b) Considere la fuerza **F** y las componentes vectoriales $\mathbf{F}_A$ y $\mathbf{F}_B$ (Fig. b). Como $\alpha + 80° + 60° = 180°$, $\alpha = 40°$. Aplicando la ley de los senos al triángulo 1,

$$\frac{\text{sen } 60°}{|\mathbf{F}_A|} = \frac{\text{sen } \alpha}{|\mathbf{F}|},$$

obtenemos la magnitud de $\mathbf{F}_A$,

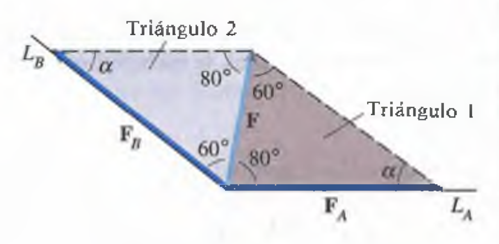
$$|\mathbf{F}_A| = \frac{|\mathbf{F}| \text{ sen } 60°}{\text{sen } \alpha} = \frac{400 \text{ sen } 60°}{\text{sen } 40°} = 538.9 \text{ lb}.$$

Aplicando la ley de los senos al triángulo 2,

$$\frac{\text{sen } 80°}{|\mathbf{F}_B|} = \frac{\text{sen } \alpha}{|\mathbf{F}|},$$

obtenemos la magnitud de $\mathbf{F}_B$:

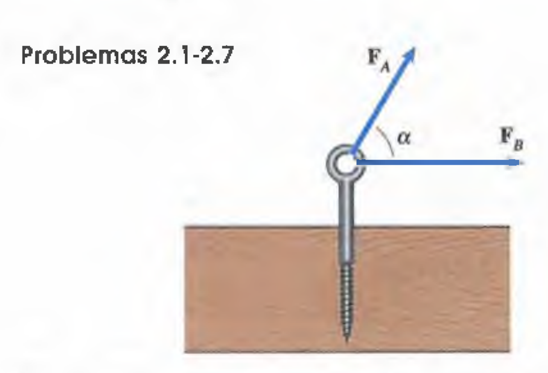
$$|\mathbf{F}_B| = \frac{|\mathbf{F}| \text{ sen } 80°}{\text{sen } \alpha} = \frac{400 \text{ sen } 80°}{\text{sen } 40°} = 612.8 \text{ lb}.$$



(b) Solución trigonométrica.

Problemas

Problemas 2.1-2.7



P2.1–P2.7

2.1 Se tienen las magnitudes $|\mathbf{F}_A| = 60$ N y $|\mathbf{F}_B| = 80$ N. El ángulo α es de 45°. Determine gráficamente la magnitud de la suma de las fuerzas $\mathbf{F} = \mathbf{F}_A + \mathbf{F}_B$ y el ángulo entre $\mathbf{F}_B$ y $\mathbf{F}$.

Estrategia: Construya un paralelogramo para determinar la suma de las fuerzas, dibujando las longitudes de $\mathbf{F}_A$ y $\mathbf{F}_B$ proporcionales a sus magnitudes y midiendo exactamente el ángulo α, como lo hicimos en el ejemplo 2.1. Usted puede ahora medir la magnitud de su suma y el ángulo entre ellas.

2.2 Se tienen las magnitudes $|\mathbf{F}_A| = 60$ N y $|\mathbf{F}_B| = 80$ N. El ángulo α es de 45°. Determine gráficamente la magnitud de la fuerza $\mathbf{F} = 2\mathbf{F}_A - 3\mathbf{F}_B$ y el ángulo entre $\mathbf{F}_B$ y $\mathbf{F}$.

2.3 Se tienen las magnitudes $|\mathbf{F}_A| = 100$ lb y $|\mathbf{F}_B| = 140$ lb. El ángulo α es de 40°. Use la trigonometría para determinar la magnitud de la suma de las fuerzas $\mathbf{F} = \mathbf{F}_A + \mathbf{F}_B$ y el ángulo entre $\mathbf{F}_B$ y $\mathbf{F}$.

Estrategia: Use las leyes de los senos y cosenos para analizar los triángulos formados por la regla del paralelogramo para la suma de las fuerzas como lo hicimos en el ejemplo 2.1. Las leyes de los senos y cosenos se incluyen en la sección A.2 del apéndice A.

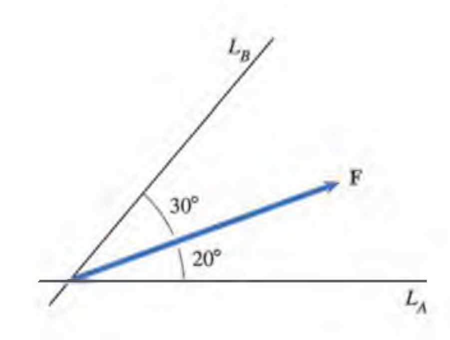
2.4 Se tienen las magnitudes $|\mathbf{F}_A| = 60$ N y $|\mathbf{F}_B| = 80$ N. El ángulo α es de 45°. Use la trigonometría para determinar la magnitud de la fuerza $\mathbf{F} = 2\mathbf{F}_A - 3\mathbf{F}_B$ y el ángulo entre $\mathbf{F}_B$ y $\mathbf{F}$.

2.5 Se dan las magnitudes $|\mathbf{F}_A| = 100$ lb y $|\mathbf{F}_B| = 140$ lb. Si α puede tener cualquier valor, ¿cuáles son los valores mínimo y máximo posibles de la magnitud de la suma de las fuerzas $\mathbf{F} = \mathbf{F}_A + \mathbf{F}_B$ y cuáles son los valores correspondientes de α?

2.6 Se tienen las magnitudes de $|\mathbf{F}_A| = 60$ N y el ángulo α es de 45°. Si la magnitud de la suma de las fuerzas $|\mathbf{F}_A + \mathbf{F}_B| = 180$ N, ¿cuál es la magnitud de $\mathbf{F}_B$?

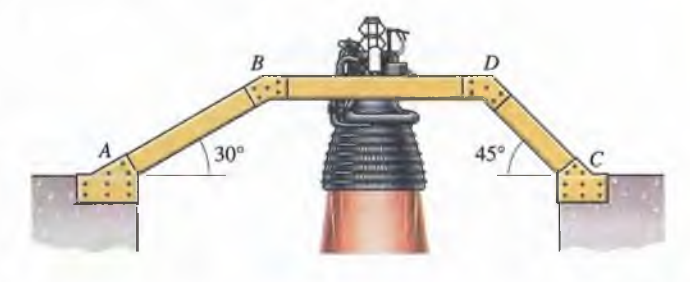
2.7 Se tienen las magnitudes $|\mathbf{F}_A| = 100$ lb y $|\mathbf{F}_B| = 140$ lb. Suponga que el soporte sobre el que actúan las dos fuerzas puede resistir con seguridad una fuerza total de 240 lb. ¿Cuál es el intervalo de valores aceptable para el ángulo α?

2.8 La fuerza $\mathbf{F}$ de magnitud 8 kN de la figura se encuentra en el plano definido por las líneas L_A y L_B que se intersecan. Suponga que se quiere separar $\mathbf{F}$ en una componente vectorial $\mathbf{F}_A$ paralela a L_A y en una componente vectorial $\mathbf{F}_B$ paralela a L_B. Determine las magnitudes de $\mathbf{F}_A$ y $\mathbf{F}_B$ (a) gráficamente y (b) usando la trigonometría.



P2.8

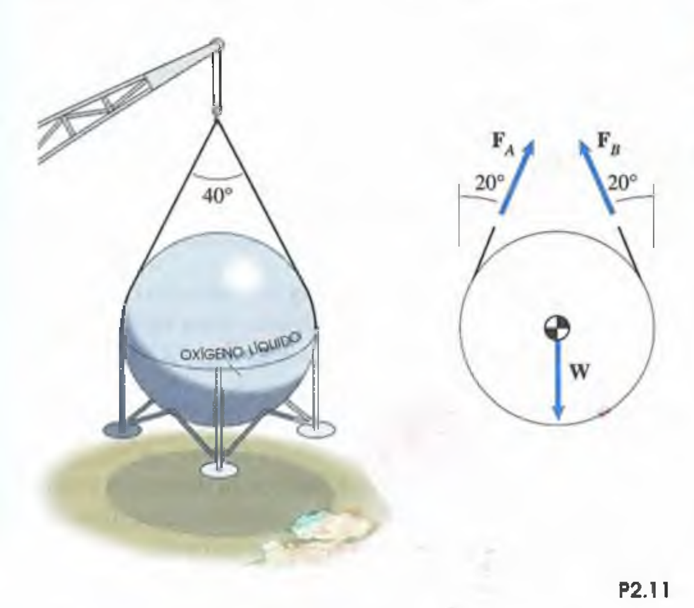
2.9 Un motor de cohete ejerce una fuerza hacia arriba de magnitud 4 MN (meganewtons) sobre la plataforma de pruebas. Si la fuerza se descompone en componentes vectoriales paralelas a las barras AB y CD, ¿cuáles son las magnitudes de las componentes?



P2.9

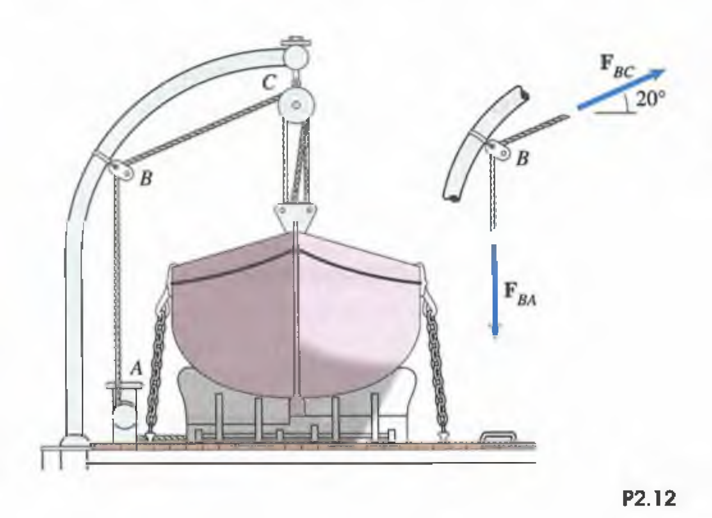
2.10 Los vectores $\mathbf{r}_A$ y $\mathbf{r}_B$ tienen magnitudes $|\mathbf{r}_A| = 30$ m y $|\mathbf{r}_B| = 40$ m. Determine la magnitud de su suma, $\mathbf{r}_A + \mathbf{r}_B$,
(a) si $\mathbf{r}_A$ y $\mathbf{r}_B$ tienen la misma dirección,
(b) si $\mathbf{r}_A$ y $\mathbf{r}_B$ son perpendiculares.

2.11 Un tanque de almacenamiento esférico está soportado por cables. El tanque está sometido a tres fuerzas: las fuerzas $\mathbf{F}_A$ y $\mathbf{F}_B$ ejercidas por los cables y el peso $\mathbf{W}$. El peso del tanque es $|\mathbf{W}| = 600$ lb. La suma vectorial de las fuerzas que actúan sobre el tanque es igual a cero. Determine las magnitudes de $\mathbf{F}_A$ y $\mathbf{F}_B$, (a) gráficamente y (b) usando la trigonometría.



P2.11

2.12 La cuerda ABC ejerce fuerzas $\mathbf{F}_{BA}$ y $\mathbf{F}_{BC}$ sobre la polea en B. Sus magnitudes son $|\mathbf{F}_{BA}| = |\mathbf{F}_{BC}| = 800$ N. Determine $|\mathbf{F}_{BA} + \mathbf{F}_{BC}|$, (a) gráficamente y (b) con trigonometría.



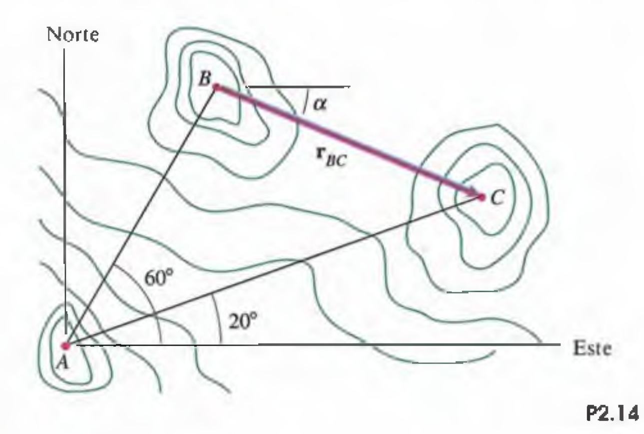
P2.12

2.13 Dos tractores remolcan una unidad habitacional hacia una nueva localidad en la base McMurdo de la Antártica (se muestra una vista aérea. Los cables son horizontales). La suma de las fuerzas $\mathbf{F}_A$ y $\mathbf{F}_B$ ejercidas sobre la unidad es paralela a la línea L, y $|\mathbf{F}_A| = 1000$ lb. Determine $|\mathbf{F}_B|$ y $|\mathbf{F}_A + \mathbf{F}_B|$, (a) gráficamente y (b) usando la trigonometría.



P2.13

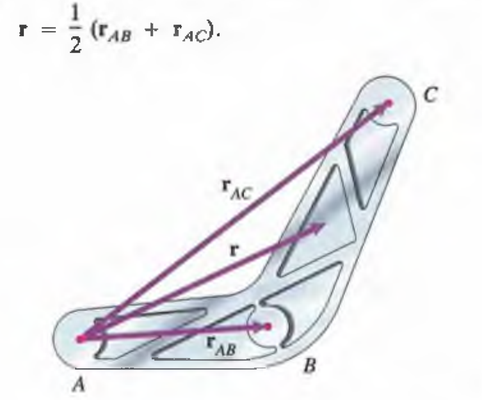
2.14 Un topógrafo determina que la distancia horizontal del punto A al B de la figura es de 400 m y que la distancia horizontal de A a C es de 600 m. Determine la magnitud del vector horizontal $\mathbf{r}_{BC}$ de B a C y el ángulo α, (a) gráficamente y (b) usando la trigonometría.



P2.14

2.15 El vector $\mathbf{r}$ va del punto A de la figura al punto medio del segmento definido por los puntos B y C. Demuestre que

$$\mathbf{r} = \frac{1}{2}(\mathbf{r}_{AB} + \mathbf{r}_{AC}).$$



P2.15

2.16 Esbozando los vectores, explique por qué

$$\mathbf{U} + (\mathbf{V} + \mathbf{W}) = (\mathbf{U} + \mathbf{V}) + \mathbf{W}.$$

Componentes cartesianas

Es más fácil trabajar con vectores cuando se pueden expresar en términos de componentes vectoriales perpendiculares. Explicaremos cómo descomponer vectores en componentes cartesianas en dos y tres dimensiones y cómo operar con vectores usando sus componentes.

2.3 Componentes en dos dimensiones

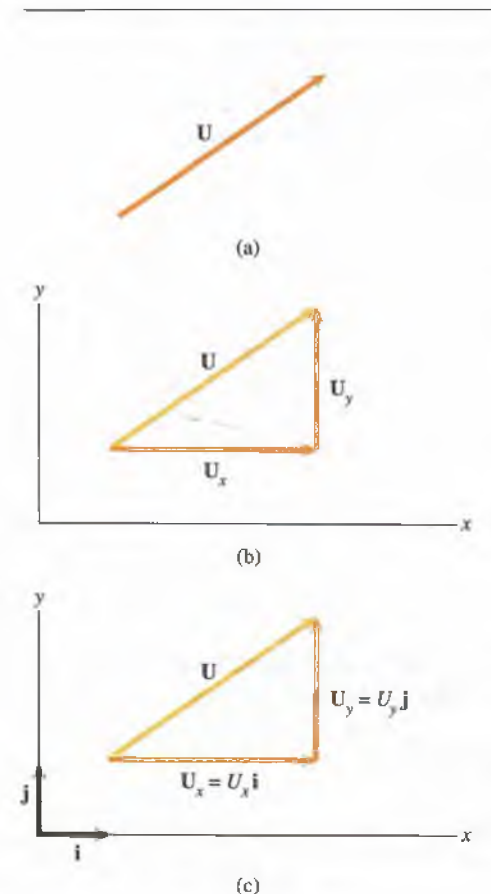


Figura 2.13
(a) Vector **U**.
(b) Componentes vectoriales $\mathbf{U}_x$ y $\mathbf{U}_y$.
(c) Las componentes vectoriales se pueden expresar en función de **i** y **j**.

Si al vector **U** (Fig. 2.13a) lo referimos a un sistema coordenado cartesiano de modo que **U** sea paralelo al plano *x*-*y*, podemos descomponerlo en componentes vectoriales $\mathbf{U}_x$ y $\mathbf{U}_y$ paralelas a los ejes *x* y *y* (Fig. 2.13b):

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}_x + \mathbf{U}_y.$$

Luego, si incluimos un vector unitario **i** que señale en la dirección positiva del eje *x* y un vector unitario **j** que señale en la dirección positiva del eje *y* (Fig. 2.13c), podemos expresar el vector **U** en la forma

$$\boxed{\mathbf{U} = U_x\,\mathbf{i} + U_y\,\mathbf{j}.} \qquad (2.7)$$

Los escalares U_x y U_y se llaman **componentes escalares** de **U**. Cuando nos referimos a las componentes de un vector, hacemos referencia a sus componentes escalares. Llamaremos a U_x y U_y componentes *x* y *y* de **U**.

Las componentes de un vector especifican tanto sus direcciones relativas al sistema coordenado cartesiano como sus magnitudes. En el triángulo rectángulo formado por el vector **U** y sus componentes vectoriales (Fig. 2.13c), vemos que la magnitud de **U** está dada en términos de sus componentes por el teorema de Pitágoras,

$$\boxed{|\mathbf{U}| = \sqrt{U_x^2 + U_y^2}.} \qquad (2.8)$$

Con esta ecuación se podrá determinar la magnitud de un vector cuando se conozcan sus componentes.

Operaciones con componentes vectoriales

La suma de dos vectores **U** y **V** en términos de sus componentes es

$$\begin{aligned}\mathbf{U} + \mathbf{V} &= (U_x\,\mathbf{i} + U_y\,\mathbf{j}) + (V_x\,\mathbf{i} + V_y\,\mathbf{j}) \\ &= (U_x + V_x)\,\mathbf{i} + (U_y + V_y)\,\mathbf{j}.\end{aligned} \qquad (2.9)$$

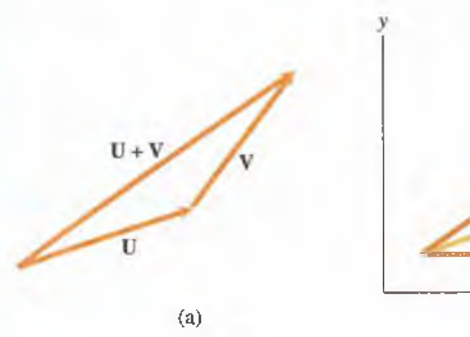
Las componentes de **U** + **V** son las sumas de las componentes de los vectores **U** y **V**. Observe que para obtener este resultado usamos las ecuaciones (2.2), (2.4) y (2.5).

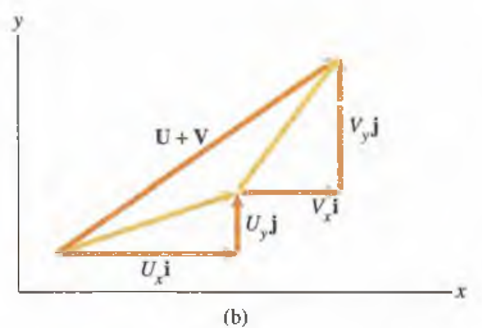
Es instructivo derivar gráficamente la ecuación (2.9). La suma de **U** y **V** se ve en la figura 2.14(a). En la figura b incluimos un sistema coordenado y descompusimos **U** y **V** en sus componentes. En la figura 2.14(c) sumamos las componentes x y y y obtuvimos la ecuación (2.9).

El producto de un número a y un vector **U** en términos de las componentes de **U** es

$$a\mathbf{U} = a(U_x\,\mathbf{i} + U_y\,\mathbf{j}) = aU_x\,\mathbf{i} + aU_y\,\mathbf{j}.$$

La componente de a**U** en cada dirección coordenada es igual al producto de a y la componente de **U** en esa dirección. Usamos las ecuaciones (2.3) y (2.5) para obtener este resultado.





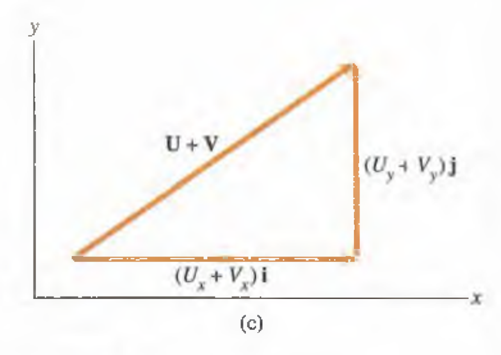


Figura 2.14
(a) Suma de **U** y **V**.
(b) Componentes vectoriales de **U** y **V**.
(c) La suma de las componentes en cada dirección coordenada es igual a la componente de **U** + **V** en esa dirección.

Vectores de posición dados por sus componentes

El vector de posición de un punto relativo a otro punto se puede expresar en función de las coordenadas cartesianas de ambos puntos. Sean los puntos A (x_A, y_A) y B (x_B, y_B). Sea $\mathbf{r}_{AB}$ el vector que especifica la posición de B en relación con A (Fig. 2.15a). Es decir, por medio de $\mathbf{r}_{AB}$ denotamos el vector que va **de** un punto A **a** otro punto B. Se observa (Fig. 2.15b) que $\mathbf{r}_{AB}$ está dado en función de las coordenadas de los puntos A y B por

$$\mathbf{r}_{AB} = (x_B - x_A)\,\mathbf{i} + (y_B - y_A)\,\mathbf{j}. \qquad (2.10)$$

Podemos establecer este resultado como una regla sencilla: la componente x del vector de posición que va de A a B se obtiene restando la coordenada x de A de la coordenada x de B, y la componente y se obtiene restando la coordenada y de A de la coordenada y de B.

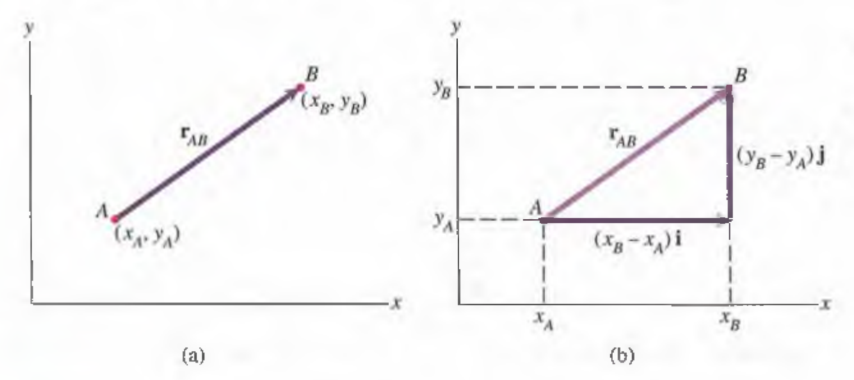


Figura 2.15
(a) Puntos A y B y el vector posición $\mathbf{r}_{AB}$ de A a B.
(b) Las componentes de $\mathbf{r}_{AB}$ se pueden determinar a partir de las coordenadas de los puntos A y B.

En los ejemplos siguientes mostraremos cómo manipular vectores en función de sus componentes. En el ejemplo 2.3, los vectores están dados en función de sus componentes y el objetivo es llevar a cabo operaciones, incluidas la determinación del producto de un escalar y un vector, la suma vectorial, y la determinación de la magnitud de un vector. Luego presentaremos ejemplos en los que se descomponen vectores en sus componentes.

Ejemplo 2.3

Se dan dos fuerzas, $\mathbf{F}_A = 7\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$ (kN) y $\mathbf{F}_B = -2\mathbf{i} - 6\mathbf{j}$ (kN). Determine la magnitud de la fuerza $\mathbf{F} = 2\mathbf{F}_A - 8\mathbf{F}_B$.

ESTRATEGIA

Podemos usar la ecuación dada para **F** a fin de determinar sus componentes y luego usar la ecuación (2.8) para determinar su magnitud.

SOLUCIÓN

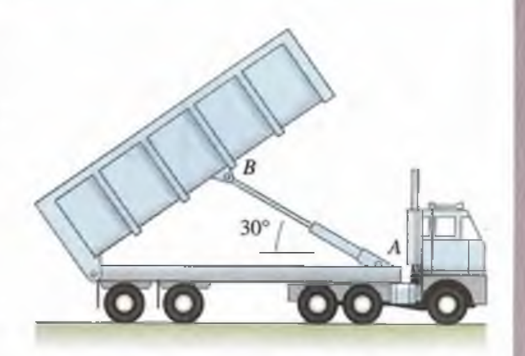
$$\mathbf{F} = 2\mathbf{F}_A - 8\mathbf{F}_B = 2(7\mathbf{i} - 4\mathbf{j}) - 8(-2\mathbf{i} - 6\mathbf{j}) = 30\mathbf{i} + 40\mathbf{j} \text{ (kN)}.$$

La componente x de **F** es de 30 kN y la componente y es de 40 kN. Por consiguiente,

$$|\mathbf{F}| = \sqrt{(30)^2 + (40)^2} = 50 \text{ kN}.$$

Ejemplo 2.4

Muchos dispositivos mecánicos utilizan cilindros hidráulicos para transmitir fuerzas. La fuerza es ejercida por un líquido a presión (fluido hidráulico) que empuja un émbolo dentro del cilindro. El cilindro hidráulico AB de la figura 2.16 ejerce una fuerza $\mathbf{F}$ de 4000 lb sobre la caja del camión de volteo, en el punto B. Exprese $\mathbf{F}$ en términos de componentes escalares usando el sistema coordenado que se muestra.



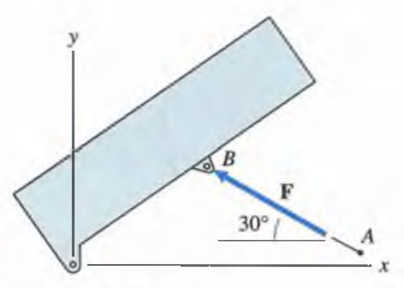


Figura 2.16

ESTRATEGIA

Cuando la dirección de un vector se especifica por medio de un ángulo, como en este ejemplo, podemos determinar los valores de las componentes con ayuda del triángulo rectángulo formado por el vector y sus componentes.

SOLUCIÓN

Dibujamos en la figura (a) el vector $\mathbf{F}$ y sus componentes vectoriales. En el triángulo rectángulo que se forma, vemos que la magnitud de $\mathbf{F}_x$ es

$$|\mathbf{F}_x| = |\mathbf{F}| \cos 30° = (4000) \cos 30° = 3464 \text{ lb}.$$

$\mathbf{F}_x$ apunta en la dirección x negativa, por lo que

$$\mathbf{F}_x = -3464\mathbf{i} \text{ (lb)}.$$

La magnitud de $\mathbf{F}_y$ es

$$|\mathbf{F}_y| = |\mathbf{F}| \text{ sen } 30° = (4000) \text{ sen } 30° = 2000 \text{ lb}.$$

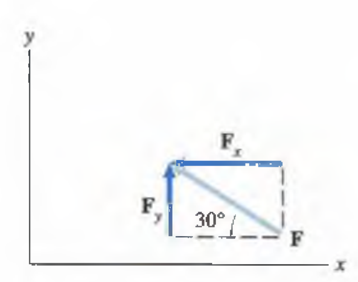
La componente vectorial $\mathbf{F}_y$ apunta en la dirección y positiva, por lo que

$$\mathbf{F}_y = 2000\mathbf{j} \text{ (lb)}.$$

El vector $\mathbf{F}$ en función de sus componentes es

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_x + \mathbf{F}_y = -3464\mathbf{i} + 2000\mathbf{j} \text{ (lb)}.$$

La componente x de $\mathbf{F}$ es -3464 lb y la componente y es 2000 lb.



(a) La fuerza $\mathbf{F}$ y sus componentes forman un triángulo rectángulo.

COMENTARIO

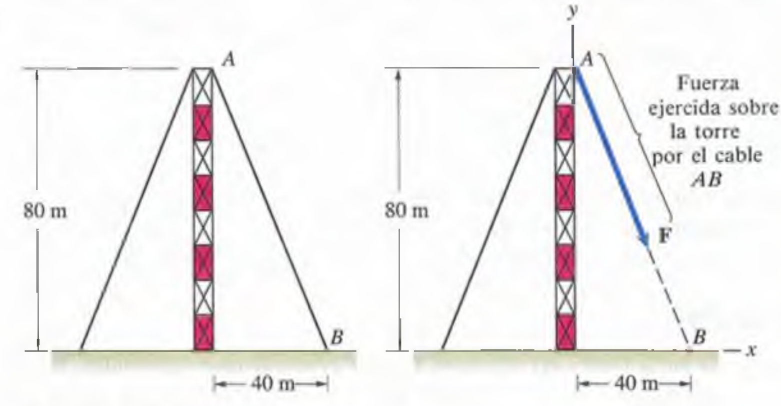
Cuando se determinan las componentes de un vector, se debe verificar que proporcionen la magnitud correcta. En este ejemplo,

$$|\mathbf{F}| = \sqrt{(-3464)^2 + (2000)^2} = 4000 \text{ lb}.$$

Ejemplo 2.5

El cable entre los puntos A y B ejerce una fuerza **F** de 800 N sobre la parte superior de la torre de televisión mostrada en la figura 2.17. Separe **F** en sus componentes usando el sistema coordenado que se indica.

Figura 2.17



ESTRATEGIA

Determinaremos las componentes de **F** de tres maneras distintas:

Primer método Con las dimensiones dadas podemos determinar el ángulo α entre **F** y el eje y (Fig. a), y luego podemos determinar las componentes con ayuda del triángulo rectángulo formado por el vector **F** y sus componentes.

Segundo método Los triángulos rectángulos formados por **F** y sus componentes son similares al triángulo OAB de la figura (a). Podemos determinar las componentes de **F** usando las proporciones entre los lados de esos triángulos similares.

Tercer método De las dimensiones dadas podemos determinar las componentes del vector de posición $\mathbf{r}_{AB}$ que va del punto A al punto B (Fig. b). Dividiendo este vector entre su magnitud, obtenemos un vector unitario $\mathbf{e}_{AB}$ con la misma dirección que **F** (Fig. c) y luego obtenemos **F** en función de sus componentes expresándolo como producto de su magnitud y $\mathbf{e}_{AB}$.

SOLUCIÓN

Primer método Consideremos la fuerza **F** y sus componentes vectoriales (Fig. a). La tangente del ángulo α entre **F** y el eje y es $\tan \alpha = 40/80 = 0.5$, por lo que $\alpha = \arctan(0.5) = 26.6°$. En el triángulo rectángulo formado por **F** y sus componentes observamos que la magnitud de $\mathbf{F}_x$ es

$$|\mathbf{F}_x| = |\mathbf{F}| \text{ sen } 26.6° = (800) \text{ sen } 26.6° = 357.8 \text{ N}$$

y la magnitud de $\mathbf{F}_y$ es

$$|\mathbf{F}_y| = |\mathbf{F}| \cos 26.6° = (800) \cos 26.6° = 715.5 \text{ N}.$$

Como $\mathbf{F}_x$ señala en la dirección x positiva y $\mathbf{F}_y$ en la dirección y negativa, la fuerza **F** es

$$\mathbf{F} = 357.8\mathbf{i} - 715.5\mathbf{j} \text{ (N)}.$$

Segundo método La longitud del cable AB es $\sqrt{(80)^2 + (40)^2} = 89.4$ m. Como el triángulo OAB de la figura (a) es semejante al triángulo formado por **F** y sus componentes vectoriales,

$$\frac{|\mathbf{F}_x|}{|\mathbf{F}|} = \frac{OB}{AB} = \frac{40}{89.4}.$$

Así, la magnitud de $\mathbf{F}_x$ es

$$|\mathbf{F}_x| = \left(\frac{40}{89.4}\right)|\mathbf{F}| = \left(\frac{40}{89.4}\right)(800) = 357.8 \text{ N}.$$

Podemos ver también en los triángulos semejantes que

$$\frac{|\mathbf{F}_y|}{|\mathbf{F}|} = \frac{OA}{AB} = \frac{80}{89.4},$$

por lo que la magnitud de $\mathbf{F}_y$ es

$$|\mathbf{F}_y| = \left(\frac{80}{89.4}\right)|\mathbf{F}| = \left(\frac{80}{89.4}\right)(800) = 715.5 \text{ N}.$$

Obtenemos así el mismo resultado anterior:

$$\mathbf{F} = 357.8\,\mathbf{i} - 715.5\,\mathbf{j} \quad \text{(N)}.$$

Tercer método El vector $\mathbf{r}_{AB}$ en la figura (b) es

$$\mathbf{r}_{AB} = (x_B - x_A)\,\mathbf{i} + (y_B - y_A)\,\mathbf{j} = (40 - 0)\,\mathbf{i} + (0 - 80)\,\mathbf{j}$$

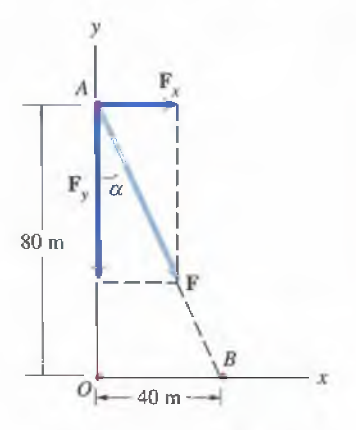
$$= 40\,\mathbf{i} - 80\,\mathbf{j} \quad \text{(m)}.$$

Dividimos ahora este vector entre su magnitud para obtener un vector unitario $\mathbf{e}_{AB}$ que tiene la misma dirección que la fuerza **F** (Fig. c):

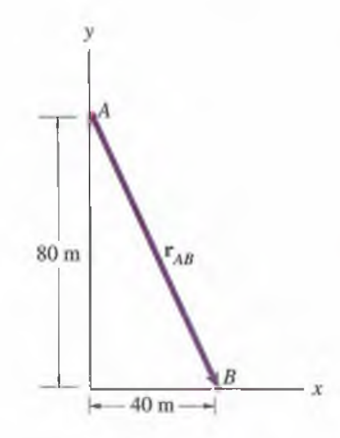
$$\mathbf{e}_{AB} = \frac{\mathbf{r}_{AB}}{|\mathbf{r}_{AB}|} = \frac{40\,\mathbf{i} - 80\,\mathbf{j}}{\sqrt{(40)^2 + (-80)^2}} = 0.447\,\mathbf{i} - 0.894\,\mathbf{j}.$$

La fuerza **F** es igual al producto de su magnitud $|\mathbf{F}|$ y $\mathbf{e}_{AB}$:

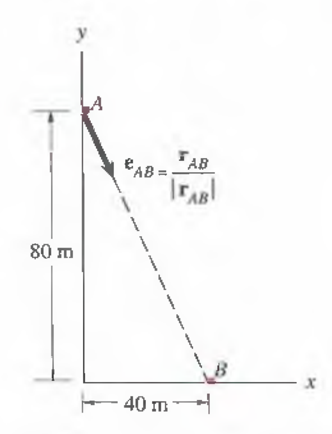
$$\mathbf{F} = |\mathbf{F}|\,\mathbf{e}_{AB} = (800)(0.447\,\mathbf{i} - 0.894\,\mathbf{j}) = 357.8\,\mathbf{i} - 715.5\,\mathbf{j} \quad \text{(N)}.$$



(a) Componentes vectoriales de **F**.



(b) Vector $\mathbf{r}_{AB}$ de A a B.



(c) El vector unitario $\mathbf{e}_{AB}$ señala de A a B.

Ejemplo 2.6



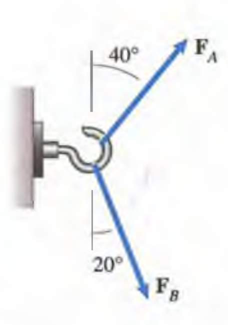


Figura 2.18

Los cables A y B de la figura 2.18 ejercen fuerzas $\mathbf{F}_A$ y $\mathbf{F}_B$ sobre el gancho. La magnitud de $\mathbf{F}_A$ es de 100 lb. La tensión en el cable B se ha ajustado para que la fuerza total $\mathbf{F}_A + \mathbf{F}_B$ sea perpendicular a la pared a la que está unido el gancho.

(a) ¿Cuál es la magnitud de $\mathbf{F}_B$?

(b) ¿Cuál es la magnitud de la fuerza total ejercida por los dos cables sobre el gancho?

ESTRATEGIA

La suma vectorial de las dos fuerzas es perpendicular a la pared, por lo que la suma de las componentes paralelas a la pared es igual a cero. De esta condición podemos obtener una ecuación para la magnitud de $\mathbf{F}_B$.

SOLUCIÓN

(a) En términos del sistema coordenado de la figura (a), las componentes de $\mathbf{F}_A$ y $\mathbf{F}_B$ son

$$\mathbf{F}_A = |\mathbf{F}_A| \text{ sen } 40° \mathbf{i} + |\mathbf{F}_A| \cos 40° \mathbf{j},$$

$$\mathbf{F}_B = |\mathbf{F}_B| \text{ sen } 20° \mathbf{i} + |\mathbf{F}_B| \cos 20° \mathbf{j}.$$

La fuerza total es

$$\mathbf{F}_A + \mathbf{F}_B = (|\mathbf{F}_A| \text{ sen } 40° - |\mathbf{F}_B| \text{ sen } 20°)\mathbf{i}$$

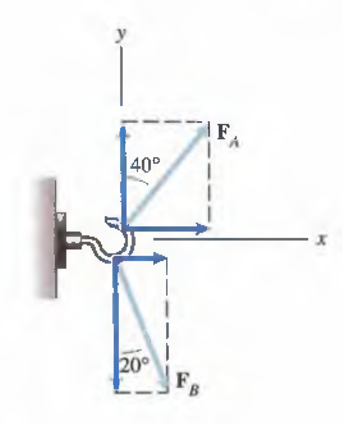
$$+ (|\mathbf{F}_A| \cos 40° - |\mathbf{F}_B| \cos 20°)\mathbf{j}.$$

Igualando a cero la componente de la fuerza total paralela a la pared (la componente y),

$$|\mathbf{F}_A| \cos 40° - |\mathbf{F}_B| \cos 20° = 0,$$

obtenemos una ecuación para la magnitud de $\mathbf{F}_B$:

$$|\mathbf{F}_B| = \frac{|\mathbf{F}_A| \cos 40°}{\cos 20°} = \frac{(100) \cos 40°}{\cos 20°} = 81.5 \text{ lb}.$$



(a) Resolución de $\mathbf{F}_A$ y $\mathbf{F}_B$ en componentes paralelas y perpendiculares a la pared.

(b) Como ahora conocemos la magnitud de $\mathbf{F}_B$, podemos determinar la fuerza total que actúa sobre el gancho:

$$\mathbf{F}_A + \mathbf{F}_B = (|\mathbf{F}_A| \text{ sen } 40^\circ + |\mathbf{F}_B| \text{ sen } 20^\circ)\mathbf{i}$$

$$= [(100) \text{ sen } 40^\circ + (81.5) \text{ sen } 20^\circ]\mathbf{i} = 92.2\mathbf{i} \text{ (lb)}.$$

La magnitud de la fuerza total es de 92.2 lb.

COMENTARIO

La solución de la parte (a) se puede obtener de una manera menos formal. Si la componente de la fuerza total paralela a la pared es nula (véase Fig. (a)), la magnitud de la componente vertical de $\mathbf{F}_A$ debe ser igual a la magnitud de la componente vertical de $\mathbf{F}_B$:

$$|\mathbf{F}_A| \cos 40^\circ = |\mathbf{F}_B| \cos 20^\circ.$$

Por tanto, la magnitud de $\mathbf{F}_B$ es

$$|\mathbf{F}_B| = \frac{|\mathbf{F}_A| \cos 40^\circ}{\cos 20^\circ} = \frac{(100) \cos 40^\circ}{\cos 20^\circ} = 81.5 \text{ lb}.$$

Problemas

2.17 Una fuerza está dada en función de sus componentes escalares por la expresión $\mathbf{F} = 4\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$ (kN). ¿Cuál es su magnitud?

Estrategia: La magnitud de un vector está dada en función de sus componentes por la ecuación (2.8).

2.18 Una fuerza está dada en función de sus componentes escalares por la expresión $\mathbf{F} = F_x\mathbf{i} + F_y\mathbf{j}$. La componente $F_x = 120$ lb. La componente F_y es negativa, y la magnitud de $\mathbf{F}$ es de 150 lb. ¿Qué valor tiene la componente F_y?

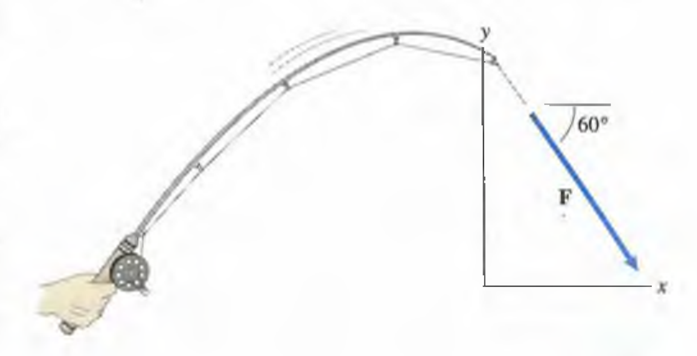
2.19 Un soporte está sometido a una fuerza $\mathbf{F} = F_x\mathbf{i} + 80\mathbf{j}$ (N). Si el soporte resiste con seguridad una fuerza de 100 N, ¿cuál es el intervalo permisible para la componente F_x?

2.20 Si $\mathbf{F}_A = 600\mathbf{i} - 800\mathbf{j}$ (klb) y $\mathbf{F}_B = 200\mathbf{i} - 200\mathbf{j}$ (klb), ¿cuál es la magnitud de la fuerza $\mathbf{F} = \mathbf{F}_A - 2\mathbf{F}_B$?

2.21 Si $\mathbf{F}_A = \mathbf{i} - 4.5\mathbf{j}$ (kN) y $\mathbf{F}_B = -2\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$ (kN), ¿cuál es la magnitud de la fuerza $\mathbf{F} = 6\mathbf{F}_A + 4\mathbf{F}_B$?

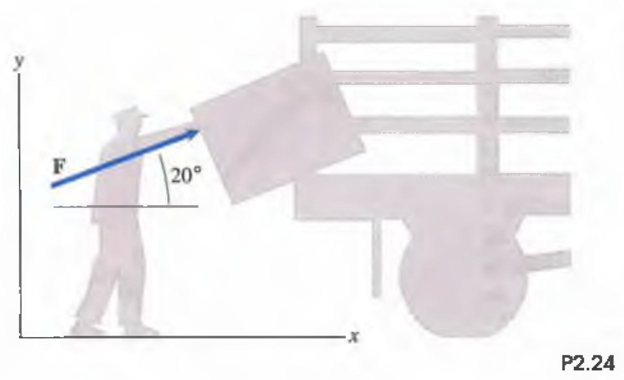
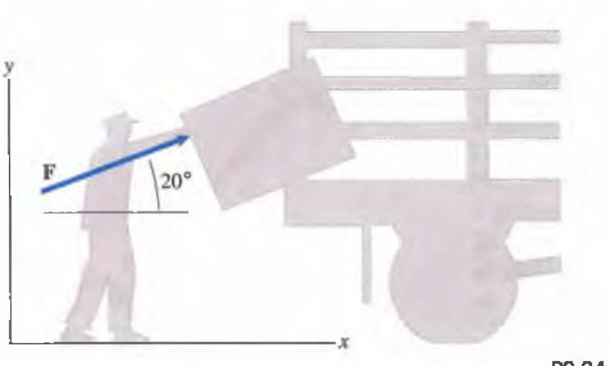
2.22 Dos vectores perpendiculares $\mathbf{U}$ y $\mathbf{V}$ se encuentran en el plano x-y. El vector $\mathbf{U} = 6\mathbf{i} - 8\mathbf{j}$ y $|\mathbf{V}| = 20$. ¿Cuáles son las componentes escalares de $\mathbf{V}$?

2.23 Un pez ejerce una fuerza $\mathbf{F}$ de 200 N sobre la vara de pescar. Exprese $\mathbf{F}$ en términos de componentes escalares.



P2.23

2.24 Se ejerce una fuerza **F** de 60 lb para meter un cajón en un camión. Exprese **F** en función de componentes escalares.

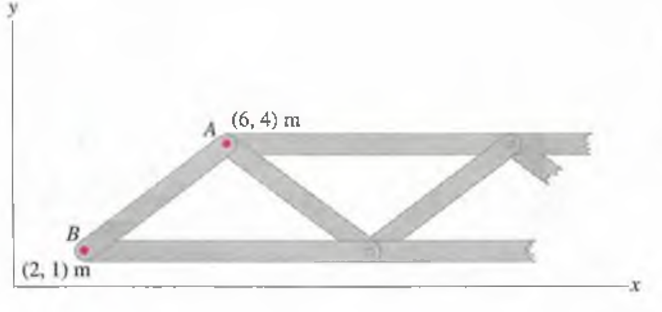



P2.24

2.25 Un motor de cohete ejerce una fuerza **F** de 40 kN. Exprese **F** en función de componentes escalares.

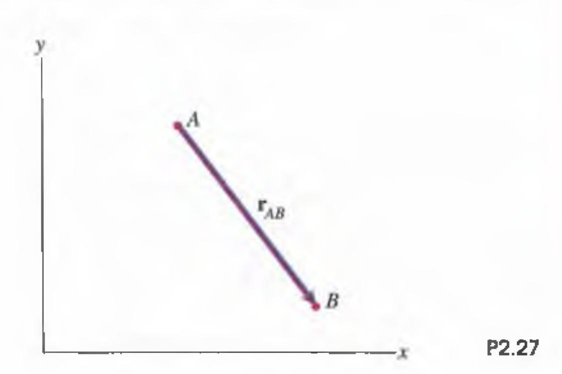
P2.25

2.26 Se muestran las coordenadas de los puntos A y B de una armadura. Exprese el vector de posición de A a B en función de sus componentes escalares.



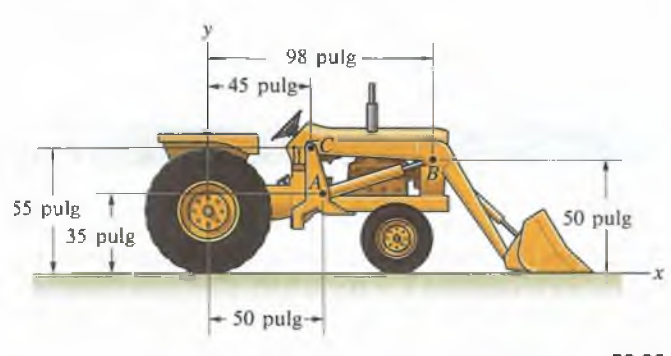
P2.26

2.27 El vector de posición del punto A al punto B de la figura es $\mathbf{r}_{AB} = 12\mathbf{i} - 16\mathbf{j}$ (m).
(a) ¿Cuál es la distancia del punto A al punto B?
(b) ¿Cuál es el vector de posición del punto B al punto A?



P2.27

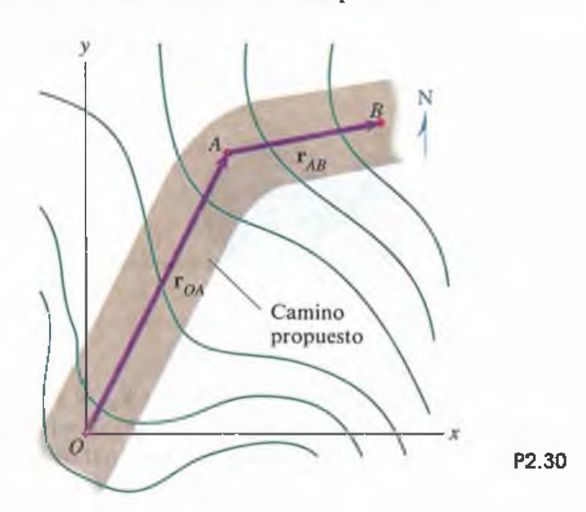
2.28 (a) Exprese el vector de posición del punto A al punto B de la figura en función de componentes escalares.
(b) Exprese el vector de posición del punto B al punto C en función de componentes escalares.
(c) Use los resultados de las partes (a) y (b) para determinar la distancia del punto A al punto C.



P2.28

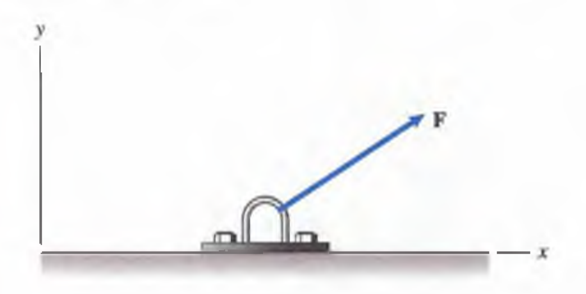
2.29 Considere el tractor cargador del problema 2.28. Para levantar el cucharón, el operador incrementa la longitud del cilindro hidráulico AB. La distancia entre los puntos B y C permanece constante. Si la longitud del cilindro AB es de 65 pulgadas, ¿cuál es el vector de posición que va del punto A al punto B?

2.30 Se mide la posición del punto A y se determina que $\mathbf{r}_{OA} = 400\mathbf{i} + 800\mathbf{j}$ (m). Se quiere determinar la posición de un punto B de manera que $|\mathbf{r}_{AB}| = 400$ m y $|\mathbf{r}_{OA} + \mathbf{r}_{AB}| = 1200$ m. ¿Cuáles son las coordenadas cartesianas del punto B?



P2.30

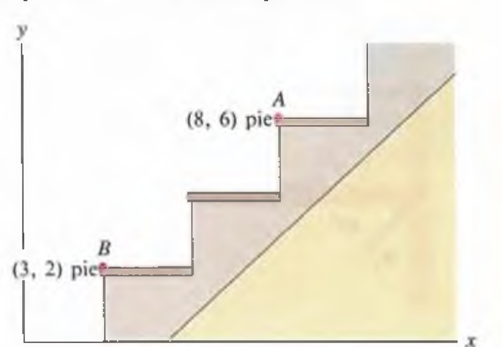
2.31 Se ha diseñado el sostén mostrado para soportar con seguridad una fuerza $\mathbf{F} = F_x\mathbf{i} + F_y\mathbf{j}$ de magnitud 2000 N. Si va a estar sometido a componentes F_x en el intervalo $-1500 \text{ N} \leq F_x \leq 1000$ N, ¿a qué intervalo de valores de F_y puede quedar sometido con seguridad?



P2.31

2.32 Se muestran las coordenadas de dos puntos A y B. Determine un vector unitario $\mathbf{e}$ que señale del A hacia el B.

Estrategia: Determine el vector de posición del punto A al punto B y divídalo entre su magnitud.

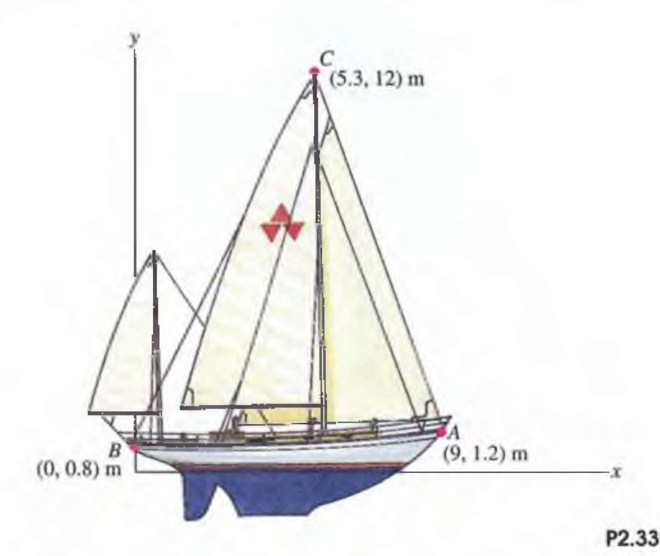


P2.32

2.33 Se muestran las coordenadas x y y de los puntos A, B y C del velero.

(a) Determine un vector unitario paralelo al cable AC que vaya de A a C.

(b) Determine un vector unitario paralelo al cable BC que vaya de B a C.



P2.33

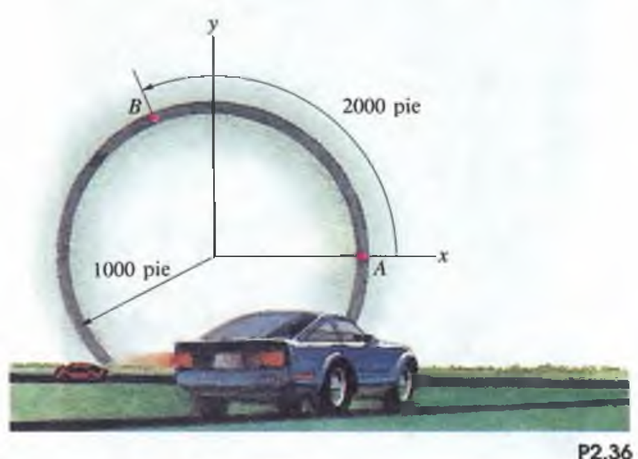
2.34 Considere el vector fuerza $\mathbf{F} = 3\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$ (kN) mostrado. Determine un vector unitario $\mathbf{e}$ que tenga la misma dirección que $\mathbf{F}$.

2.35 El vector de posición que va del punto A al punto B es $\mathbf{r} = -8\mathbf{i} + 6\mathbf{j}$ (pies).

(a) Determine el vector unitario $\mathbf{e}_{AB}$ que apunta de A a B.

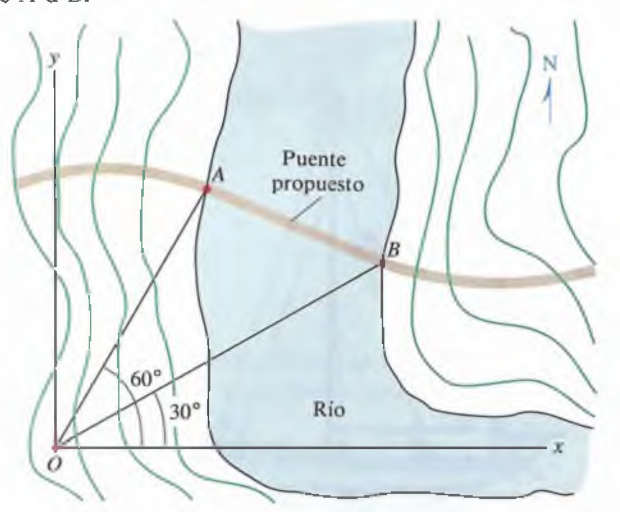
(b) Determine el vector unitario $\mathbf{e}_{BA}$ que apunta de B a A.

2.36 Dos automóviles, A y B, se encuentran en una pista circular de 1000 pies de radio. La distancia entre los dos automóviles, medida a lo largo de la pista, es de 2000 pies. ¿Cuál es el vector de posición que va del automóvil A al automóvil B según el sistema coordenado que se muestra?



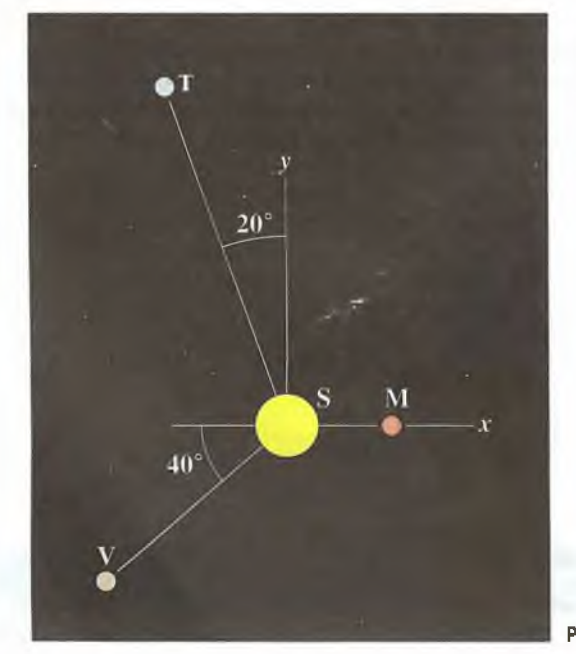
P2.36

2.37 Se encuentra que la longitud de la línea OA es de 1500 metros y que la longitud de la línea OB es de 2000 metros.
(a) Exprese el vector de posición de A a B en función de sus componentes escalares.
(b) Use el resultado de la parte (a) para determinar la distancia de A a B.



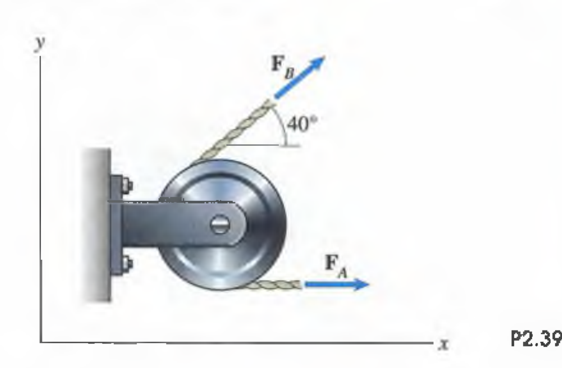
P2.37

2.38 La distancia del Sol (S) a Mercurio (M) es de 57×10^6 km, la distancia del Sol a Venus (V) es de 108×10^6 km y la distancia del Sol a la Tierra (E) es de 150×10^6 km. Suponga que los planetas están localizados en el plano x-y.
(a) Determine las componentes del vector de posición $\mathbf{r}_M$ del Sol a Mercurio, del vector de posición $\mathbf{r}_V$ del Sol a Venus y del vector de posición $\mathbf{r}_E$ del Sol a la Tierra.
(b) Use los resultados de la parte (a) para determinar la distancia de la Tierra a Mercurio y la distancia de la Tierra a Venus.



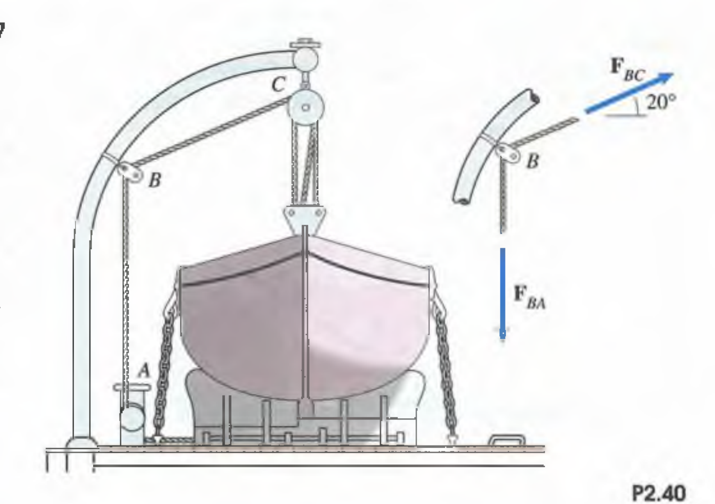
P2.38

2.39 Una cuerda ejerce las fuerzas $\mathbf{F}_A$ y $\mathbf{F}_B$ sobre una polea. Sus magnitudes son $|\mathbf{F}_A| = |\mathbf{F}_B| = 80$ lb. ¿Cuál es la magnitud de la suma vectorial de las fuerzas?



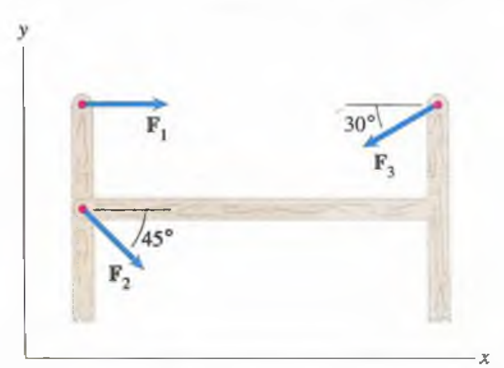
P2.39

2.40 La cuerda ABC ejerce las fuerzas $\mathbf{F}_{BA}$ y $\mathbf{F}_{BC}$ sobre la polea en B mostrada. Sus magnitudes son $|\mathbf{F}_{BA}| = |\mathbf{F}_{BC}| = 800$ N. Determine la magnitud de la suma vectorial de las fuerzas descomponiendo las fuerzas en sus componentes, y compare su respuesta con la del problema 2.12.



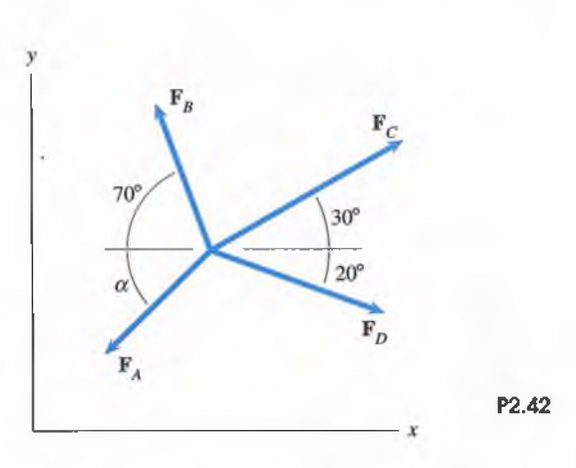
P2.40

2.41 Las magnitudes de las fuerzas mostradas son $|\mathbf{F}_1| = |\mathbf{F}_2| = |\mathbf{F}_3| = 5$ kN. ¿Cuál es la magnitud de la suma vectorial de las tres fuerzas?



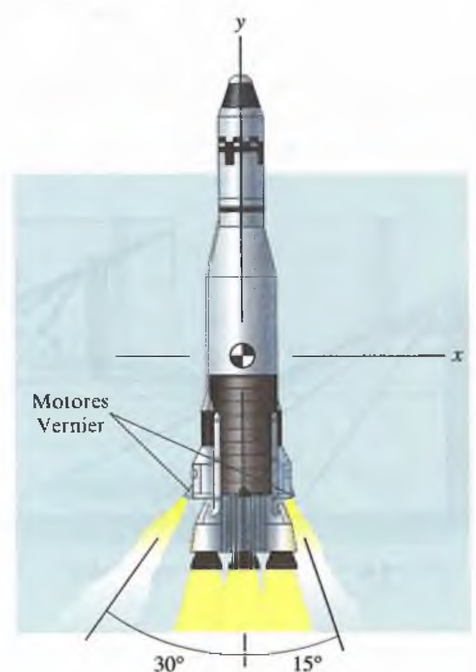
P2.41

2.42 Las cuatro fuerzas concurrentes mostradas tienen una suma vectorial igual a cero. Si $|\mathbf{F}_B| = 800$ lb, $|\mathbf{F}_C| = 1000$ lb y $|\mathbf{F}_D| = 900$ lb, ¿cuál es la magnitud de $\mathbf{F}_A$ y el ángulo α?



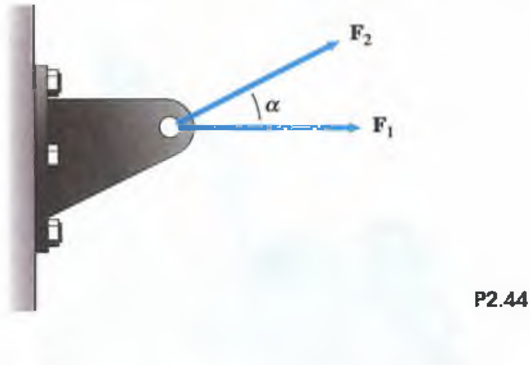
P2.42

2.43 El empuje total ejercido sobre el impulsor por los motores principales de un cohete es de 200 000 lb y es paralelo al eje y. Cada uno de los dos pequeños motores "vernier" ejerce un empuje de 5000 lb en las direcciones mostradas. Determine la magnitud y dirección de la fuerza total ejercida por los motores sobre el impulsor.



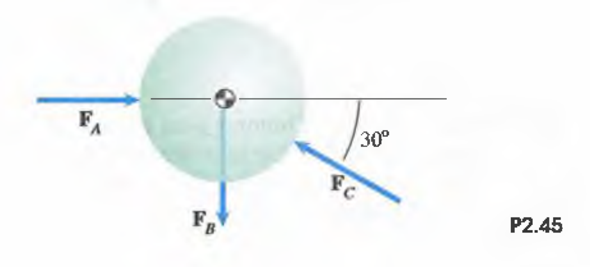
P2.43

2.44 Las magnitudes de las fuerzas que actúan sobre el soporte son $|\mathbf{F}_1| = |\mathbf{F}_2| = 100$ lb. El soporte fallará si la magnitud de la fuerza total que actúa sobre él excede de 150 lb. Determine el intervalo de valores aceptables para el ángulo α.



P2.44

2.45 Tres fuerzas actúan sobre la esfera mostrada. La magnitud de $\mathbf{F}_B$ es de 60 lb. La suma vectorial de las tres fuerzas es igual a cero. ¿Cuáles son las magnitudes de $\mathbf{F}_A$ y $\mathbf{F}_C$?



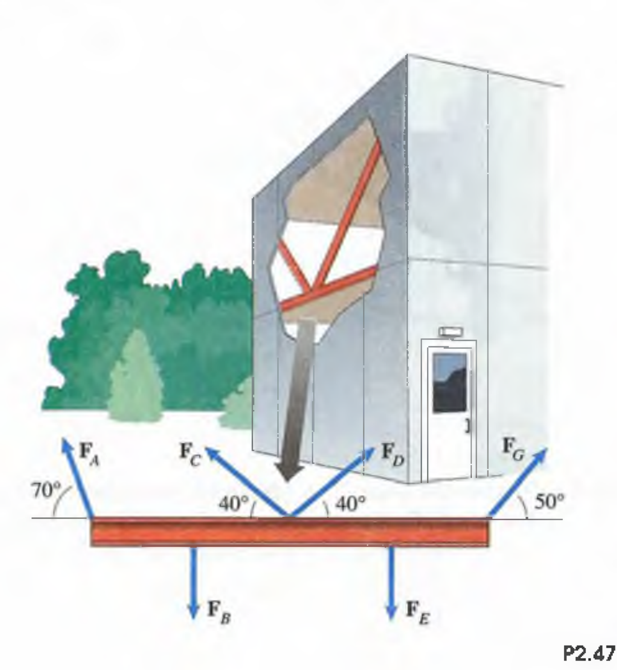
P2.45

2.46 Cuatro fuerzas actúan sobre una viga. La suma vectorial de las fuerzas es igual a cero. $|\mathbf{F}_B| = 10$ kN y $|\mathbf{F}_C| = 5$ kN. Determine las magnitudes de $\mathbf{F}_A$ y $\mathbf{F}_D$.



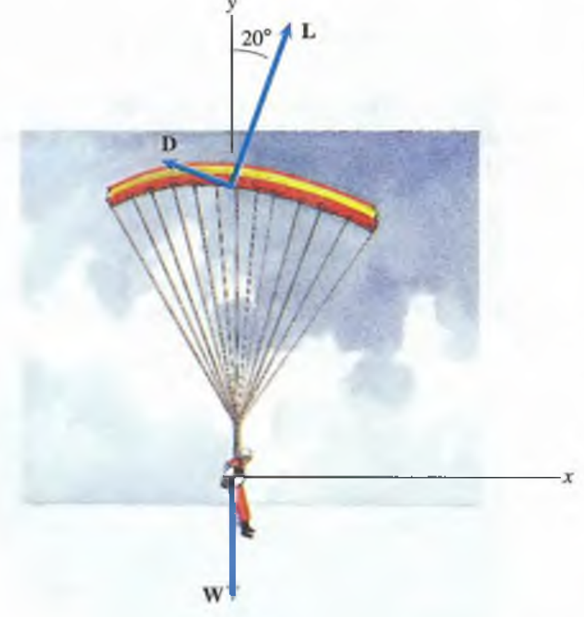
P2.46

2.47 Seis fuerzas actúan sobre una viga que forma parte de la estructura de un edificio. La suma vectorial de las fuerzas es igual a cero. $|\mathbf{F}_B| = |\mathbf{F}_E| = 5$ klb, $|\mathbf{F}_C| = 4$ klb y $|\mathbf{F}_D| = 2$ klb. Determine las magnitudes de $\mathbf{F}_A$ y $\mathbf{F}_G$.

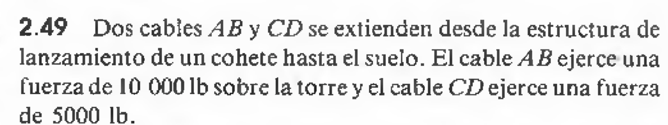


P2.47

2.48 El peso total de un hombre y su paracaídas es $|\mathbf{W}| = 230$ lb. La fuerza $\mathbf{D}$ de arrastre es perpendicular a la fuerza $\mathbf{L}$ de elevación. Si la suma vectorial de las tres fuerzas es igual a cero, ¿cuáles son las magnitudes de $\mathbf{L}$ y $\mathbf{D}$?



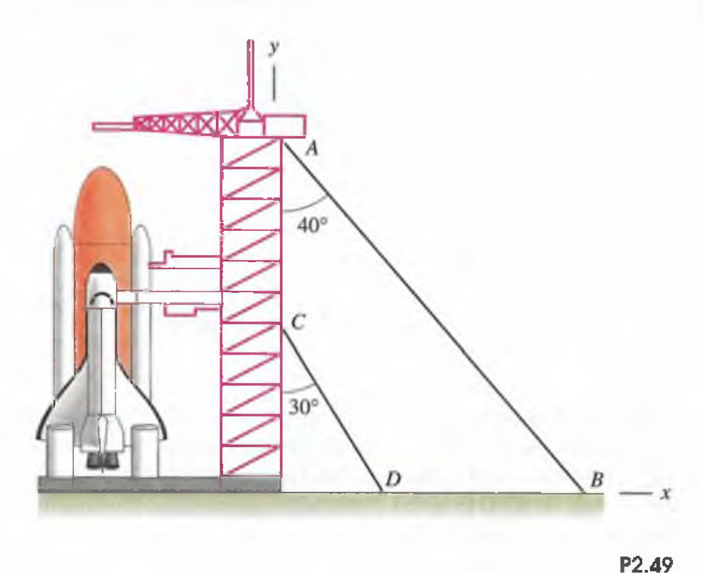
P2.48



2.49 Dos cables AB y CD se extienden desde la estructura de lanzamiento de un cohete hasta el suelo. El cable AB ejerce una fuerza de 10 000 lb sobre la torre y el cable CD ejerce una fuerza de 5000 lb.

(a) Usando el sistema coordenado que se muestra, exprese cada una de las dos fuerzas ejercidas sobre la torre por los cables en función de componentes escalares.

(b) ¿Cuál es la magnitud de la fuerza total ejercida por los dos cables sobre la estructura?



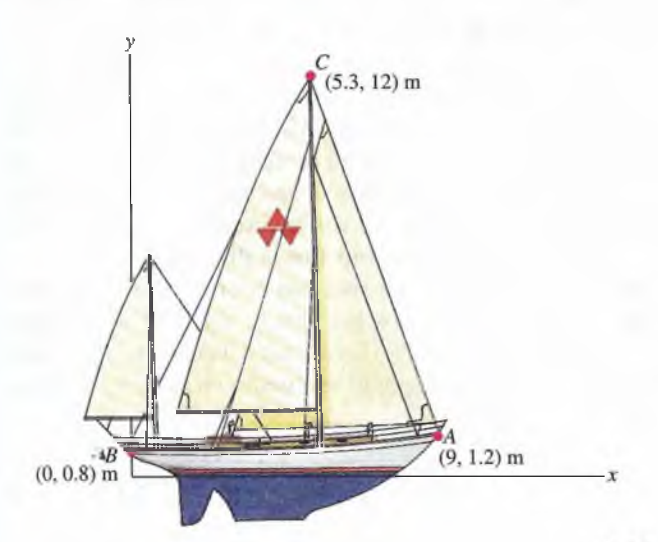
P2.49

2.50 Los cables A, B y C ayudan a soportar una columna de una estructura. Las magnitudes de las fuerzas ejercidas por los cables son iguales: $|\mathbf{F}_A| = |\mathbf{F}_B| = |\mathbf{F}_C|$. La magnitud de la suma vectorial de las tres fuerzas es de 200 kN. ¿Qué valor tiene $|\mathbf{F}_A|$?

6 m; A; B; C; 4 m; 4 m; 4 m; $\mathbf{F}_C$; $\mathbf{F}_B$; $\mathbf{F}_A$

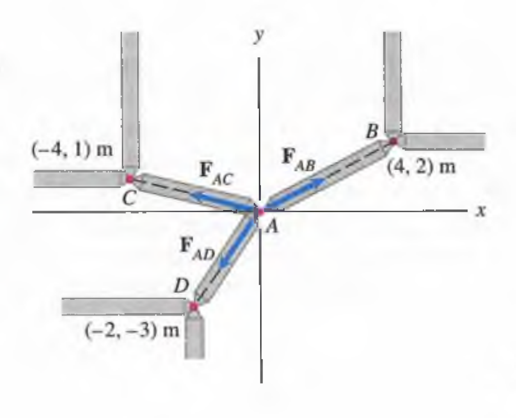
P2.50

2.51 La tensión en el cable AC del velero mostrado es de 300 lb. La suma vectorial de las fuerzas ejercidas sobre la parte superior del mástil C por el cable AC y el cable BC del velero está dirigida hacia abajo.
(a) ¿Cuál es la tensión en el cable BC?
(b) ¿Cuál es la fuerza vertical total que los dos cables ejercen sobre el mástil?



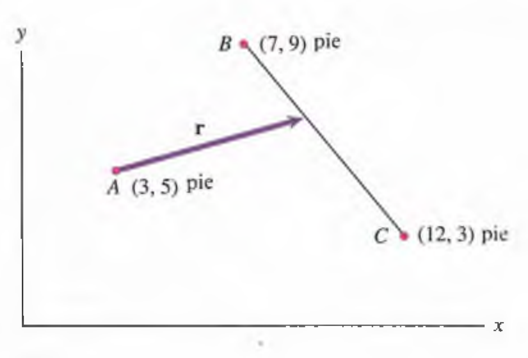
P2.51

2.52 La estructura mostrada forma parte de una armadura que soporta el techo de un edificio. Los miembros AB, AC y AD ejercen fuerzas $\mathbf{F}_{AB}$, $\mathbf{F}_{AC}$ y $\mathbf{F}_{AD}$ sobre la junta A. $|\mathbf{F}_{AB}| = 4$ kN. Si la suma vectorial de las tres fuerzas es igual a cero, ¿cuáles son las magnitudes de $\mathbf{F}_{AC}$ y $\mathbf{F}_{AD}$?



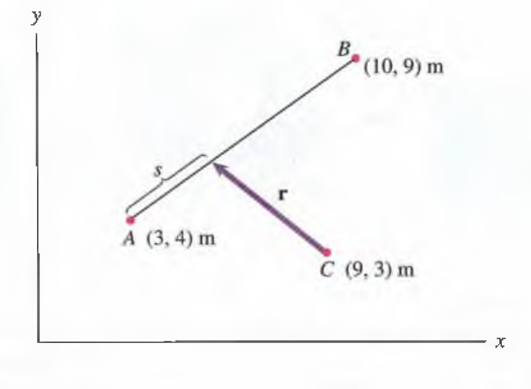
P2.52

2.53 El vector de posición $\mathbf{r}$ va del punto A mostrado a un punto sobre la línea recta entre B y C. Su magnitud es $|\mathbf{r}| = 6$ pies. Exprese $\mathbf{r}$ en términos de sus componentes escalares.



P2.53

2.54 Sea $\mathbf{r}$ el vector de posición que va del punto C de la figura al punto situado a una distancia de s metros del punto A sobre la línea recta que conecta A con B. Exprese $\mathbf{r}$ en términos de componentes escalares. (Su solución estará en función de s.)



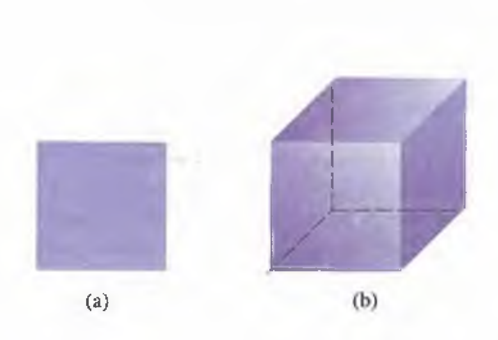
P2.54

2.4 Componentes en tres dimensiones

En ingeniería muchas aplicaciones requieren la descomposición de vectores en sus componentes en un sistema coordenado tridimensional. Aquí explicaremos cómo hacerlo y cómo operar con vectores en tres dimensiones.

Repasemos primero cómo se dibujan cuerpos en tres dimensiones. Consideremos un cuerpo tridimensional, por ejemplo un cubo. Dibujemos el cubo como se ve cuando la visual es perpendicular a una de sus caras (Fig. 2.19a). En esta vista el cubo parece un cuerpo bidimensional; no se percibe la dimensión perpendicular a la página. Para remediar esto, podemos dibujar el cubo como se ve si nos movemos hacia arriba y a la derecha (Fig. 2.19b). En esta vista **oblicua** ya se puede ver la tercera dimensión. Los bordes ocultos del cubo se muestran como líneas discontinuas.

Con este método podemos dibujar los sistemas coordenados tridimensionales. En la figura 2.19(c) alineamos los ejes x, y y z de un sistema coordenado cartesiano tridimensional con las aristas del cubo. La representación tridimensional del sistema coordenado se muestra en la figura 2.19(d).



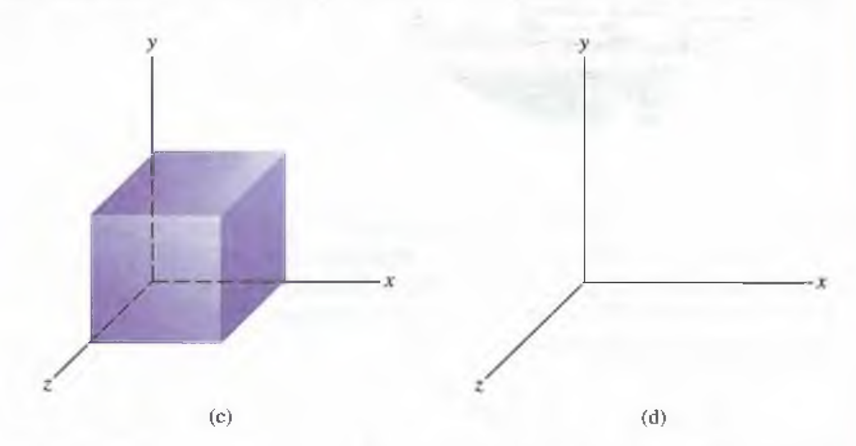


Figura 2.19
(a) Cubo visto con la visual perpendicular a una cara.
(b) Vista oblicua del cubo.
(c) Sistema coordenado cartesiano alineado con los bordes del cubo.
(d) Representación tridimensional del sistema coordenado.

El sistema coordenado de la figura 2.19(d) es **derecho**. Si se dirigen los dedos de la mano derecha en la dirección positiva del eje x y se flexionan (para formar un puño) hacia el eje y positivo, el pulgar apuntará en la dirección positiva del eje z (Fig. 2.20). Cuando la dirección positiva del eje z apunta en la dirección opuesta, el sistema coordenado será izquierdo. Para algunos propósitos no importa qué sistema coordenado se emplee. Sin embargo, algunas ecuaciones que obtendremos no dan resultados correctos con un sistema coordenado izquierdo. Por ello usaremos sólo sistemas coordenados derechos.



Figura 2.20
Identificación de un sistema coordenado derecho.

Podemos separar un vector **U** en componentes vectoriales $\mathbf{U}_x$, $\mathbf{U}_y$ y $\mathbf{U}_z$ paralelas a los ejes x, y y z (Fig. 2.21):

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}_x + \mathbf{U}_y + \mathbf{U}_z. \tag{2.11}$$

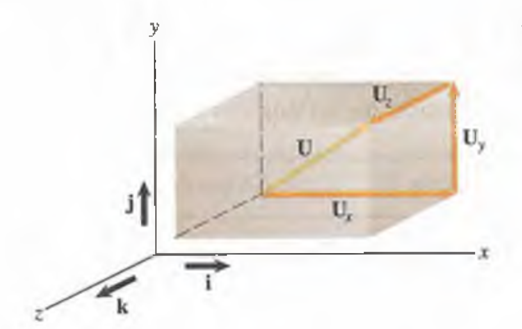


Figura 2.21
Un vector **U** y sus componentes vectoriales.

(Hemos dibujado un paralelepípedo alrededor del vector como ayuda para visualizar las direcciones de las componentes vectoriales.) Si hacemos que los vectores unitarios **i**, **j** y **k** apunten hacia las direcciones positivas x, y y z, podemos expresar **U** en función de componentes escalares de la siguiente manera:

$$\boxed{\mathbf{U} = U_x\,\mathbf{i} + U_y\,\mathbf{j} + U_z\,\mathbf{k}.} \tag{2.12}$$

Los escalares U_x, U_y y U_z se denominarán componentes x, y y z de **U**.

Magnitud de un vector en función de sus componentes

Consideremos un vector **U** y sus componentes vectoriales (Fig. 2.22a). En el triángulo rectángulo formado por los vectores $\mathbf{U}_y$, $\mathbf{U}_z$ y su suma $\mathbf{U}_y + \mathbf{U}_z$ (Fig. 2.22b), podemos ver que

$$|\mathbf{U}_y + \mathbf{U}_z|^2 = |\mathbf{U}_y|^2 + |\mathbf{U}_z|^2. \tag{2.13}$$

El vector **U** es la suma de los vectores $\mathbf{U}_x$ y $\mathbf{U}_y + \mathbf{U}_z$. Estos tres vectores forman un triángulo rectángulo (Fig. 2.22c), del cual obtenemos

$$|\mathbf{U}|^2 = |\mathbf{U}_x|^2 + |\mathbf{U}_y + \mathbf{U}_z|^2.$$

Sustituyendo la ecuación (2.13) en este resultado se obtiene la ecuación

$$|\mathbf{U}|^2 = |\mathbf{U}_x|^2 + |\mathbf{U}_y|^2 + |\mathbf{U}_z|^2 = U_x^2 + U_y^2 + U_z^2.$$

Así, la magnitud de un vector **U** está dada, en función de sus componentes en tres dimensiones, por la expresión

$$\boxed{|\mathbf{U}| = \sqrt{U_x^2 + U_y^2 + U_z^2}.} \tag{2.14}$$

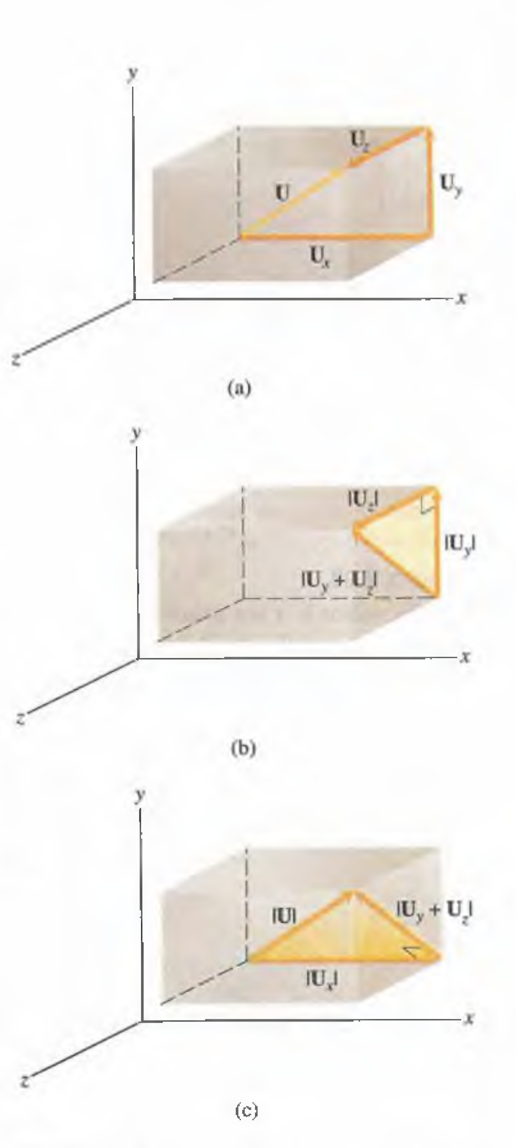
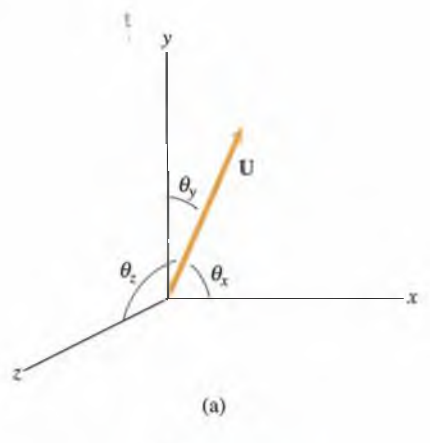


Figura 2.22
(a) Vector **U** y sus componentes vectoriales.
(b) Triángulo rectángulo formado por los vectores $\mathbf{U}_y$, $\mathbf{U}_z$ y $\mathbf{U}_y + \mathbf{U}_z$.
(c) Triángulo rectángulo formado por los vectores $\mathbf{U}$, $\mathbf{U}_x$ y $\mathbf{U}_y + \mathbf{U}_z$.



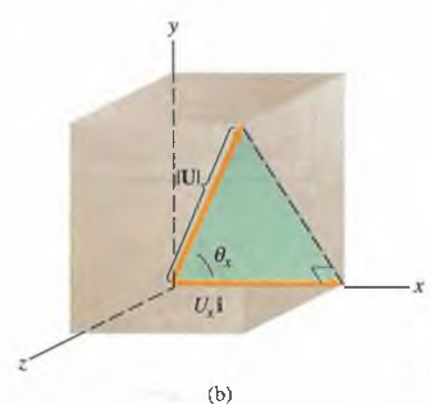
Cosenos directores

Describimos antes la dirección de un vector respecto a un sistema coordenado cartesiano bidimensional especificando el ángulo entre el vector y uno de los ejes coordenados. Una manera de describir la dirección de un vector en tres dimensiones es especificar los ángulos θ_x, θ_y y θ_z entre el vector y los ejes coordenados positivos (Fig. 2.23a).

En las figuras 2.23(b)-(d) demostramos que las componentes del vector **U** están dadas, en función de los ángulos θ_x, θ_y y θ_z, por

$$U_x = |\mathbf{U}|\cos\theta_x, \quad U_y = |\mathbf{U}|\cos\theta_y, \quad U_z = |\mathbf{U}|\cos\theta_z. \tag{2.15}$$

Las cantidades $\cos\theta_x$, $\cos\theta_y$ y $\cos\theta_z$ se llaman **cosenos directores** de **U**.



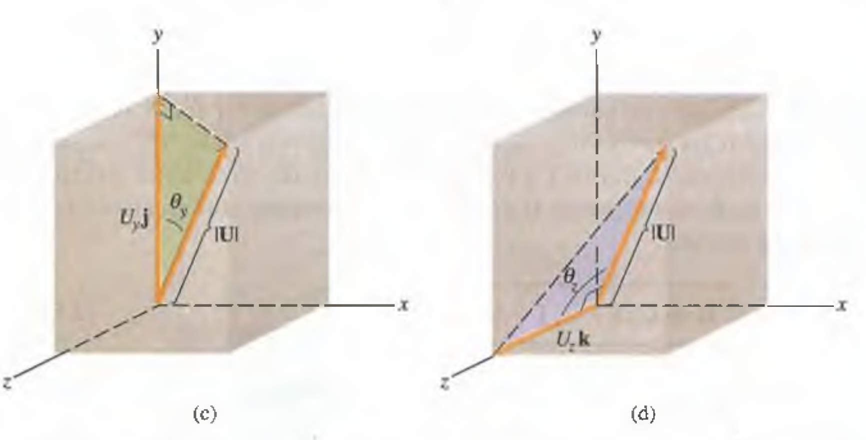


Figura 2.23

(a) Un vector **U** y los ángulos θ_x, θ_y y θ_z.
(b)–(d) Los ángulos θ_x, θ_y y θ_z y los componentes vectoriales de **U**.

Los cosenos directores de un vector no son independientes. Si sustituimos las ecuaciones (2.15) en la ecuación (2.14), encontramos que los cosenos directores satisfacen la relación

$$\cos^2\theta_x + \cos^2\theta_y + \cos^2\theta_z = 1. \tag{2.16}$$

Supongamos que **e** es un vector unitario con la misma dirección de **U**:

$$\mathbf{U} = |\mathbf{U}|\,\mathbf{e}.$$

En función de las componentes, esta ecuación es

$$U_x\,\mathbf{i} + U_y\,\mathbf{j} + U_z\,\mathbf{k} = |\mathbf{U}|(e_x\,\mathbf{i} + e_y\,\mathbf{j} + e_z\,\mathbf{k}).$$

Entonces, las relaciones entre las componentes de **U** y **e** son

$$U_x = |\mathbf{U}|e_x, \quad U_y = |\mathbf{U}|e_y, \quad U_z = |\mathbf{U}|e_z.$$

Comparando estas ecuaciones con las ecuaciones (2.15) vemos que

$$\cos\theta_x = e_x, \quad \cos\theta_y = e_y, \quad \cos\theta_z = e_z.$$

Los cosenos directores de cualquier vector U son las componentes de un vector unitario que tiene la misma dirección que U.

Vectores de posición en función de sus componentes

Generalicemos el caso bidimensional: hay un punto A con coordenadas (x_A, y_A, z_A) y un punto B con coordenadas (x_B, y_B, z_B). El vector de posición $\mathbf{r}_{AB}$ que va de A a B (Fig. 2.24a) está dado en función de las coordenadas de A y B por

$$\mathbf{r}_{AB} = (x_B - x_A)\,\mathbf{i} + (y_B - y_A)\,\mathbf{j} + (z_B - z_A)\,\mathbf{k}. \qquad (2.17)$$

Las componentes se obtienen restando las coordenadas del punto A de las coordenadas del punto B.

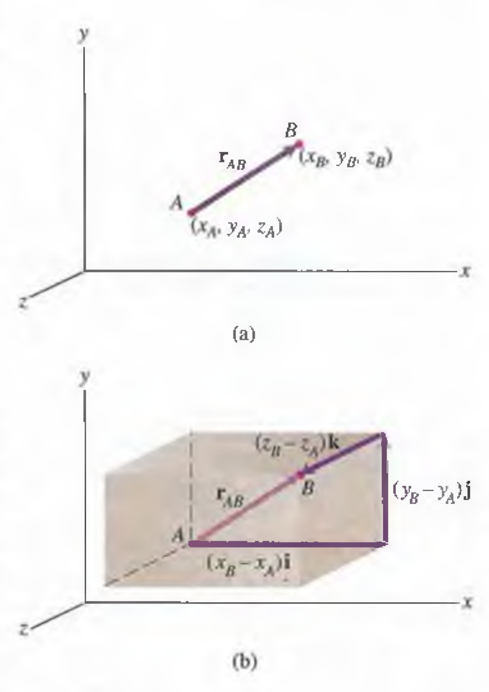


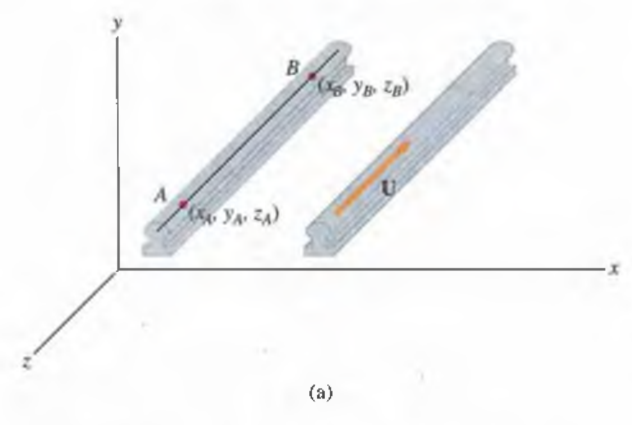
Figura 2.24
(a) Vector de posición del punto A al punto B.
(b) Las componentes de $\mathbf{r}_{AB}$ se pueden determinar a partir de las coordenadas de los puntos A y B.

Componentes de un vector paralelo a una línea dada

En aplicaciones tridimensionales, la dirección de un vector suele definirse especificando las coordenadas de dos puntos sobre una línea paralela al vector. Con esta información se puede determinar las componentes del vector.

Con las coordenadas de dos puntos A y B sobre una línea paralela al vector $\mathbf{U}$ (Fig. 2.25a), y con la ecuación (2.17), se determina el vector de posición $\mathbf{r}_{AB}$ que va de A a B (Fig. 2.25b). Dividimos $\mathbf{r}_{AB}$ entre su magnitud para obtener un vector unitario $\mathbf{e}_{AB}$ que apunta de A a B (Fig. 2.25c). Como $\mathbf{e}_{AB}$ tiene la misma dirección que $\mathbf{U}$, se determina $\mathbf{U}$ en función de sus componentes escalares expresado como el producto de su magnitud y $\mathbf{e}_{AB}$.

En forma más general, si se conoce la magnitud de un vector $\mathbf{U}$ y las componentes de cualquier vector $\mathbf{V}$ que tiene la misma dirección que $\mathbf{U}$, entonces $\mathbf{V}/|\mathbf{V}|$ es un vector unitario con la misma dirección que $\mathbf{U}$, y las componentes de $\mathbf{U}$ se determinan con la expresión $\mathbf{U} = |\mathbf{U}|(\mathbf{V}/|\mathbf{V}|)$.



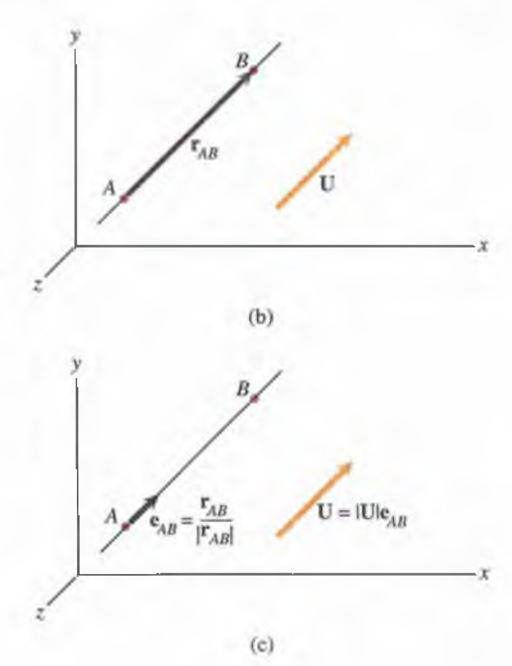


Figura 2.25
(a) Dos puntos A y B sobre una línea paralela de $\mathbf{U}$.
(b) Vector de posición de A a B.
(c) Vector unitario $\mathbf{e}_{AB}$ que señala de A a B.

En los siguientes ejemplos llevaremos a cabo operaciones vectoriales en términos de componentes en tres dimensiones. El primer ejemplo muestra que las operaciones vectoriales no son más difíciles en tres dimensiones que en dos cuando se conocen las componentes de los vectores. Sin embargo, especificar las direcciones de los vectores y determinar sus componentes es un poco más complicado en tres dimensiones. Presentaremos ejemplos que ilustran el uso de los cosenos directores y otros métodos para especificar las direcciones de vectores en tres dimensiones.

Ejemplo 2.7

Consideremos dos vectores, $\mathbf{U} = 3\mathbf{i} - 4\mathbf{j} - 12\mathbf{k}$ y $\mathbf{V} = -\mathbf{i} + 7\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$.
(a) ¿Cuál es la magnitud de **U**?
(b) Determine los ángulos θ_x, θ_y y θ_z entre **U** y los ejes coordenados positivos.
(c) ¿Cuál es la magnitud del vector $\mathbf{R} = 2\mathbf{U} + 3\mathbf{V}$?

ESTRATEGIA

(a) Como conocemos las componentes de **U**, podemos usar la ecuación (2.14) para determinar su magnitud.
(b) Los ángulos θ_x, θ_y y θ_z están dados por las relaciones (2.15).
(c) Podemos usar la ecuación dada para determinar las componentes de **R** y la ecuación (2.14) para determinar su magnitud.

SOLUCIÓN

(a) La magnitud de **U** es

$$|\mathbf{U}| = \sqrt{U_x^2 + U_y^2 + U_z^2} = \sqrt{(3)^2 + (-4)^2 + (-12)^2} = 13.$$

(b) Los cosenos directores de **U** son

$$\cos\theta_x = \frac{U_x}{|\mathbf{U}|} = \frac{3}{13},$$

$$\cos\theta_y = \frac{U_y}{|\mathbf{U}|} = \frac{-4}{13},$$

$$\cos\theta_z = \frac{U_z}{|\mathbf{U}|} = \frac{-12}{13}.$$

De estas ecuaciones encontramos que los ángulos entre **U** y los ejes coordenados positivos son $\theta_x = 76.7°$, $\theta_y = 107.9°$ y $\theta_z = 157.4°$.
(c) El vector **R** es

$$\mathbf{R} = 2\mathbf{U} + 3\mathbf{V} = 2(3\mathbf{i} - 4\mathbf{j} - 12\mathbf{k}) + 3(-\mathbf{i} + 7\mathbf{j} + 6\mathbf{k})$$

$$= 3\mathbf{i} + 13\mathbf{j} - 6\mathbf{k}.$$

Su magnitud es

$$|\mathbf{R}| = \sqrt{(3)^2 + (13)^2 + (-6)^2} = 14.6.$$

Ejemplo 2.8

La grúa de la figura 2.26 ejerce una fuerza **F** de 600 lb sobre el cajón neumático. El ángulo entre **F** y el eje x es de 54° y el ángulo entre **F** y el eje y es de 40°. La componente z de **F** es positiva. Exprese **F** en función de sus componentes escalares.



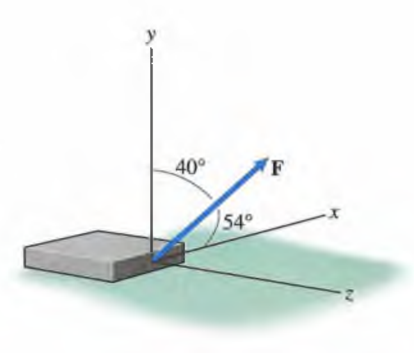


Figura 2.26
Una grúa ejerce una fuerza sobre un cajón neumático.

ESTRATEGIA

Sólo se dan dos de los ángulos entre el vector y los ejes coordenados positivos, pero podemos usar la ecuación (2.16) para determinar el tercer ángulo. Luego podemos determinar las componentes de **F** usando las ecuaciones (2.15).

SOLUCIÓN

Los ángulos entre **F** y los ejes coordenados positivos están relacionados por

$$\cos^2\theta_x + \cos^2\theta_y + \cos^2\theta_z = (\cos 54^\circ)^2 + (\cos 40^\circ)^2 + \cos^2\theta_z = 1.$$

Al resolver esta ecuación para $\cos\theta_z$ obtenemos las dos soluciones, $\cos\theta_z = 0.260$ y $\cos\theta_z = -0.260$, que implican $\theta_z = 74.9^\circ$ o $\theta_z = 105.1^\circ$. La componente z del vector **F** es positiva, por lo que el ángulo entre **F** y el eje z positivo es menor que 90°. Por tanto, $\theta_z = 74.9^\circ$.

Las componentes de **F** son

$$F_x = |\mathbf{F}|\cos\theta_x = (600)\cos 54^\circ \quad = 353 \text{ lb},$$

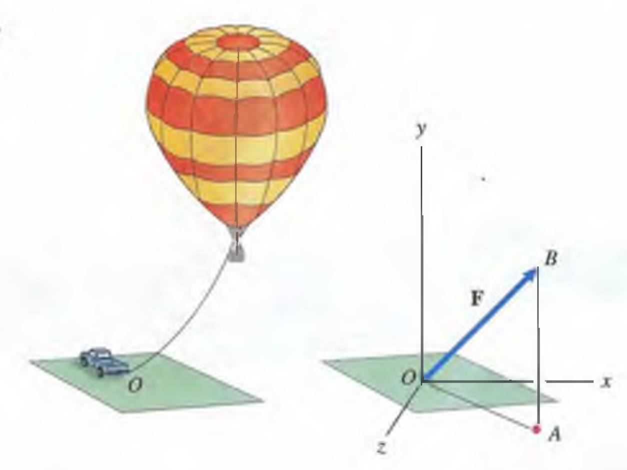
$$F_y = |\mathbf{F}|\cos\theta_y = (600)\cos 40^\circ \quad = 460 \text{ lb},$$

$$F_z = |\mathbf{F}|\cos\theta_z = (600)\cos 74.9^\circ = 156 \text{ lb}.$$

Ejemplo 2.9

El cable del globo de la figura 2.27 ejerce una fuerza **F** de 800 N sobre el gancho en O. La línea vertical AB interseca el plano x-z en el punto A. El ángulo entre el eje z y la línea OA es de 60° y el ángulo entre la línea OA y **F** es de 45°. Exprese **F** en función de sus componentes escalares.

Figura 2.27



ESTRATEGIA

Podemos determinar las componentes de **F** en dos etapas usando la información geométrica dada. Primero separamos **F** en dos componentes vectoriales paralelas a las líneas OA y AB. La componente paralela a AB es la componente vectorial $\mathbf{F}_y$. Luego podemos descomponer la componente paralela a OA para determinar las componentes vectoriales $\mathbf{F}_x$ y $\mathbf{F}_z$.

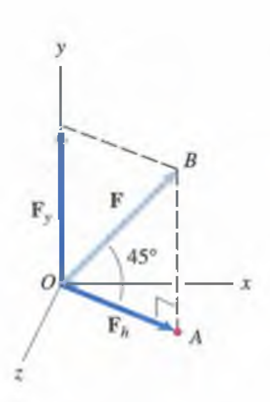
SOLUCIÓN

En la figura (a) descomponemos **F** en su componente $\mathbf{F}_y$ y en su componente $\mathbf{F}_h$ paralela a OA. La magnitud de $\mathbf{F}_y$ es

$$|\mathbf{F}_y| = |\mathbf{F}| \operatorname{sen}45° = (800) \operatorname{sen}45° = 565.7 \text{ N},$$

y la magnitud de $\mathbf{F}_h$ es

$$|\mathbf{F}_h| = |\mathbf{F}| \cos45° = (800) \cos45° = 565.7 \text{ N}.$$



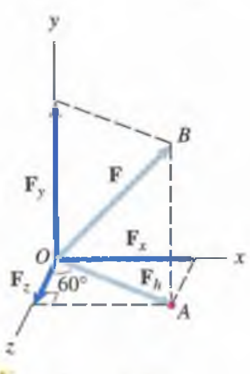
(a) Descomposición de **F** en componentes vectoriales paralelas a OA y OB.

En la figura (b) descomponemos $\mathbf{F}_h$ en las componentes vectoriales $\mathbf{F}_x$ y $\mathbf{F}_z$. La magnitud de $\mathbf{F}_x$ es

$$|\mathbf{F}_x| = |\mathbf{F}_h| \operatorname{sen}60° = (565.7) \operatorname{sen}60° = 489.9 \text{ N},$$

y la magnitud de $\mathbf{F}_z$ es

$$|\mathbf{F}_z| = |\mathbf{F}_h| \cos60° = (565.7) \cos60° = 282.8 \text{ N}.$$



(b) Descomposición de $\mathbf{F}_h$ en componentes vectoriales paralelas a los ejes.

Las componentes vectoriales $\mathbf{F}_x$, $\mathbf{F}_y$ y $\mathbf{F}_z$ apuntan en las direcciones positivas de los ejes, por lo que las componentes escalares de **F** son positivas:

$$\mathbf{F} = 489.9\mathbf{i} + 565.7\mathbf{j} + 282.8\mathbf{k} \text{ (N)}.$$

Ejemplo 2.10

La barra AB ejerce una fuerza **F** de 140 N sobre A. La fuerza es paralela a la barra y se dirige a B. Exprese **F** en función de sus componentes escalares.

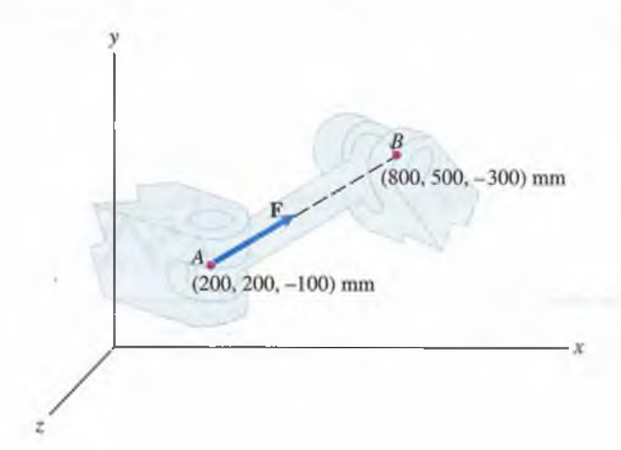


Figura 2.28

ESTRATEGIA

Como se dan las coordenadas de los puntos A y B, podemos determinar las coordenadas del vector de posición de A a B. Dividiendo el vector de posición por su magnitud, obtenemos un vector unitario con la misma dirección que **F**. Luego, multiplicando el vector unitario por la magnitud de **F**, obtenemos **F** en función de sus componentes.

SOLUCIÓN

El vector de posición que va de A a B (Fig. a) es

$$\mathbf{r}_{AB} = (x_B - x_A)\,\mathbf{i} + (y_B - y_A)\,\mathbf{j} + (z_B - z_A)\,\mathbf{k}$$

$$= [(800) - (200)]\,\mathbf{i} + [(500) - (200)]\,\mathbf{j} + [(-300) - (-100)]\,\mathbf{k}$$

$$= 600\,\mathbf{i} + 300\,\mathbf{j} - 200\,\mathbf{k}\ \text{mm},$$

y su magnitud es

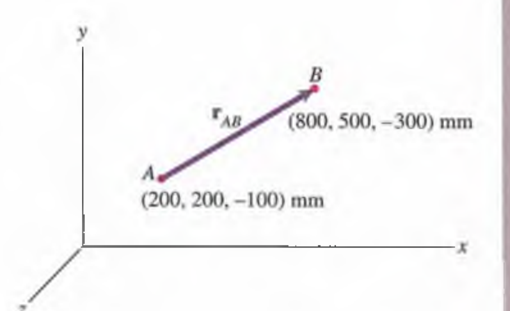
$$|\mathbf{r}_{AB}| = \sqrt{(600)^2 + (300)^2 + (-200)^2} = 700\ \text{mm}.$$

Dividiendo $\mathbf{r}_{AB}$ por su magnitud, obtenemos un vector unitario con la misma dirección que **F** (Fig. b),

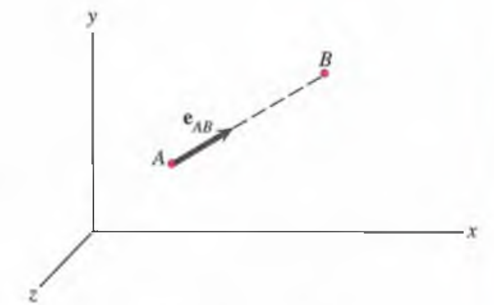
$$\mathbf{e}_{AB} = \frac{\mathbf{r}_{AB}}{|\mathbf{r}_{AB}|} = \frac{6}{7}\,\mathbf{i} + \frac{3}{7}\,\mathbf{j} - \frac{2}{7}\,\mathbf{k}.$$

Entonces, en términos de sus componentes escalares, **F** es

$$\mathbf{F} = |\mathbf{F}|\,\mathbf{e}_{AB} = (140)\left(\frac{6}{7}\,\mathbf{i} + \frac{3}{7}\,\mathbf{j} - \frac{2}{7}\,\mathbf{k}\right) = 120\,\mathbf{i} + 60\,\mathbf{j} - 40\,\mathbf{k}\ \text{(N)}.$$



(a) Vector de posición $\mathbf{r}_{AB}$.

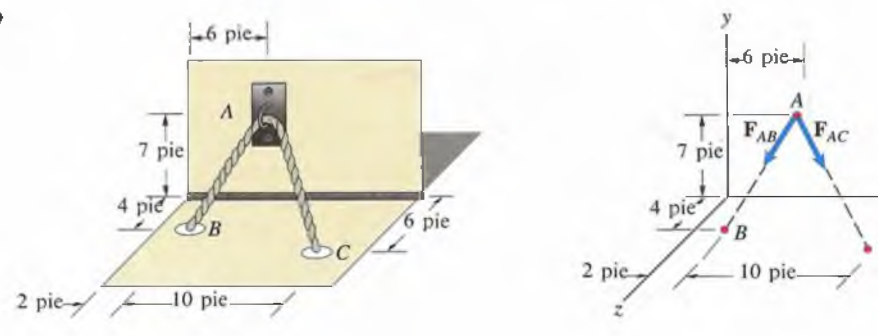


(b) Vector unitario $\mathbf{e}_{AB}$ que apunta de A a B.

Ejemplo 2.11

Una cuerda se extiende del punto B al punto C pasando por una argolla unida a la pared en el punto A. La cuerda ejerce fuerzas $\mathbf{F}_{AB}$ y $\mathbf{F}_{AC}$ sobre la argolla cuyas magnitudes son $|\mathbf{F}_{AB}| = |\mathbf{F}_{AC}| = 200$ lb. ¿Cuál es la magnitud de la fuerza total $\mathbf{F} = \mathbf{F}_{AB} + \mathbf{F}_{AC}$ ejercida por el cable sobre la argolla?

Figura 2.29



ESTRATEGIA

La fuerza $\mathbf{F}_{AB}$ es paralela a la línea AB y la fuerza $\mathbf{F}_{AC}$ es paralela a la línea AC. Como podemos determinar las coordenadas de los puntos A, B y C de las dimensiones dadas, también podemos determinar las componentes de los vectores unitarios que tienen las mismas direcciones que las dos fuerzas y usarlos para expresar las fuerzas en función de componentes escalares.

SOLUCIÓN

Sean $\mathbf{r}_{AB}$ el vector de posición de A a B y $\mathbf{r}_{BC}$ el vector de posición de A a C (Fig. a). De las dimensiones dadas, las coordenadas de los puntos A, B y C son

$$A: (6, 7, 0) \text{ pies}, \quad B: (2, 0, 4) \text{ pies}, \quad C: (12, 0, 6) \text{ pies}.$$

Por consiguiente, las componentes de $\mathbf{r}_{AB}$ y $\mathbf{r}_{AC}$ son

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_{AB} &= (x_B - x_A)\,\mathbf{i} + (y_B - y_A)\,\mathbf{j} + (z_B - z_A)\,\mathbf{k} \\ &= (2-6)\,\mathbf{i} + (0-7)\,\mathbf{j} + (4-0)\,\mathbf{k} \\ &= -4\,\mathbf{i} - 7\,\mathbf{j} + 4\,\mathbf{k}\ \text{(pies)}\end{aligned}$$

y

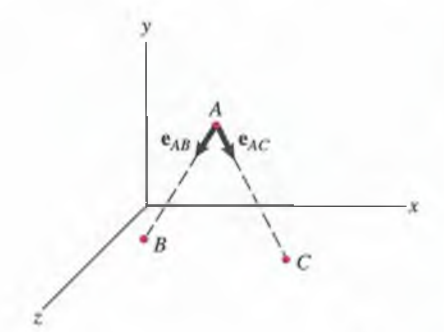
$$\begin{aligned}\mathbf{r}_{AC} &= (x_C - x_A)\mathbf{i} + (y_C - y_A)\mathbf{j} + (z_C - z_A)\mathbf{k} \\ &= (12-6)\mathbf{i} + (0-7)\mathbf{j} + (6-0)\mathbf{k} \\ &= 6\mathbf{i} - 7\mathbf{j} + 6\mathbf{k}\ \text{(pies)}.\end{aligned}$$

(a) Vectores de posición $\mathbf{r}_{AB}$ y $\mathbf{r}_{AC}$.

Sus magnitudes son $|\mathbf{r}_{AB}| = 9$ pies y $|\mathbf{r}_{AC}| = 11$ pies. Dividiendo $\mathbf{r}_{AB}$ y $\mathbf{r}_{AC}$ por sus magnitudes, obtenemos los vectores unitarios $\mathbf{e}_{AB}$ y $\mathbf{e}_{AC}$ que apuntan en las direcciones de $\mathbf{F}_{AB}$ y $\mathbf{F}_{AC}$ (Fig. b):

$$\mathbf{e}_{AB} = \frac{\mathbf{r}_{AB}}{|\mathbf{r}_{AB}|} = -0.444\mathbf{i} - 0.778\mathbf{j} + 0.444\mathbf{k},$$

$$\mathbf{e}_{AC} = \frac{\mathbf{r}_{AC}}{|\mathbf{r}_{AC}|} = 0.545\mathbf{i} - 0.636\mathbf{j} + 0.545\mathbf{k}.$$



(b) Vectores unitarios $\mathbf{e}_{AB}$ y $\mathbf{e}_{AC}$.

Las fuerzas $\mathbf{F}_{AB}$ y $\mathbf{F}_{AC}$ son

$$\mathbf{F}_{AB} = 200\mathbf{e}_{AB} = -88.9\mathbf{i} - 155.6\mathbf{j} + 88.9\mathbf{k} \text{ (lb)},$$

$$\mathbf{F}_{AC} = 200\mathbf{e}_{AC} = 109.1\mathbf{i} - 127.3\mathbf{j} + 109.1\mathbf{k} \text{ (lb)}.$$

La fuerza total ejercida sobre la argolla por la cuerda es

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_{AB} + \mathbf{F}_{AC} = 20.2\mathbf{i} - 282.8\mathbf{j} + 198.0\mathbf{k} \text{ (lb)},$$

y su magnitud es

$$|\mathbf{F}| = \sqrt{(20.2)^2 + (-282.8)^2 + (198.0)^2} = 346 \text{ lb}.$$

Problemas

2.55 ¿Cuál es la magnitud del vector $\mathbf{U} = 3\mathbf{i} - 4\mathbf{j} - 12\mathbf{k}$?
Estrategia: La magnitud de un vector está dada, en función de sus componentes, por la ecuación (2.14).

2.56 Halle la magnitud del vector $\mathbf{F} = 20\mathbf{i} + 60\mathbf{j} - 90\mathbf{k}$ (N). (N).

2.57 La magnitud del vector fuerza $\mathbf{F} = F_x\mathbf{i} - 120\mathbf{j} - 40\mathbf{k}$ (lb) es $|\mathbf{F}| = 130$ lb. ¿Qué valor tiene F_x?

2.58 La magnitud del vector $\mathbf{U} = U_x\mathbf{i} + U_y\mathbf{j} + U_z\mathbf{k}$ es $|\mathbf{U}| = 30$. Sus componentes escalares están relacionadas por las ecuaciones $U_y = -2U_x$ y $U_z = 4U_y$. Determine las componentes escalares.

2.59 Determine la magnitud del vector $-2\mathbf{U} + 3\mathbf{V}$ si $\mathbf{U} = 100\mathbf{i} + 200\mathbf{j} - 600\mathbf{k}$ y $\mathbf{V} = -200\mathbf{i} + 450\mathbf{j} + 100\mathbf{k}$.

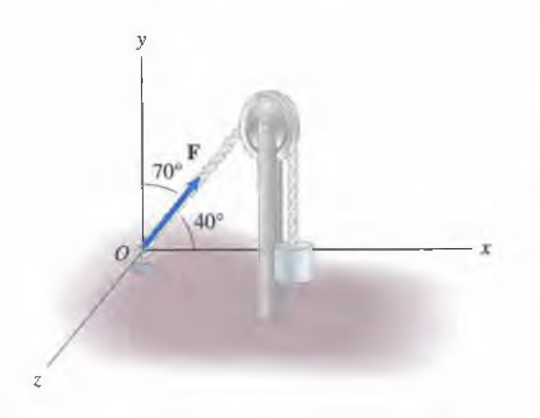
2.60 Se dan los vectores $\mathbf{U} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$ y $\mathbf{V} = 4\mathbf{i} + 12\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$.
(a) Determine las magnitudes de $\mathbf{U}$ y $\mathbf{V}$.
(b) Determine la magnitud del vector $3\mathbf{U} + 2\mathbf{V}$.

2.61 Se tiene el vector $\mathbf{U} = 40\mathbf{i} - 70\mathbf{j} - 40\mathbf{k}$.
(a) ¿Cuál es su magnitud?
(b) ¿Cuáles son los ángulos θ_x, θ_y y θ_z entre $\mathbf{U}$ y los ejes coordenados positivos?
Estrategia: Como ya se conocen las componentes de $\mathbf{U}$, los ángulos θ_x, θ_y y θ_z se pueden determinar con las ecuaciones (2.15).

2.62 Se tiene la fuerza $\mathbf{F} = 600\mathbf{i} - 700\mathbf{j} + 600\mathbf{k}$ (lb). ¿Cuáles son los ángulos θ_x, θ_y y θ_z entre el vector $\mathbf{F}$ y los ejes coordenados positivos?

2.63 El cable ejerce una fuerza **F** de 50 lb sobre el gancho en O. El ángulo entre **F** y el eje x es de 40° y el ángulo entre **F** y el eje y es de 70°. La componente z de **F** es positiva.
(a) Exprese **F** en función de componentes escalares.
(b) Cuáles son los cosenos directores de **F**?

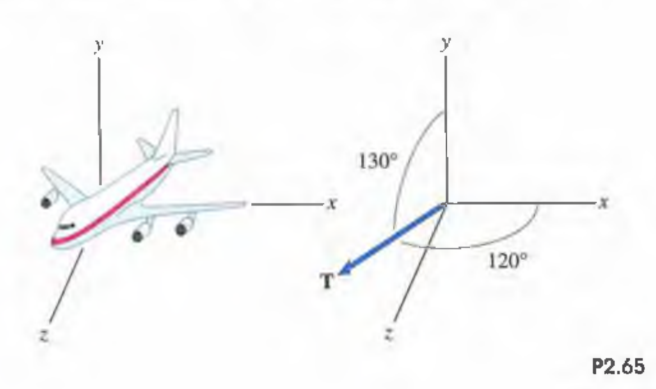
Estrategia: Como se dan sólo dos de los ángulos entre **F** y los ejes coordenados, determine primero el tercer ángulo. Luego se pueden obtener las componentes de **F** con las ecuaciones (2.15).



P2.63

2.64 Un vector unitario tiene los cosenos directores $\cos\theta_x = -0.5$ y $\cos\theta_y = 0.2$. Su componente z es positiva. Exprese este vector en función de sus componentes escalares.

2.65 Los motores de un avión ejercen una fuerza total **T** de empuje de 200 kN. El ángulo entre **T** y el eje x es de 120°, y el ángulo entre **T** y el eje y es de 130°. La componente z de **T** es positiva.
(a) ¿Cuál es el ángulo entre **T** y el eje z?
(b) Exprese **T** en función de sus componentes escalares.



P2.65

2.66 El vector de posición de un punto A a otro punto B es $3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$ (pies). El vector de posición del punto A al punto C es $-3\mathbf{i} + 13\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ (pies).
(a) ¿Cuál es la distancia del punto B al punto C?
(b) ¿Cuáles son los cosenos directores del vector de posición del punto B al punto C?

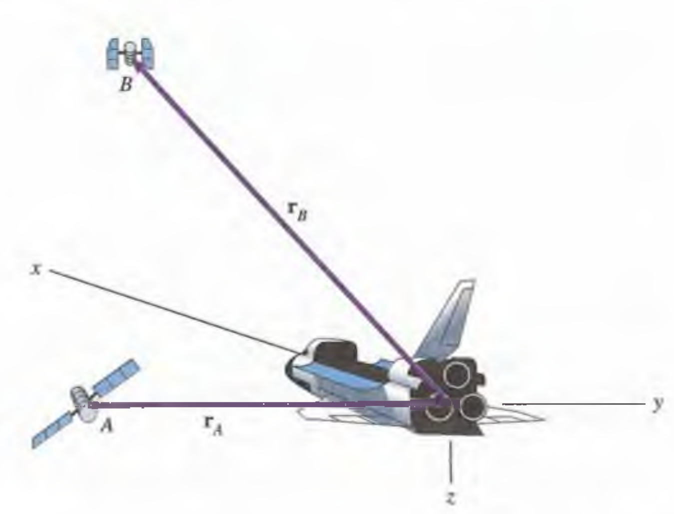
2.67 Se da el vector $\mathbf{U} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$. Determine las componentes del vector unitario que tiene la misma dirección que **U**.

2.68 Se tiene un vector fuerza $\mathbf{F} = 3\mathbf{i} - 4\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ (N).
(a) ¿Cuál es la magnitud de **F**?
(b) Determine las componentes del vector unitario que tiene la misma dirección que **F**.

2.69 Un vector fuerza **F** señala en la misma dirección que el vector unitario $\mathbf{e} = \frac{2}{7}\mathbf{i} - \frac{6}{7}\mathbf{j} - \frac{3}{7}\mathbf{k}$. La magnitud de **F** es de 700 lb. Exprese **F** en función de componentes escalares.

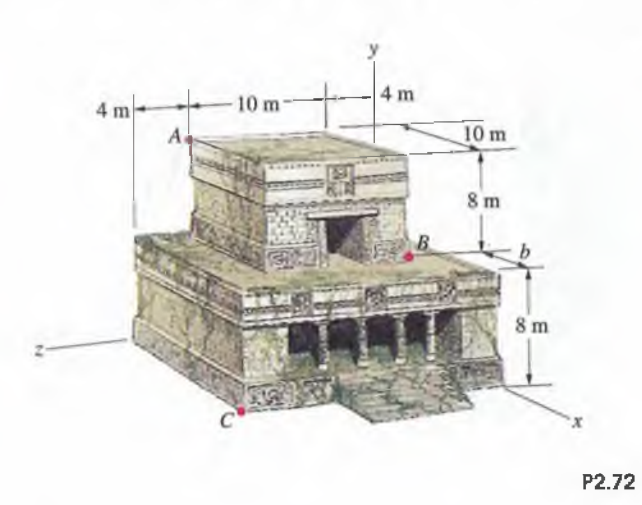
2.70 Un vector de fuerza **F** apunta en la misma dirección que el vector de posición $\mathbf{r} = 4\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 7\mathbf{k}$ (m). La magnitud de **F** es de 90 kN. Exprese **F** en términos de sus componentes escalares.

2.71 En el transbordador espacial los astronautas usan radar para determinar las magnitudes y los cosenos directores de los vectores de posición de dos satélites A y B. El vector $\mathbf{r}_A$ del transbordador al satélite A tiene una magnitud de 2 km y cosenos directores $\cos\theta_x = 0.768$, $\cos\theta_y = 0.384$, $\cos\theta_z = 0.512$. El vector $\mathbf{r}_B$ del transbordador al satélite B tiene una magnitud de 4 km y cosenos directores $\cos\theta_x = 0.743$, $\cos\theta_y = 0.557$, $\cos\theta_z = -0.371$. ¿Cuál es la distancia entre los satélites?



P2.71

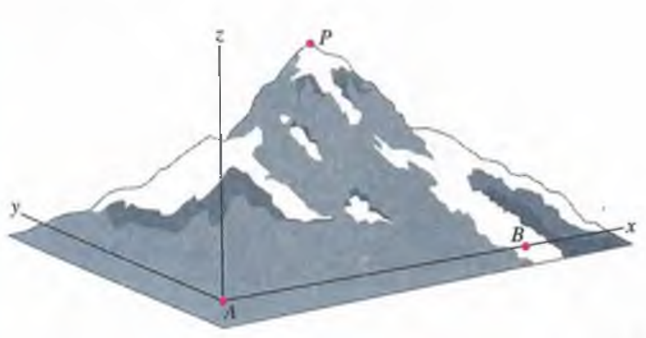
2.72 Unos arqueólogos extranjeros midieron una estructura ceremonial precolombina y obtuvieron las dimensiones mostradas. Determine (a) la magnitud y (b) los cosenos directores del vector de posición del punto A al punto B.



P2.72

2.73 Consideremos la estructura descrita en el problema 2.72. Al volver a su país, un arqueólogo se da cuenta de que ha perdido las notas que contienen la dimensión b, pero otras notas indican que la distancia del punto B al punto C es de 16.4 m. ¿Cuáles son los cosenos directores del vector que va de B a C?

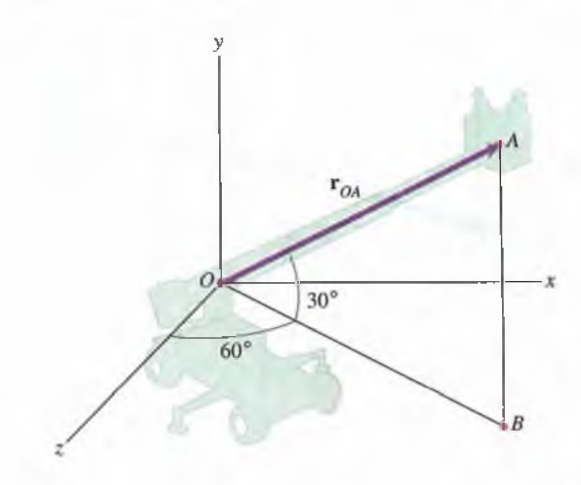
2.74 Un topógrafo midió originalmente la altura del Monte Everest con el siguiente procedimiento. Primero midió la distancia entre los puntos A y B de igual altitud que se muestran. Suponga que estaban a 10 000 pies sobre el nivel del mar y 32 000 pies separados entre sí. Luego usó un teodolito para medir los cosenos directores de los vectores del punto A a la cima P de la montaña y del punto B a P. Suponga que para $\mathbf{r}_{AP}$ se obtuvieron los cosenos directores $\cos\theta_x = 0.509$, $\cos\theta_y = 0.509$, $\cos\theta_z = 0.694$ y que para $\mathbf{r}_{BP}$ los cosenos directores obtenidos fueron $\cos\theta_x = -0.605$, $\cos\theta_y = 0.471$, y $\cos\theta_z = 0.642$. El eje z del sistema coordenado es vertical. ¿Cuál es la altura del Monte Everest sobre el nivel del mar?



P2.74

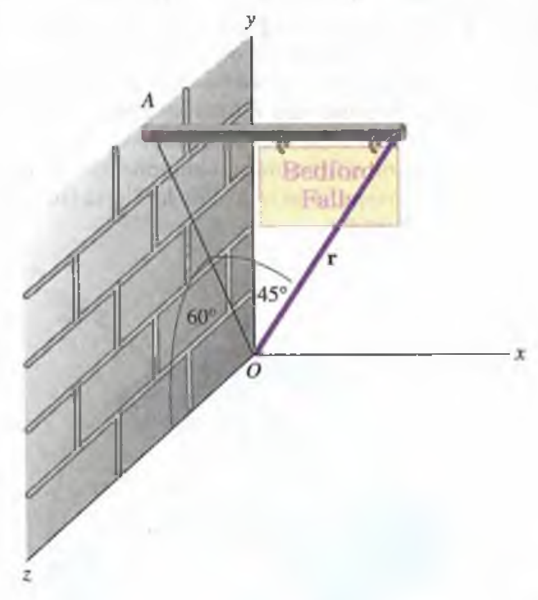
2.75 La distancia OA es de 20 pies. La línea recta AB es paralela al eje y, y el punto B está en el plano x-z. Exprese el vector $\mathbf{r}_{OA}$ en función de sus componentes escalares.

Estrategia: $\mathbf{r}_{OA}$ se puede descomponer en un vector de O a B y en un vector de B a A. Luego se puede descomponer el vector de O a B en componentes vectoriales paralelas a los ejes x y z (véase el Ej. 2.9).



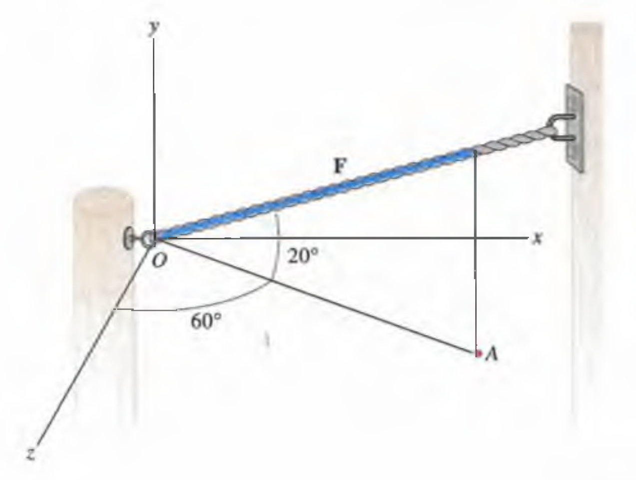
P2.75

2.76 La magnitud de **r** es de 100 pulg. La recta que va de la cabeza de **r** al punto A es paralela al eje x y el punto A está en el plano y-z. Exprese **r** en función de sus componentes escalares.



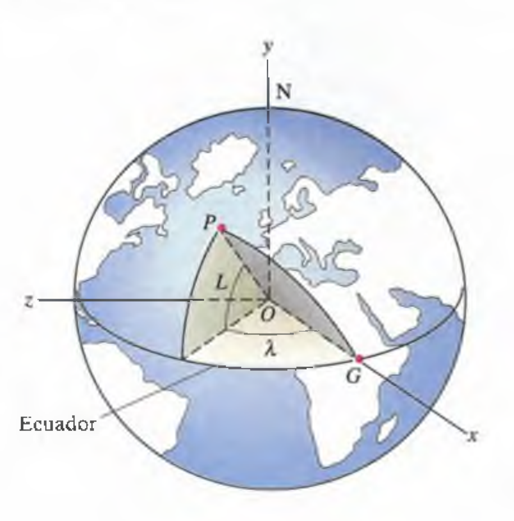
P2.76

2.77 En la figura P2.77, la línea recta que va de la cabeza de **F** al punto A es paralela al eje y, y el punto A está contenido en el plano x-z. La componente x de **F** es $F_x = 100$ N.
(a) ¿Cuál es la magnitud de **F**?
(b) Determine los ángulos θ_x, θ_y y θ_z entre **F** y los ejes coordenados positivos.



P2.77

2.78 La posición de un punto P sobre la superficie de la Tierra se especifica mediante la longitud λ medida desde el punto G sobre el ecuador directamente al sur de Greenwich, Inglaterra, y la latitud L medida desde el ecuador. La longitud se da como longitud oeste (W) o longitud este (E), lo cual indica que el ángulo se mide hacia el oeste o hacia el este desde el punto G. La latitud se da como latitud norte (N) o latitud sur (S), lo cual indica que el ángulo se mide hacia el norte o hacia el sur desde el ecuador. Suponga que P tiene longitud 30°W y latitud 45°N. Sea R_E el radio de la Tierra. Usando el sistema coordenado que se muestra, determine las componentes del vector de posición de P con respecto al centro de la Tierra (su respuesta estará en función de R_E).



P2.78

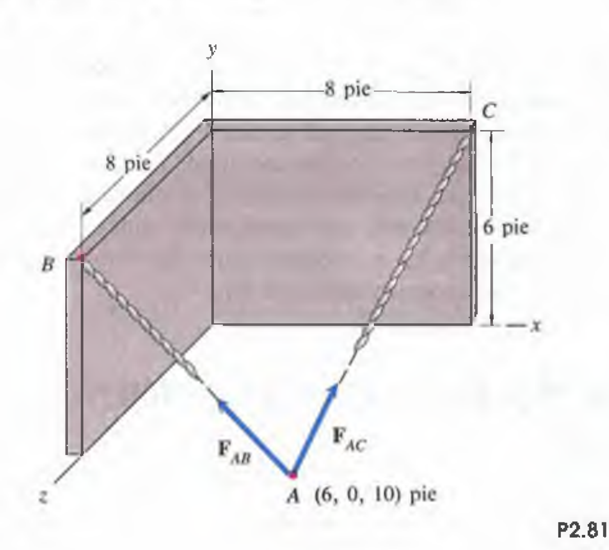
2.79 El cable que pasa por los puntos A y B de la figura ejerce una fuerza **T** de 110 lb en A.
(a) Determine el vector unitario que va del punto A al punto B.
(b) Exprese la fuerza **T** en función de sus componentes escalares.

P2.79

2.80 Un cable se extiende del punto A al punto B mostrados y ejerce una fuerza **F** de 1 kN en A dirigida a lo largo de la línea de A a B. Exprese **F** en términos de sus componentes escalares.

P2.80

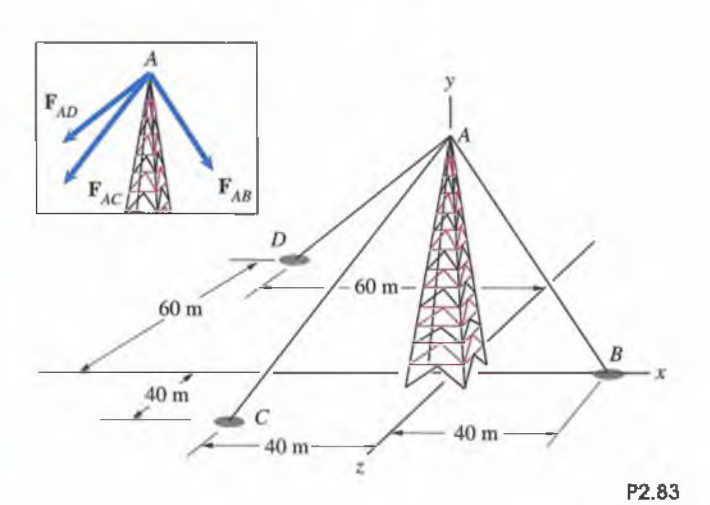
2.81 El cable AB mostrado ejerce una fuerza $\mathbf{F}_{AB}$ de 200 lb en el punto A dirigida a lo largo de la línea de A a B. Exprese $\mathbf{F}_{AB}$ en función de sus componentes escalares.



P2.81

2.82 Considere los cables y la pared descritos en el problema 2.81. El cable AB ejerce una fuerza $\mathbf{F}_{AB}$ de 200 lb en el punto A que está dirigida a lo largo de la línea de A a B. El cable AC ejerce una fuerza $\mathbf{F}_{AC}$ de 100 lb en A que está dirigida de A a C. Determine la magnitud de la fuerza total ejercida en A por los dos cables.

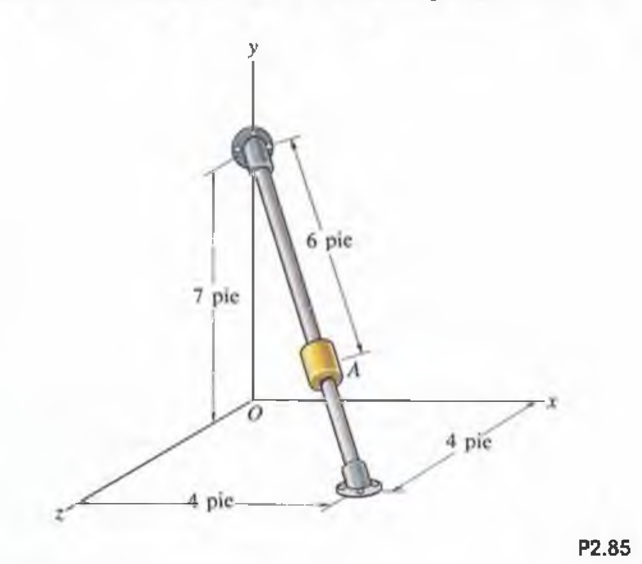
2.83 La torre de 70 m de altura que se muestra está soportada por tres cables que ejercen sobre ella las fuerzas $\mathbf{F}_{AB}$, $\mathbf{F}_{AC}$ y $\mathbf{F}_{AD}$ sobre ella. La magnitud de cada fuerza es de 2 kN. Exprese la fuerza total ejercida sobre la torre por los tres cables en función de sus componentes escalares.



P2.83

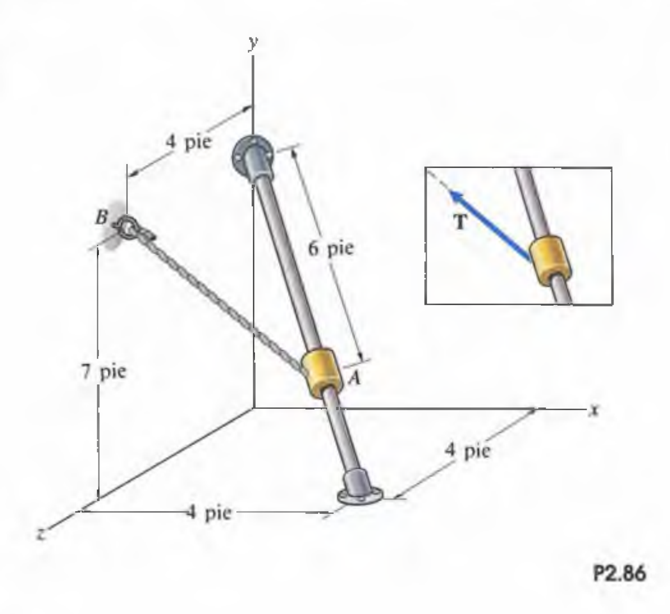
2.84 Considere la torre descrita en el problema 2.83. La magnitud de la fuerza $\mathbf{F}_{AB}$ es de 2 kN. Las componentes x y z de la suma vectorial de las fuerzas ejercidas sobre la torre por los tres cables son iguales a cero. ¿Cuáles son las magnitudes de $\mathbf{F}_{AC}$ y $\mathbf{F}_{AD}$?

2.85 Exprese el vector de posición que va del punto O mostrado al collarín en A, en función de sus componentes escalares.



P2.85

2.86 El cable AB mostrado ejerce una fuerza $\mathbf{T}$ de 32 lb sobre el collarín en A. Exprese $\mathbf{T}$ en función de sus componentes escalares.



P2.86

Productos vectoriales

Se ha encontrado que dos clases de productos vectoriales, el producto punto y el producto cruz, tienen aplicaciones en casi todas las áreas científicas y de ingeniería, sobre todo en mecánica y en la teoría del campo electromagnético. En el capítulo 4 usaremos ambos productos para evaluar los momentos de las fuerzas respecto a puntos y líneas. Por ahora estudiaremos aquí los productos vectoriales para que usted pueda concentrarse en la mecánica cuando presentemos los momentos, y que los detalles de las operaciones vectoriales no provoquen distracciones.

2.5 *Producto punto o producto escalar*

El producto punto de dos vectores tiene muchos usos, incluida la descomposición de un vector en componentes paralela y perpendicular a una línea dada, así como la determinación del ángulo entre dos líneas en el espacio.

Definición

Consideremos los vectores **U** y **V** (Fig. 2.30a). El **producto punto** de **U** y **V**, denotado por $\mathbf{U}\cdot\mathbf{V}$ (de ahí el nombre de producto "punto"), se define como el producto formado por la magnitud de **U**, la magnitud de **V** y el coseno del ángulo θ entre **U** y **V** al colocarse éstos cola con cola (Fig. 2.30b):

$$\boxed{\mathbf{U}\cdot\mathbf{V} = |\mathbf{U}|\,|\mathbf{V}|\cos\theta.} \tag{2.18}$$

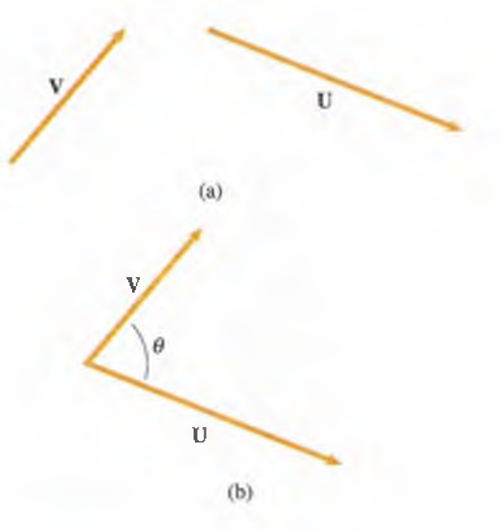


Figura 2.30
(a) Vectores **U** y **V**.
(b) El ángulo θ entre **U** y **V** cuando los dos vectores se colocan cola con cola.

Como el resultado del producto punto es un escalar, se denomina también producto escálar. Las unidades del producto punto son el producto de las unidades de los dos vectores. Observe que el producto punto de dos vectores no nulos es igual a cero si y sólo si los dos vectores son perpendiculares.

El producto punto tiene las siguientes propiedades:

$$\mathbf{U} \cdot \mathbf{V} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{U}, \qquad (2.19)$$

El producto punto es conmutativo.

$$a(\mathbf{U} \cdot \mathbf{V}) = (a\mathbf{U}) \cdot \mathbf{V} = \mathbf{U} \cdot (a\mathbf{V}), \qquad (2.20)$$

El producto punto es asociativo con respecto a la multiplicación escalar.

y

$$\mathbf{U} \cdot (\mathbf{V} + \mathbf{W}) = \mathbf{U} \cdot \mathbf{V} + \mathbf{U} \cdot \mathbf{W} \qquad (2.21)$$

El producto punto es distributivo con respecto a la suma vectorial.

para todo escalar a y vectores **U**, **V** y **W** cualesquiera.

Productos punto en función de sus componentes

En esta sección obtendremos una ecuación que nos permitirá determinar el producto punto de dos vectores si se conocen sus componentes escalares. Esta deducción también nos dará una ecuación para calcular el ángulo entre los vectores. El primer paso es determinar los productos punto formados con los vectores unitarios **i**, **j** y **k**. Evaluemos el producto punto $\mathbf{i}\cdot\mathbf{i}$. La magnitud $|\mathbf{i}| = 1$ y el ángulo entre dos vectores idénticos colocados cola con cola es igual a cero, por lo que obtenemos

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = |\mathbf{i}|\,|\mathbf{i}| \cos(0) = (1)(1)(1) = 1.$$

El producto punto de **i** y **j** es

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = |\mathbf{i}|\,|\mathbf{j}| \cos(90^\circ) = (1)(1)(0) = 0.$$

Procediendo de la misma manera obtenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{i}\cdot\mathbf{i} &= 1, & \mathbf{i}\cdot\mathbf{j} &= 0, & \mathbf{i}\cdot\mathbf{k} &= 0, \\ \mathbf{j}\cdot\mathbf{i} &= 0, & \mathbf{j}\cdot\mathbf{j} &= 1, & \mathbf{j}\cdot\mathbf{k} &= 0, \\ \mathbf{k}\cdot\mathbf{i} &= 0, & \mathbf{k}\cdot\mathbf{j} &= 0, & \mathbf{k}\cdot\mathbf{k} &= 1. \end{aligned} \qquad (2.22)$$

El producto punto de dos vectores **U** y **V** expresado en función de sus componentes es

$$\begin{aligned} \mathbf{U} \cdot \mathbf{V} = &\ (U_x\mathbf{i} + U_y\mathbf{j} + U_z\mathbf{k}) \cdot (V_x\mathbf{i} + V_y\mathbf{j} + V_z\mathbf{k}) \\ = &\ U_xV_x(\mathbf{i}\cdot\mathbf{i}) + U_xV_y(\mathbf{i}\cdot\mathbf{j}) + U_xV_z(\mathbf{i}\cdot\mathbf{k}) \\ &+ U_yV_x(\mathbf{j}\cdot\mathbf{i}) + U_yV_y(\mathbf{j}\cdot\mathbf{j}) + U_yV_z(\mathbf{j}\cdot\mathbf{k}) \\ &+ U_zV_x(\mathbf{k}\cdot\mathbf{i}) + U_zV_y(\mathbf{k}\cdot\mathbf{j}) + U_zV_z(\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}). \end{aligned}$$

Para obtener esto usamos las ecuaciones (2.20) y (2.21). Sustituyendo las ecuaciones (2.22) en la expresión, tenemos una ecuación para el producto punto en función de las componentes escalares de los dos vectores:

$$\boxed{\mathbf{U} \cdot \mathbf{V} = U_x V_x + U_y V_y + U_z V_z.} \tag{2.23}$$

A fin de obtener una ecuación para el ángulo θ en función de las componentes de los vectores, igualamos la expresión para el producto punto dada por la ecuación (2.23) con la definición del producto punto, ecuación (2.18), y despejamos cos θ:

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{U} \cdot \mathbf{V}}{|\mathbf{U}|\,|\mathbf{V}|} = \frac{U_x V_x + U_y V_y + U_z V_z}{|\mathbf{U}|\,|\mathbf{V}|}. \tag{2.24}$$

Componentes vectoriales paralela y normal a una línea

En algunas aplicaciones de ingeniería es necesario descomponer un vector en sus componentes paralela y normal (perpendicular) a una línea dada. La componente de un vector paralela a una línea se denomina **proyección** del vector sobre la línea. Por ejemplo, cuando el vector representa una fuerza, la proyección de ésta sobre una línea es la componente de la fuerza en la dirección de la línea.

Las componentes de un vector paralela y normal a una línea se pueden determinar usando el producto punto. Consideremos un vector **U** y una línea recta L (Fig. 2.31a). Podemos descomponer **U** en componentes $\mathbf{U}_p$ y $\mathbf{U}_n$ que sean paralela y normal a L (Fig. 2.31b).

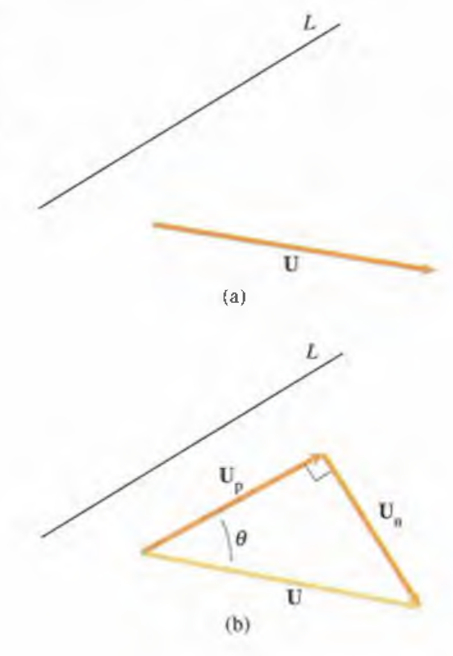


Figura 2.31
(a) Vector **U** y línea L.
(b) Separación de **U** en componentes paralela y normal a L.

Componente paralela En función del ángulo θ entre **U** y la componente $\mathbf{U}_p$, la magnitud de $\mathbf{U}_p$ es

$$|\mathbf{U}_p| = |\mathbf{U}| \cos\theta. \tag{2.25}$$

Sea **e** un vector unitario paralelo a L (Fig. 2.31c). El producto punto de **e** y **U** es

$$\mathbf{e} \cdot \mathbf{U} = |\mathbf{e}||\mathbf{U}| \cos\theta = |\mathbf{U}| \cos\theta.$$

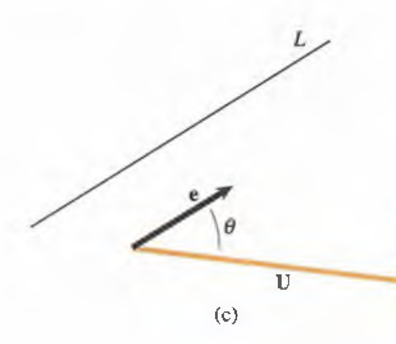


Figura 2.31
(c) El vector unitario **e** es paralelo a L.

Comparando esto con la ecuación (2.25) vemos que la magnitud de $\mathbf{U}_p$ es

$$|\mathbf{U}_p| = \mathbf{e} \cdot \mathbf{U}.$$

Por tanto, la componente paralela, o proyección de **U** sobre L, es

$$\mathbf{U}_p = (\mathbf{e} \cdot \mathbf{U})\, \mathbf{e}. \tag{2.26}$$

(Esta ecuación se cumple aun si **e** no apunta en la dirección de $\mathbf{U}_p$. En este caso, el ángulo $\theta > 90°$ y $\mathbf{e} \cdot \mathbf{U}$ es negativo.) Cuando se conocen las componentes de un vector y las componentes de un vector unitario **e** paralelo a una línea L, se puede usar la ecuación (2.26) para determinar la componente del vector paralela a L.

Componente normal Una vez que se ha determinado la componente paralela, se puede obtener la componente normal mediante la relación $\mathbf{U} = \mathbf{U}_p + \mathbf{U}_n$:

$$\mathbf{U}_n = \mathbf{U} - \mathbf{U}_p. \tag{2.27}$$

En los ejemplos siguientes mostraremos cómo evaluar y usar los productos punto. En el ejemplo 2.13 se muestra que el producto punto constituye una forma sencilla de determinar el ángulo entre dos líneas rectas en tres dimensiones. El ejemplo 2.14 ilustra el uso del producto punto para determinar la proyección de un vector.

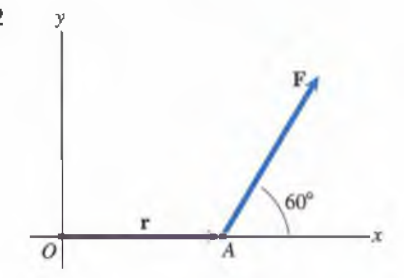
Ejemplo 2.12

En la figura 2.32 la magnitud de la fuerza **F** es de 100 lb. La magnitud del vector **r** del punto O al punto A es de 8 pies.

(a) Use la definición del producto punto para determinar $\mathbf{r}\cdot\mathbf{F}$.

(b) Use la ecuación (2.23) para determinar $\mathbf{r}\cdot\mathbf{F}$.

Figura 2.32



ESTRATEGIA

(a) Como conocemos las magnitudes de **r** y **F** y el ángulo entre ellos al colocarlos cola con cola, podemos determinar $\mathbf{r}\cdot\mathbf{F}$ directamente a partir de la definición.
(b) Podemos determinar las componentes de **r** y **F** y usar la ecuación (2.23) para especificar su producto punto.

SOLUCIÓN

(a) De acuerdo con la definición de producto punto;

$$\mathbf{r}\cdot\mathbf{F} = |\mathbf{r}|\,|\mathbf{F}|\cos\theta = (8)(100)\cos 60^\circ = 400 \text{ lb-pie}.$$

(b) El vector $\mathbf{r} = 8\mathbf{i}$ (pies). El vector **F** en función de sus componentes escalares es

$$\mathbf{F} = 100 \cos 60^\circ\ \mathbf{i} + 100 \operatorname{sen} 60^\circ\ \mathbf{j} \text{ (lb)}.$$

Por ende, el producto punto de **r** y **F** es

$$\mathbf{r}\cdot\mathbf{F} = r_xF_x + r_yF_y + r_zF_z$$

$$= (8)(100\cos 60^\circ) + (0)(100 \operatorname{sen} 60^\circ) + (0)(0) = 400 \text{ lb-pie}.$$

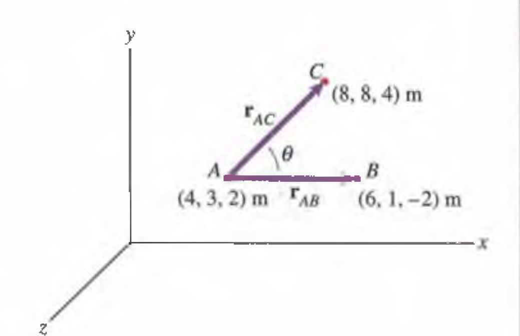
Ejemplo 2.13

¿Qué valor tiene el ángulo θ entre las líneas AB y AC de la figura 2.33?

Figura 2.33

ESTRATEGIA

Conocemos las coordenadas de los puntos A, B y C, por lo que podemos determinar las componentes del vector $\mathbf{r}_{AB}$ de A a B y del vector $\mathbf{r}_{AC}$ de A a C (Fig. a). Luego podemos usar la ecuación (2.24) para determinar θ.



(a) Vectores de posición $\mathbf{r}_{AB}$ y $\mathbf{r}_{AC}$.

SOLUCIÓN

Los vectores $\mathbf{r}_{AB}$ y $\mathbf{r}_{AC}$ son

$$\mathbf{r}_{AB} = (6-4)\,\mathbf{i} + (1-3)\,\mathbf{j} + (-2-2)\,\mathbf{k} = 2\,\mathbf{i} - 2\,\mathbf{j} - 4\,\mathbf{k} \ \ (\text{m}),$$

$$\mathbf{r}_{AC} = \ (8-4)\,\mathbf{i} + (8-3)\,\mathbf{j} + (4-2)\,\mathbf{k} \ = 4\,\mathbf{i} + 5\,\mathbf{j} + 2\,\mathbf{k} \ \ (\text{m}).$$

Sus magnitudes son

$$|\mathbf{r}_{AB}| = \sqrt{(2)^2 + (-2)^2 + (-4)^2} = 4.90 \text{ m},$$

$$|\mathbf{r}_{AC}| = \sqrt{(4)^2 + (5)^2 + (2)^2} = 6.71 \text{ m}.$$

El producto punto de $\mathbf{r}_{AB}$ y $\mathbf{r}_{AC}$ es

$$\mathbf{r}_{AB} \cdot \mathbf{r}_{AC} = (2)(4) + (-2)(5) + (-4)(2) = -10 \text{ m}^2.$$

Por tanto,

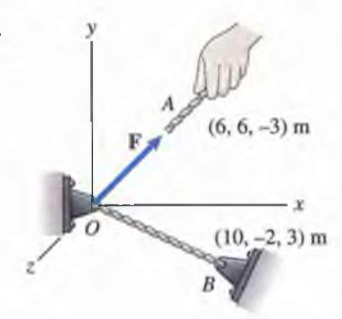
$$\cos\theta = \frac{\mathbf{r}_{AB} \cdot \mathbf{r}_{AC}}{|\mathbf{r}_{AB}|\,|\mathbf{r}_{AC}|} = \frac{-10}{(4.90)(6.71)} = -0.304.$$

El ángulo θ = arccos (−0.304) = 107.7°.

Ejemplo 2.14

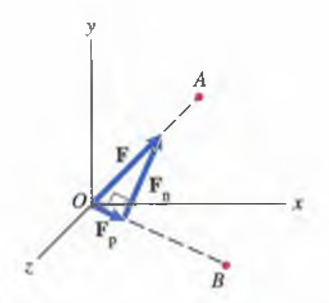
Una persona tira del cable OA mostrado en la figura ejerciendo una fuerza **F** de 50 N en O. ¿Cuáles son las componentes de **F** paralela y normal al cable OB?

Figura 2.34

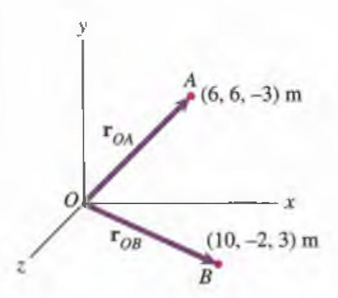


ESTRATEGIA

Descomponiendo **F** en sus componentes paralela y normal a OB (Fig. a), podemos determinar éstas usando las ecuaciones (2.26) y (2.27). Sin embargo, para aplicar tales ecuaciones debemos primero expresar **F** en función de sus componentes escalares y luego determinar las componentes de un vector unitario paralelo a OB. Podemos obtener las componentes de **F** determinando las componentes del vector unitario que va de O a A y multiplicándolas por $|\mathbf{F}|$.



(a) Componentes de **F** paralela y normal a OB.



(b) Vectores de posición $\mathbf{r}_{OA}$ y $\mathbf{r}_{OB}$.

SOLUCIÓN

Los vectores de posición de O a A y de O a B son (Fig. b)

$$\mathbf{r}_{OA} = 6\,\mathbf{i} + 6\,\mathbf{j} - 3\,\mathbf{k} \;\; \text{(m)},$$

$$\mathbf{r}_{OB} = 10\,\mathbf{i} - 2\,\mathbf{j} + 3\,\mathbf{k} \;\; \text{(m)}.$$

Sus magnitudes son $|\mathbf{r}_{OA}| = 9$ m y $|\mathbf{r}_{OB}| = 10.6$ m. Dividiendo estos vectores entre sus magnitudes obtenemos vectores unitarios que van del origen hacia A y hacia B (Fig. c):

$$\mathbf{e}_{OA} = \frac{\mathbf{r}_{OA}}{|\mathbf{r}_{OA}|} = \frac{6\,\mathbf{i} + 6\,\mathbf{j} - 3\,\mathbf{k}}{9} = 0.667\,\mathbf{i} + 0.667\,\mathbf{j} - 0.333\,\mathbf{k},$$

$$\mathbf{e}_{OB} = \frac{\mathbf{r}_{OB}}{|\mathbf{r}_{OB}|} = \frac{10\,\mathbf{i} - 2\,\mathbf{j} + 3\,\mathbf{k}}{10.6} = 0.941\,\mathbf{i} - 0.188\,\mathbf{j} + 0.282\,\mathbf{k}.$$

La fuerza **F** en función de sus componentes escalares es

$$\mathbf{F} = |\mathbf{F}|\mathbf{e}_{OA} = (50)(0.667\,\mathbf{i} + 0.667\,\mathbf{j} - 0.333\,\mathbf{k})$$
$$= 33.3\,\mathbf{i} + 33.3\,\mathbf{j} - 16.7\,\mathbf{k} \;\; \text{(N)}.$$

Tomando el producto punto de $\mathbf{e}_{OB}$ y $\mathbf{F}$ obtenemos

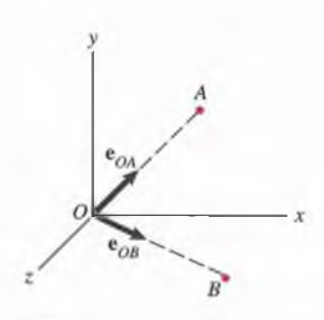
$$\mathbf{e}_{OB} \cdot \mathbf{F} = (0.941)(33.3) + (-0.188)(33.3) + (0.282)(-16.7)$$
$$= 20.4 \text{ N}.$$

La componente paralela de $\mathbf{F}$ es

$$\mathbf{F}_\text{P} = (\mathbf{e}_{OB} \cdot \mathbf{F})\, \mathbf{e}_{OB} = (20.4)(0.941\,\mathbf{i} - 0.188\,\mathbf{j} + 0.282\,\mathbf{k})$$
$$= 19.2\,\mathbf{i} - 3.8\,\mathbf{j} + 5.8\,\mathbf{k} \text{ (N)},$$

y la componente normal es

$$\mathbf{F}_\text{n} = \mathbf{F} - \mathbf{F}_\text{P} = 14.2\,\mathbf{i} + 37.2\,\mathbf{j} - 22.4\,\mathbf{k} \text{ (N)}.$$



(c) Vectores unitarios $\mathbf{e}_{OA}$ y $\mathbf{e}_{OB}$.

COMENTARIO

Se puede comprobar que los dos vectores son perpendiculares verificando que su producto punto sea nulo. En este ejemplo,

$$\mathbf{F}_\text{P} \cdot \mathbf{F}_\text{n} = (19.2)(14.2) + (-3.8)(37.2) + (5.8)(-22.4) = 0.$$

Problemas

2.87 Determine el producto punto $\mathbf{U} \cdot \mathbf{V}$ de los vectores $\mathbf{U} = 2\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ y $\mathbf{V} = -3\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$.

Estrategia: Se conocen las componentes de los vectores; use la ecuación (2.23) para determinar su producto punto.

2.88 Determine el producto punto $\mathbf{U} \cdot \mathbf{V}$ de los vectores $\mathbf{U} = 40\mathbf{i} + 20\mathbf{j} + 60\mathbf{k}$ y $\mathbf{V} = -30\mathbf{i} + 15\mathbf{k}$.

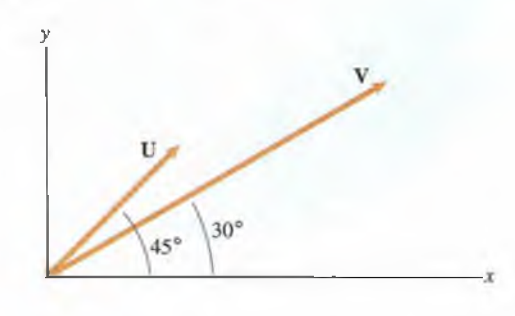
2.89 ¿Cuál es el producto punto del vector de posición $\mathbf{r} = -10\mathbf{i} + 25\mathbf{j}$ (m) y la fuerza $\mathbf{F} = 300\mathbf{i} + 250\mathbf{j} + 300\mathbf{k}$ (N)?

2.90 ¿Cuál es el producto punto del vector de posición $\mathbf{r} = 4\mathbf{i} - 12\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$ (pies) y la fuerza $\mathbf{F} = 20\mathbf{i} + 30\mathbf{j} - 10\mathbf{k}$ (lb)?

2.91 Se dan los vectores $\mathbf{U} = -6\mathbf{i} + \mathbf{j} + 8\mathbf{k}$ y $\mathbf{V} = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$. (a) Determine el producto punto de $\mathbf{U}$ y $\mathbf{V}$. (b) ¿Qué se puede concluir respecto a $\mathbf{U}$ y $\mathbf{V}$ por el resultado obtenido en la parte (a)?

2.92 Dos vectores $\mathbf{U} = U_x\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$ y $\mathbf{V} = -2\mathbf{i} + 6\mathbf{j}$ son perpendiculares. ¿Cuál es el valor de U_x?

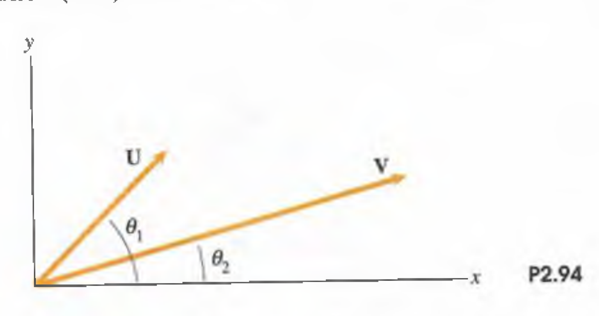
2.93 Se tienen las magnitudes $|\mathbf{U}| = 10$ y $|\mathbf{V}| = 20$.
(a) Use la definición del producto punto para determinar $\mathbf{U} \cdot \mathbf{V}$.
(b) Use la ecuación (2.23) para determinar $\mathbf{U} \cdot \mathbf{V}$.



P2.93

2.94 Evaluando el producto punto $\mathbf{U} \cdot \mathbf{V}$, demuestre la identidad $\cos(\theta_1 - \theta_2) = \cos\theta_1 \cos\theta_2 + \operatorname{sen}\theta_1 \operatorname{sen}\theta_2$.

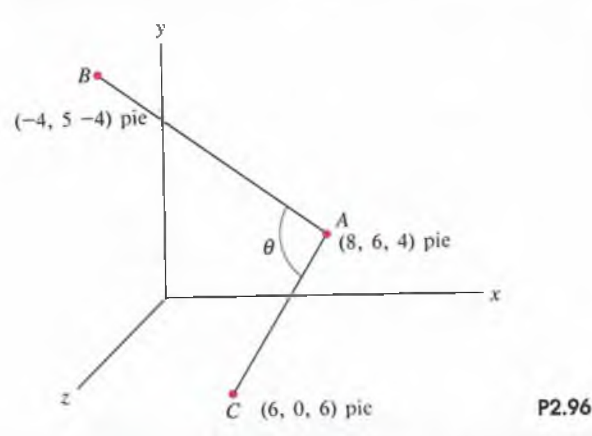
Estrategia: Evalúe el producto punto usando la definición y la ecuación (2.23).



P2.94

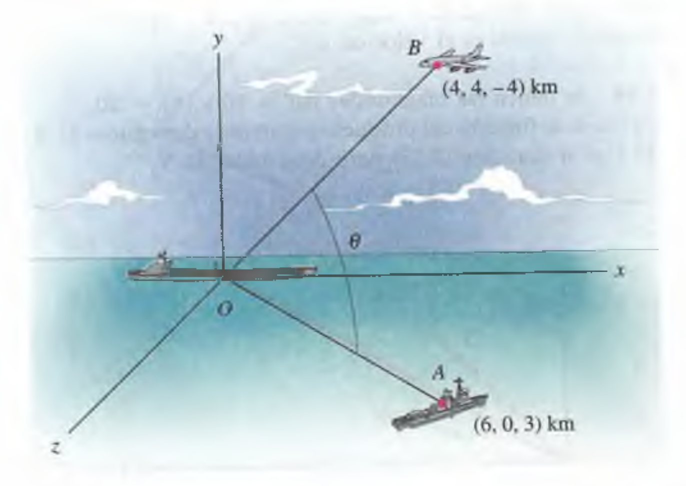
2.95 Sean los vectores $\mathbf{U} = U_x\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + \mathbf{k}$ y $\mathbf{V} = -3\mathbf{i} + V_y\mathbf{j} + \mathbf{k}$. Su producto punto es $\mathbf{U} \cdot \mathbf{V} = -35$ y la magnitud de su suma es $|\mathbf{U} + \mathbf{V}| = 3$. ¿Qué valor tienen U_x y V_y?

2.96 ¿Qué valor tiene el ángulo θ entre las líneas AB y AC?



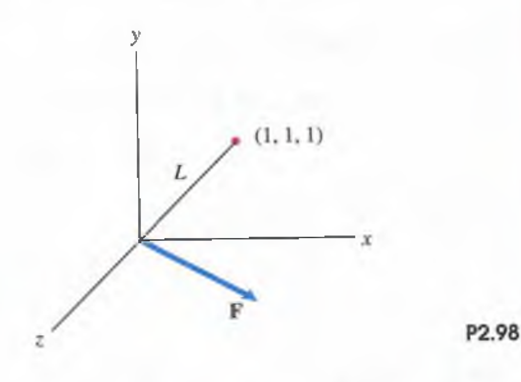
P2.96

2.97 El barco O mide las posiciones del barco A y del avión B y obtiene las coordenadas que se muestran. ¿Qué valor tiene el ángulo θ entre las visuales OA y OB?



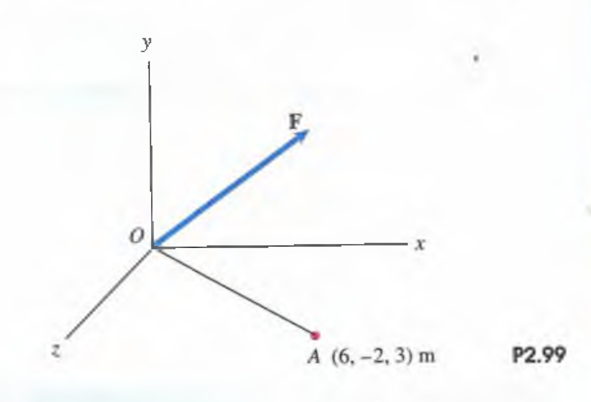
P2.97

2.98 Se tiene el vector fuerza $\mathbf{F} = F_x\mathbf{i} + F_y\mathbf{j} + F_z\mathbf{k}$.
(a) Utilice la ecuación (2.26) para determinar la componente vectorial de $\mathbf{F}$ paralela al eje x.
(b) Determine la componente vectorial de $\mathbf{F}$ paralela a la línea L.



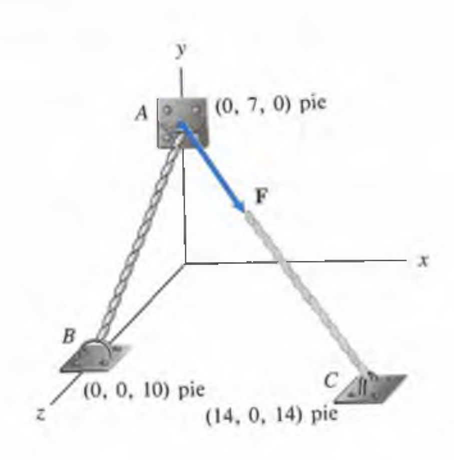
P2.98

2.99 Se tiene la fuerza $\mathbf{F} = 21\mathbf{i} + 14\mathbf{j}$ (kN). Resuelva la fuerza en sus componentes vectoriales paralela y normal a la línea OA.



P2.99

2.100 Dos cables se extienden de A a B y de A a C. El cable AC ejerce una fuerza $\mathbf{F}$ de 1000 lb en A.
(a) ¿Qué valor tiene el ángulo entre los cables AB y AC?
(b) Halle la componente vectorial de $\mathbf{F}$ paralela al cable AB.

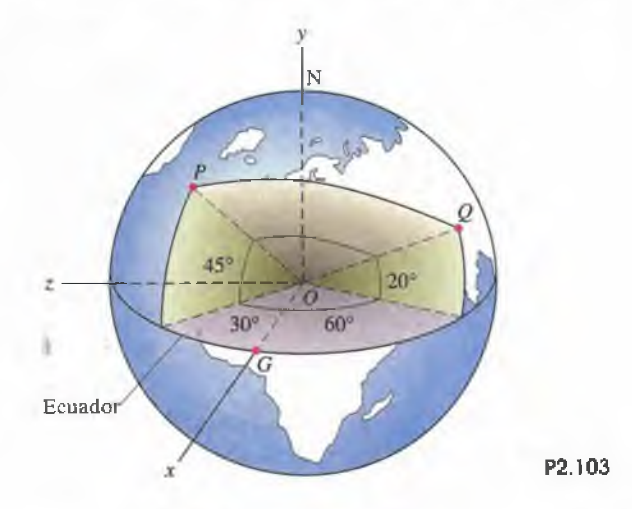


P2.100

2.101 Considere los cables AB y AC del problema 2.100. Sea $\mathbf{r}_{AB}$ el vector de posición que va del punto A al punto B. Determine la componente vectorial de $\mathbf{r}_{AB}$ paralela al cable AC.

2.102 Considere los cables AB y AC del problema 2.100. Use el producto punto para determinar la distancia pependicular del punto B al cable AC, es decir, determine la longitud de la línea más corta del punto B a un punto sobre el cable AC.

2.103 El punto P se halla a 30°W de longitud y a 45°N de latitud sobre el Océano Atlántico, entre Nueva Escocia y Francia (véase el Problema 2.78). El punto Q se encuentra a 60°E de longitud y a 20°N de latitud en el mar de Arabia. Use el producto punto para determinar la distancia más corta sobre la superficie de la Tierra entre P y Q en función del radio terrestre R_E.



P2.103

2.6 *Producto cruz o producto vectorial*

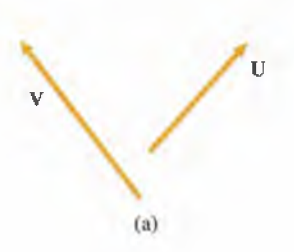
Igual que el producto punto, el producto cruz de dos vectores tiene muchas aplicaciones, entre otras la determinación de la velocidad de rotación de una partícula de fluido y el cálculo de la fuerza ejercida sobre una partícula cargada por un campo magnético. Debido a su utilidad en el cálculo de momentos de fuerzas, el producto cruz es una herramienta indispensable en la mecánica. En esta sección mostraremos cómo evaluar los productos cruz y daremos ejemplos de aplicaciones sencillas.

Definición

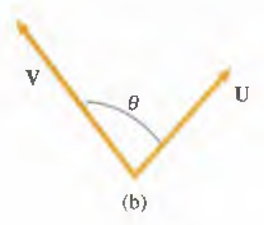
Consideremos dos vectores **U** y **V** (Fig. 2.35a). El **producto cruz** de **U** y **V**, denotado por **U** × **V**, se define como

$$\mathbf{U} \times \mathbf{V} = |\mathbf{U}|\,|\mathbf{V}|\,\operatorname{sen}\theta\,\mathbf{e}. \tag{2.28}$$

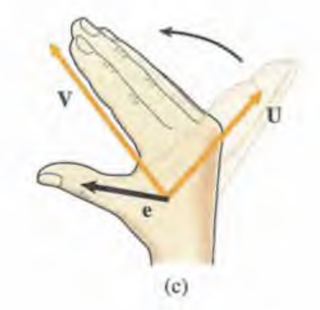
El ángulo θ es el ángulo entre **U** y **V** cuando los vectores se colocan cola con cola (Fig. 2.35b). El vector **e** es un vector unitario definido como perpendicular a **U** y a **V**. Como esto implica dos posibles sentidos para **e**, los vectores **U**, **V** y **e** se definen como un sistema derecho. En la figura 2.35(c) se muestra la **regla de la mano derecha** para determinar la dirección de **e**. El pulgar de la mano derecha apunta hacia **e** cuando los cuatro dedos restantes, que apuntan hacia el vector **U** (el primer vector en el producto cruz), se abaten hacia el vector **V** (el segundo vector en el producto cruz).



(a)



(b)



(c)

Figura 2.35
(a) Vectores **U** y **V**.
(b) Ángulo θ entre los vectores cuando se colocan cola con cola.
(c) Determinación de la dirección de **e** con la regla de la mano derecha.

Debido a que el resultado del producto cruz es un vector, se le suele llamar también producto vectorial. Las unidades del producto cruz son el producto de las unidades de los dos vectores. Note que el producto cruz de dos vectores no nulos es igual a cero si y sólo si los dos vectores son paralelos.

Una propiedad interesante del producto cruz reside en que *no* es conmutativo. La ecuación (2.28) implica que la magnitud del vector $\mathbf{U} \times \mathbf{V}$ es igual a la magnitud del vector $\mathbf{V} \times \mathbf{U}$, pero la regla de la mano derecha indica que estos vectores son opuestos en dirección (Fig. 2.36). Esto es,

$$\mathbf{U} \times \mathbf{V} = -\mathbf{V} \times \mathbf{U}. \tag{2.29}$$

El producto cruz *no* es conmutativo.

El producto cruz también satisface las relaciones

$$a(\mathbf{U} \times \mathbf{V}) = (a\mathbf{U}) \times \mathbf{V} = \mathbf{U} \times (a\mathbf{V}) \tag{2.30}$$

El producto cruz es asociativo con respecto a la multiplicación escalar.

y

$$\mathbf{U} \times (\mathbf{V} + \mathbf{W}) = \mathbf{U} \times \mathbf{V} + \mathbf{U} \times \mathbf{W} \tag{2.31}$$

El producto cruz es distributivo con respecto a la adición vectorial.

para todo escalar a y vectores $\mathbf{U}$, $\mathbf{V}$ y $\mathbf{W}$ cualesquiera.

Figura 2.36
Direcciones de $\mathbf{U} \times \mathbf{V}$ y $\mathbf{V} \times \mathbf{U}$.

Productos cruz en función de sus componentes

Para obtener una ecuación para el producto cruz de dos vectores en función de sus componentes, debemos determinar los productos cruz formados con los vectores unitarios **i**, **j** y **k**. Como el ángulo entre dos vectores idénticos colocados cola con cola es igual a cero,

$$\mathbf{i} \times \mathbf{i} = |\mathbf{i}|\,|\mathbf{i}| \operatorname{sen}(0)\,\mathbf{e} = \mathbf{0}.$$

El producto cruz $\mathbf{i} \times \mathbf{j}$ es

$$\mathbf{i} \times \mathbf{j} = |\mathbf{i}|\,|\mathbf{j}| \operatorname{sen}(90°)\,\mathbf{e} = \mathbf{e},$$

donde $\mathbf{e}$ es un vector unitario perpendicular a $\mathbf{i}$ y $\mathbf{j}$. $\mathbf{e} = \mathbf{k}$ o bien $\mathbf{e} = -\mathbf{k}$. Aplicando la regla de la mano derecha, $\mathbf{e} = \mathbf{k}$ (Fig. 2.37). Por tanto,

$$\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}.$$

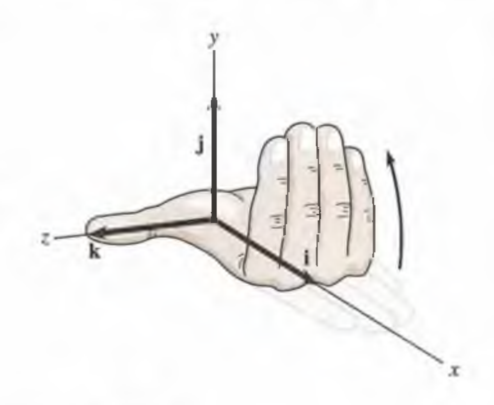
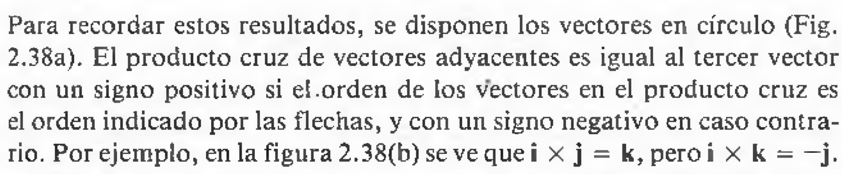


Figura 2.37
La regla de la mano derecha indica que $\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}$.

Procediendo de la misma manera obtenemos



$$\begin{aligned}
&\mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{0}, \qquad \mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}, \qquad \mathbf{i} \times \mathbf{k} = -\mathbf{j},\\
&\mathbf{j} \times \mathbf{i} = -\mathbf{k}, \qquad \mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{0}, \qquad \mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}, \qquad (2.32)\\
&\mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}, \qquad \mathbf{k} \times \mathbf{j} = -\mathbf{i}, \qquad \mathbf{k} \times \mathbf{k} = \mathbf{0}.
\end{aligned}$$

Para recordar estos resultados, se disponen los vectores en círculo (Fig. 2.38a). El producto cruz de vectores adyacentes es igual al tercer vector con un signo positivo si el orden de los vectores en el producto cruz es el orden indicado por las flechas, y con un signo negativo en caso contrario. Por ejemplo, en la figura 2.38(b) se ve que $\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}$, pero $\mathbf{i} \times \mathbf{k} = -\mathbf{j}$.

El producto cruz de dos vectores $\mathbf{U}$ y $\mathbf{V}$ expresado en función de sus componentes es

$$\begin{aligned}
\mathbf{U} \times \mathbf{V} &= (U_x\mathbf{i} + U_y\mathbf{j} + U_z\mathbf{k}) \times (V_x\mathbf{i} + V_y\mathbf{j} + V_z\mathbf{k})\\
&= U_xV_x(\mathbf{i} \times \mathbf{i}) + U_xV_y(\mathbf{i} \times \mathbf{j}) + U_xV_z(\mathbf{i} \times \mathbf{k})\\
&\quad + U_yV_x(\mathbf{j} \times \mathbf{i}) + U_yV_y(\mathbf{j} \times \mathbf{j}) + U_yV_z(\mathbf{j} \times \mathbf{k})\\
&\quad + U_zV_x(\mathbf{k} \times \mathbf{i}) + U_zV_y(\mathbf{k} \times \mathbf{j}) + U_zV_z(\mathbf{k} \times \mathbf{k}).
\end{aligned}$$

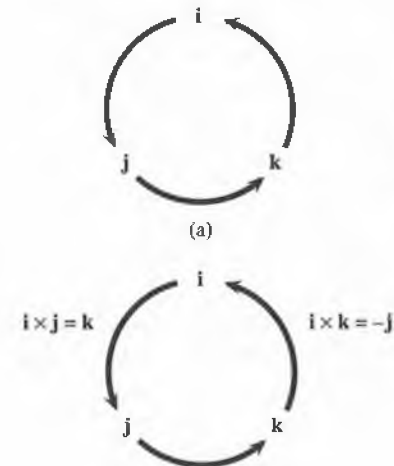


Figura 2.38
(a) Disponga los vectores unitarios en un círculo con flechas que indiquen el orden de avance.
(b) El círculo se puede usar para determinar los productos cruz.

Al sustituir la ecuación (2.32) en esta expresión obtenemos la ecuación

$$\mathbf{U} \times \mathbf{V} = (U_y V_z - U_z V_y)\,\mathbf{i} - (U_x V_z - U_z V_x)\,\mathbf{j} + (U_x V_y - U_y V_x)\,\mathbf{k}. \quad (2.33)$$

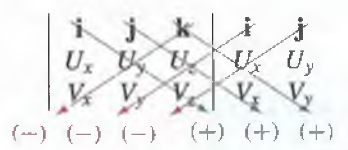
Este resultado se puede escribir en forma compacta como el determinante

$$\mathbf{U} \times \mathbf{V} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ U_x & U_y & U_z \\ V_x & V_y & V_z \end{vmatrix}. \quad (2.34)$$

Esta ecuación se basa en las ecuaciones (2.32) que obtuvimos usando un sistema coordenado derecho. Da el resultado correcto para el producto cruz sólo si se usa un sistema coordenado derecho para determinar las componentes de **U** y **V**.

Evaluación de un determinante de 3 × 3

Un determinante de 3 × 3 se puede evaluar repitiendo sus dos primeras columnas y evaluando los productos de los términos en las seis diagonales.



Sumando los términos obtenidos con las diagonales que van de arriba hacia abajo a la derecha (flechas azules), y restando los términos obtenidos con las diagonales que van de arriba hacia abajo a la izquierda (flechas rojas), se obtiene el valor del determinante:

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ U_x & U_y & U_z \\ V_x & V_y & V_z \end{vmatrix} = U_y V_z\,\mathbf{i} + U_z V_x\,\mathbf{j} + U_x V_y\,\mathbf{k} - U_y V_x\,\mathbf{k} - U_z V_y\,\mathbf{i} - U_x V_z\,\mathbf{j}.$$

También se puede evaluar un determinante de 3 × 3 expresándolo como

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ U_x & U_y & U_z \\ V_x & V_y & V_z \end{vmatrix} = \mathbf{i}\begin{vmatrix} U_y & U_z \\ V_y & V_z \end{vmatrix} - \mathbf{j}\begin{vmatrix} U_x & U_z \\ V_x & V_z \end{vmatrix} + \mathbf{k}\begin{vmatrix} U_x & U_y \\ V_x & V_y \end{vmatrix}.$$

Los términos de la derecha se obtienen multiplicando cada elemento de la primera fila del determinante de 3 × 3 por el determinante de 2 × 2 que se obtiene tachando la columna y la fila en que se encuentra ese elemento. Por ejemplo, el primer elemento de la primera fila, **i**, se multiplica por el determinante de 2 × 2

$$\begin{vmatrix} \not{\mathbf{i}} & \not{\mathbf{j}} & \not{\mathbf{k}} \\ \not{U_x} & U_y & U_z \\ \not{V_x} & V_y & V_z \end{vmatrix}.$$

Recuerde que el segundo término se resta. Desarrollando los determinantes de 2 × 2 obtenemos el valor del determinante:

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ U_x & U_y & U_z \\ V_x & V_y & V_z \end{vmatrix} = (U_y V_z - U_z V_y)\,\mathbf{i} - (U_x V_z - U_z V_x)\,\mathbf{j} + (U_x V_y - U_y V_x)\,\mathbf{k}.$$

2.7 Productos triples mixtos

En el capítulo 4, cuando analicemos el momento de una fuerza respecto a una línea, usaremos una operación denominada **producto triple mixto** definido por

$$\mathbf{U} \cdot (\mathbf{V} \times \mathbf{W}). \qquad (2.35)$$

En función de las componentes escalares de los vectores,

$$\mathbf{U} \cdot (\mathbf{V} \times \mathbf{W}) = (U_x\,\mathbf{i} + U_y\,\mathbf{j} + U_z\,\mathbf{k}) \cdot \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ V_x & V_y & V_z \\ W_x & W_y & W_z \end{vmatrix}$$

$$= (U_x\,\mathbf{i} + U_y\,\mathbf{j} + U_z\,\mathbf{k}) \cdot [(V_y W_z - V_z W_y)\,\mathbf{i} - (V_x W_z - V_z W_x)\,\mathbf{j} + (V_x W_y - V_y W_x)\,\mathbf{k}]$$

$$= U_x(V_y W_z - V_z W_y) - U_y(V_x W_z - V_z W_x) + U_z(V_x W_y - V_y W_x).$$

Este resultado se puede expresar como el determinante

$$\mathbf{U} \cdot (\mathbf{V} \times \mathbf{W}) = \begin{vmatrix} U_x & U_y & U_z \\ V_x & V_y & V_z \\ W_x & W_y & W_z \end{vmatrix}. \qquad (2.36)$$

Si se intercambian dos vectores cualesquiera en el producto triple mixto, se cambia el signo pero no el valor absoluto del resultado. Por ejemplo,

$$\mathbf{U} \cdot (\mathbf{V} \times \mathbf{W}) = -\mathbf{W} \cdot (\mathbf{V} \times \mathbf{U}).$$

En los siguientes ejemplos demostraremos cómo evaluar productos cruz e ilustraremos aplicaciones sencillas de ellos. En el ejemplo 2.17 se demuestra el uso del producto cruz para determinar un vector unitario que es perpendicular a dos líneas rectas y para determinar la distancia mínima de un punto a una línea recta.

Ejemplo 2.15

Determine el producto cruz $\mathbf{U} \times \mathbf{V}$ de los vectores $\mathbf{U} = -2\mathbf{i} + \mathbf{j}$ y $\mathbf{V} = 3\mathbf{i} - 4\mathbf{k}$.

ESTRATEGIA

Podemos evaluar de dos maneras el producto cruz de los vectores: evaluando los productos cruz de sus componentes término por término, o utilizando la ecuación (2.34).

SOLUCIÓN

$$\begin{aligned}\mathbf{U} \times \mathbf{V} &= (-2\,\mathbf{i} + \mathbf{j}) \times (3\,\mathbf{i} - 4\,\mathbf{k}) \\ &= (-2)(3)(\mathbf{i} \times \mathbf{i}) + (-2)(-4)(\mathbf{i} \times \mathbf{k}) + (1)(3)(\mathbf{j} \times \mathbf{i}) \\ &\quad +(1)(-4)(\mathbf{j} \times \mathbf{k}) \\ &= (-6)(0) + (8)(-\mathbf{j}) + (3)(-\mathbf{k}) + (-4)(\mathbf{i}) \\ &= -4\,\mathbf{i} - 8\,\mathbf{j} - 3\,\mathbf{k}.\end{aligned}$$

Usando la ecuación (2.34) obtenemos

$$\mathbf{U} \times \mathbf{V} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ U_x & U_y & U_z \\ V_x & V_y & V_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -4 \end{vmatrix} = -4\,\mathbf{i} - 8\,\mathbf{j} - 3\,\mathbf{k}.$$

Ejemplo 2.16

En la figura 2.39 la magnitud de la fuerza **F** es de 100 lb. La magnitud del vector **r** del punto O al punto A es de 8 pies.
(a) Use la definición del producto cruz para determinar $\mathbf{r} \times \mathbf{F}$.
(b) Use la ecuación (2.34) para determinar $\mathbf{r} \times \mathbf{F}$.

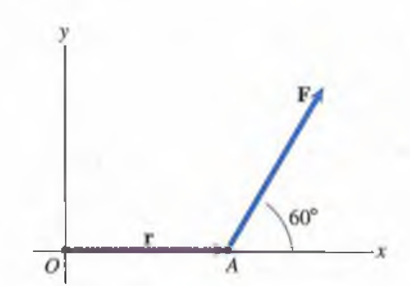


Figura 2.39

ESTRATEGIA

(a) Conocemos las magnitudes de **r** y **F** y el ángulo entre ellos cuando se colocan cola con cola. Como ambos vectores están en el plano x-y, el vector unitario **k** es perpendicular a **r** y **F**. Por tanto, tenemos toda la información necesaria para determinar $\mathbf{r} \times \mathbf{F}$ directamente de la definición.
(b) Podemos determinar las componentes de **r** y **F** y usar la ecuación (2.34) para determinar $\mathbf{r} \times \mathbf{F}$.

SOLUCIÓN

(a) Usando la definición del producto cruz,

$$\mathbf{r} \times \mathbf{F} = |\mathbf{r}|\,|\mathbf{F}| \operatorname{sen}\theta\,\mathbf{e} = (8)(100)\operatorname{sen} 60^\circ\,\mathbf{e} = 692.8\,\mathbf{e}\ \text{(lb-pie)}.$$

Como **e** se define perpendicular a **r** y **F**, $\mathbf{e} = \mathbf{k}$ o $\mathbf{e} = -\mathbf{k}$. Apuntando con los dedos de la mano derecha en la dirección de **r** y abatiéndolos sobre **F**, la regla de la mano derecha indica que $\mathbf{e} = \mathbf{k}$. Por tanto,

$$\mathbf{r} \times \mathbf{F} = 692.8\,\mathbf{k}\ \text{(lb-pie)}.$$

(b) El vector $\mathbf{r} = 8\mathbf{i}$ (pies). El vector **F** en función de sus componentes escalares es

$$\mathbf{F} = 100 \cos 60^\circ \mathbf{i} + 100 \operatorname{sen} 60^\circ \mathbf{j}\ \text{(lb)}.$$

De la ecuación 2.34,

$$\mathbf{r} \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 8 & 0 & 0 \\ 100\cos 60^\circ & 100\operatorname{sen} 60^\circ & 0 \end{vmatrix}$$

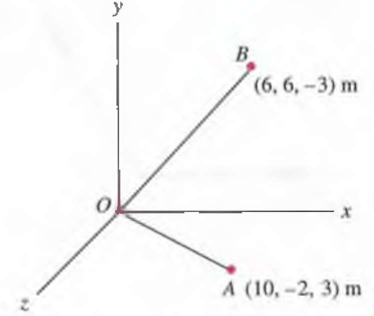
$$= (8)(100\operatorname{sen} 60^\circ)\,\mathbf{k}$$

$$= 692.8\,\mathbf{k}\ \text{(lb-pie)}.$$

Ejemplo 2.17

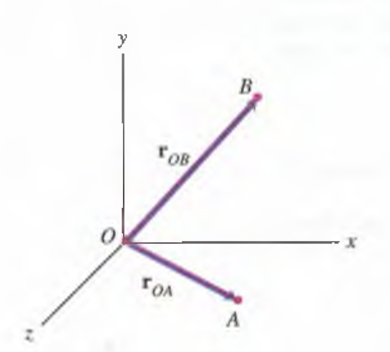
Consideremos las líneas rectas *OA* y *OB* de la figura 2.40.
(a) Determine las componentes de un vector unitario que sea perpendicular a *OA* y *OB*.
(b) ¿Cuál es la distancia mínima del punto *A* a la línea *OB*?

Figura 2.40

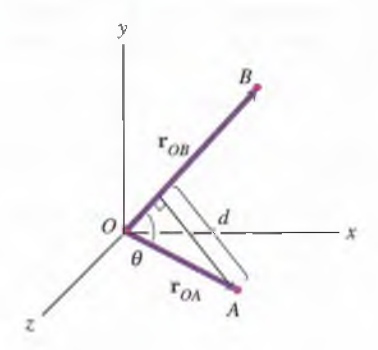


ESTRATEGIA

(a) Sean $\mathbf{r}_{OA}$ y $\mathbf{r}_{OB}$ los vectores de posición de *O* a *A* y de *O* a *B* (Fig. a). Como el producto cruz $\mathbf{r}_{OA} \times \mathbf{r}_{OB}$ es perpendicular a $\mathbf{r}_{OA}$ y $\mathbf{r}_{OB}$, los determinaremos y los dividiremos por su magnitud para obtener un vector unitario perpendicular a las líneas *OA* y *OB*.
(b) La distancia mínima de *A* a la línea *OB* es la longitud *d* de la línea recta de *A* a *OB* que es perpendicular a *OB* (Fig. b). Podemos ver que $d = |\mathbf{r}_{OA}|$ sen θ, donde θ es el ángulo entre $\mathbf{r}_{OA}$ y $\mathbf{r}_{OB}$. De la definición del producto cruz, la magnitud de $\mathbf{r}_{OA} \times \mathbf{r}_{OB}$ es $|\mathbf{r}_{OA}|\,|\mathbf{r}_{OB}|$ sen θ, por lo que podemos determinar *d* dividiendo la magnitud del producto de $\mathbf{r}_{OA} \times \mathbf{r}_{OB}$ por la magnitud de $\mathbf{r}_{OB}$.



(a) Vectores $\mathbf{r}_{OA}$ y $\mathbf{r}_{OB}$.



(b) Distancia mínima *d* de *A* a la línea *OB*.

SOLUCIÓN

(a) Las componentes de $\mathbf{r}_{OA}$ y $\mathbf{r}_{OB}$ son

$$\mathbf{r}_{OA} = 10\,\mathbf{i} - 2\,\mathbf{j} + 3\,\mathbf{k} \ \text{(m)},$$

$$\mathbf{r}_{OB} = 6\,\mathbf{i} + 6\,\mathbf{j} - 3\,\mathbf{k} \ \text{(m)}.$$

Usando la ecuación (2.34) obtenemos $\mathbf{r}_{OA} \times \mathbf{r}_{OB}$:

$$\mathbf{r}_{OA} \times \mathbf{r}_{OB} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 10 & -2 & 3 \\ 6 & 6 & -3 \end{vmatrix} = -12\,\mathbf{i} + 48\,\mathbf{j} + 72\,\mathbf{k} \ \text{(m}^2\text{)}.$$

Este vector es perpendicular a $\mathbf{r}_{OA}$ y a $\mathbf{r}_{OB}$. Al dividirlo por su magnitud obtenemos un vector unitario $\mathbf{e}$ que es perpendicular a las líneas OA y OB:

$$\mathbf{e} = \frac{\mathbf{r}_{OA} \times \mathbf{r}_{OB}}{|\mathbf{r}_{OA} \times \mathbf{r}_{OB}|} = \frac{-12\,\mathbf{i} + 48\,\mathbf{j} + 72\,\mathbf{k}}{\sqrt{(-12)^2 + (48)^2 + (72)^2}} = -0.137\,\mathbf{i} + 0.549\,\mathbf{j} + 0.824\,\mathbf{k}.$$

(b) De la figura (b), la distancia mínima d es

$$d = |\mathbf{r}_{OA}| \operatorname{sen} \theta.$$

La magnitud de $\mathbf{r}_{OA} \times \mathbf{r}_{OB}$ es

$$|\mathbf{r}_{OA} \times \mathbf{r}_{OB}| = |\mathbf{r}_{OA}|\,|\mathbf{r}_{OB}| \operatorname{sen} \theta.$$

Despejando sen θ y sustituyendo en la ecuación anterior se obtiene la distancia para d:

$$d = |\mathbf{r}_{OA}| \left(\frac{|\mathbf{r}_{OA} \times \mathbf{r}_{OB}|}{|\mathbf{r}_{OA}||\mathbf{r}_{OB}|} \right) = \frac{|\mathbf{r}_{OA} \times \mathbf{r}_{OB}|}{|\mathbf{r}_{OB}|}$$

$$= \frac{\sqrt{(-12)^2 + (48)^2 + (72)^2}}{\sqrt{(6)^2 + (6)^2 + (-3)^2}} = 9.71 \ \text{m}.$$

Problemas

2.104 Determine el producto cruz $\mathbf{U} \times \mathbf{V}$ de los vectores $\mathbf{U} = 3\mathbf{i} - 10\mathbf{j}$ y $\mathbf{V} = -6\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$.

Estrategia: El producto cruz de los dos vectores se puede evaluar término por término o usando la ecuación (2.34) (véase el Ej. 2.15).

2.105 Se tienen los vectores $\mathbf{U} = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$ y $\mathbf{V} = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$.
(a) ¿Qué valor tiene el producto cruz $\mathbf{U} \times \mathbf{V}$?
(b) ¿Qué valor tiene el producto cruz $\mathbf{V} \times \mathbf{U}$?

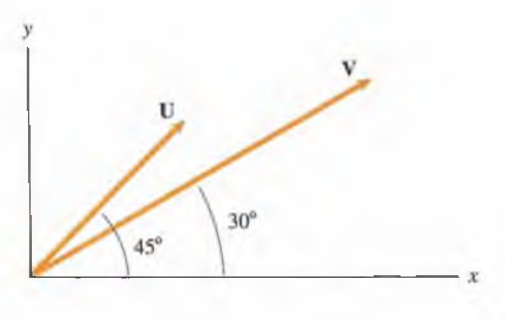
2.106 ¿Qué valor tiene el producto cruz $\mathbf{r} \times \mathbf{F}$ del vector de posición $\mathbf{r} = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ (m) y de la fuerza $\mathbf{F} = 20\mathbf{i} - 40\mathbf{k}$ (N)?

2.107 ¿Qué valor tiene el producto cruz $\mathbf{r} \times \mathbf{F}$ del vector de posición $\mathbf{r} = 4\mathbf{i} - 12\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$ (pies) y de la fuerza $\mathbf{F} = 20\mathbf{i} + 30\mathbf{j} - 10\mathbf{k}$ (lb)?

2.108 Considere los vectores $\mathbf{U} = 6\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$ y $\mathbf{V} = -12\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$.
(a) Determine el producto cruz $\mathbf{U} \times \mathbf{V}$.
(b) ¿Qué se puede concluir respecto a $\mathbf{U}$ y $\mathbf{V}$ por el resultado de la parte (a)?

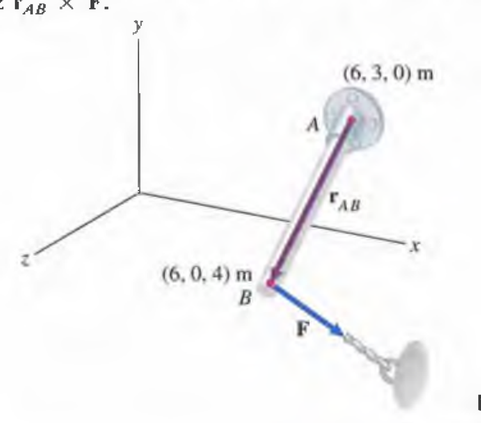
2.109 Los vectores $\mathbf{U} = U_x\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + U_z\mathbf{k}$ y $\mathbf{V} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$ son paralelos. Use el producto cruz para determinar U_x y U_z.

2.110 Se tienen las magnitudes $|\mathbf{U}| = 10$ y $|\mathbf{V}| = 20$.
(a) Use la definición del producto cruz para determinar $\mathbf{U} \times \mathbf{V}$.
(b) Use la definición del producto cruz para determinar $\mathbf{V} \times \mathbf{U}$.
(c) Use la ecuación (2.34) para determinar $\mathbf{U} \times \mathbf{V}$.
(d) Use la ecuación (2.34) para determinar $\mathbf{V} \times \mathbf{U}$.



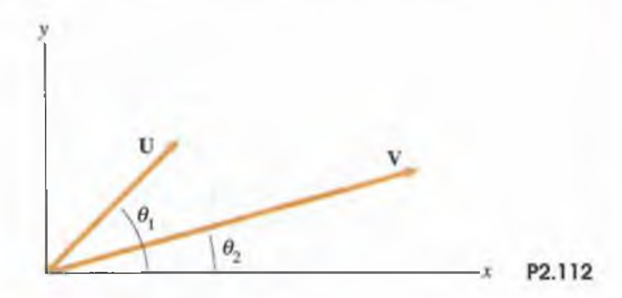
P2.110

2.111 Se tiene la fuerza $\mathbf{F} = 10\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$ (N). Determine el producto cruz $\mathbf{r}_{AB} \times \mathbf{F}$.



P2.111

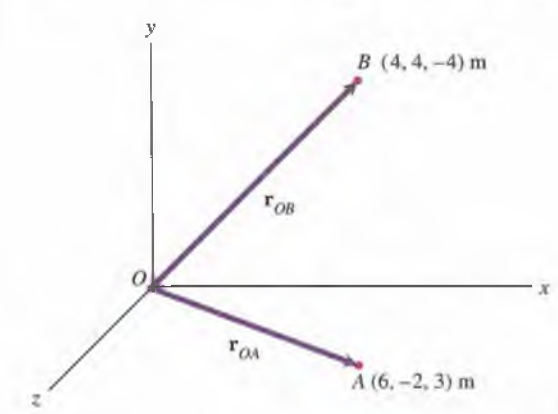
2.112 Demuestre la identidad sen $(\theta_1 - \theta_2) =$ sen $\theta_1 \cos\theta_2 - \cos\theta_1$ sen θ_2 evaluando el producto cruz $\mathbf{U} \times \mathbf{V}$.



P2.112

2.113 Use el producto cruz para determinar las componentes de un vector unitario $\mathbf{e}$ que es perpendicular a los vectores $\mathbf{U} = 3\mathbf{i} - 10\mathbf{j}$ y $\mathbf{V} = -6\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$.

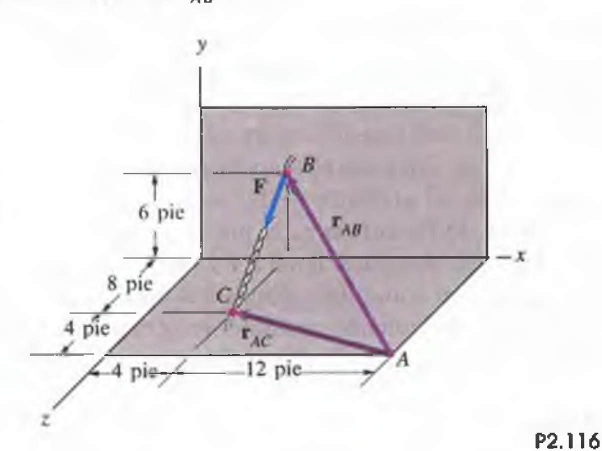
2.114 (a) ¿ Qué valor tiene el producto cruz $\mathbf{r}_{OA} \times \mathbf{r}_{OB}$?
(b) Determine un vector unitario $\mathbf{e}$ perpendicular a $\mathbf{r}_{OA}$ y $\mathbf{r}_{OB}$.



P2.114

2.115 Considere los puntos O, A y B del problema 2.114. Use el producto cruz para determinar la distancia mínima del punto A a la línea OB.

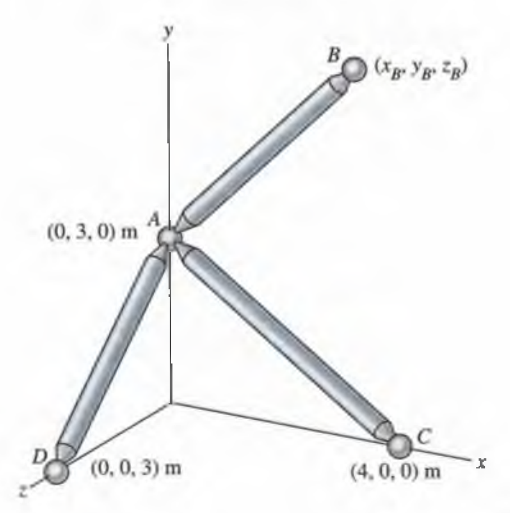
2.116 El cable BC ejerce una fuerza **F** de 1000 lb sobre el gancho en B. Determine $\mathbf{r}_{AB} \times \mathbf{F}$.



P2.116

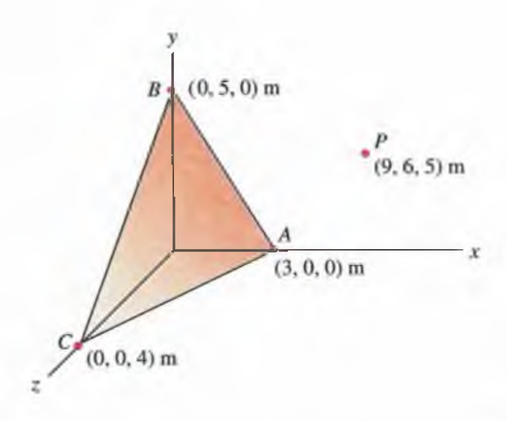
2.117 El cable BC mostrado en el problema 2.116 ejerce una fuerza **F** de 300 lb sobre el gancho en B.
(a) Determine $\mathbf{r}_{AB} \times \mathbf{F}$ y $\mathbf{r}_{AC} \times \mathbf{F}$.
(b) Use la definición del producto cruz para explicar por qué los resultados de la parte (a) son iguales.

2.118 La barra AB tiene 6 metros de largo y es perpendicular a las barras AC y AD. Use el producto cruz para determinar las coordenadas x_B, y_B y z_B del punto B.



P2.118

2.119 Determine la distancia mínima del punto P al plano definido por los puntos A, B y C.



P2.119

2.120 Considere los vectores $\mathbf{U} = 3\mathbf{i} - 10\mathbf{j}$, $\mathbf{V} = -6\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ y $\mathbf{W} = 2\mathbf{i} + 6\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$.
(a) Determine el valor del producto triple mixto $\mathbf{U}\cdot(\mathbf{V} \times \mathbf{W})$ evaluando el producto cruz $\mathbf{V} \times \mathbf{W}$ y formando el producto punto del resultado con el vector **U**.
(b) Determine el valor del producto triple mixto $\mathbf{U}\cdot(\mathbf{V} \times \mathbf{W})$ usando la ecuación (2.36).

2.121 Para los vectores $\mathbf{U} = 6\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$, $\mathbf{V} = 2\mathbf{i} + 7\mathbf{j}$, y $\mathbf{W} = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{k}$, evalúe los siguientes productos triples mixtos: (a) $\mathbf{U}\cdot(\mathbf{V} \times \mathbf{W})$; (b) $\mathbf{W}\cdot(\mathbf{V} \times \mathbf{U})$; (c) $\mathbf{V}\cdot(\mathbf{W} \times \mathbf{U})$.

2.122 Usando las ecuaciones (2.23) y (2.24) demuestre que

$$\mathbf{U} \cdot (\mathbf{V} \times \mathbf{W}) = \begin{vmatrix} U_x & U_y & U_z \\ V_x & V_y & V_z \\ W_x & W_y & W_z \end{vmatrix}.$$

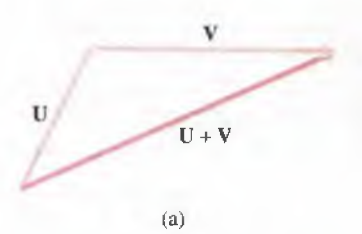
2.123 (a) Usando las definiciones del producto punto y del producto cruz, explique por qué $\mathbf{U}\cdot(\mathbf{U} \times \mathbf{V}) = 0$ para dos vectores **U** y **V** cualesquiera.
(b) Use la ecuación (2.36) para demostrar que $\mathbf{U}\cdot(\mathbf{U} \times \mathbf{V}) = 0$ para dos vectores **U** y **V** cualesquiera.

2.124 Los vectores $\mathbf{U} = \mathbf{i} + U_y\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$, $\mathbf{V} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ y $\mathbf{W} = -3\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ son coplanares (se encuentran en el mismo plano). ¿Qué valor tiene la componente U_y?

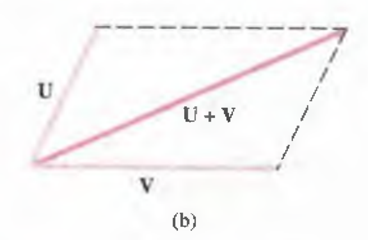
Resumen del capítulo

Una cantidad física descrita completamente por un número real es un **escalar**. Un **vector** tiene tanto **magnitud** como **dirección**, y se representa gráficamente con una flecha cuya longitud es proporcional a su magnitud.

Reglas para operar con vectores



(a)



(b)

La suma de dos vectores se define por la **regla del triángulo** (Fig. a) o la equivalente **regla del paralelogramo** (Fig. b).

El producto de un escalar a y un vector $\mathbf{U}$ es un vector $a\mathbf{U}$ con magnitud $|a||\mathbf{U}|$. Su dirección es la misma que la de $\mathbf{U}$ cuando a es positivo y opuesta a la de $\mathbf{U}$ cuando a es negativo. El producto $(-1)\mathbf{U}$ se escribe $-\mathbf{U}$ y se llama negativo de $\mathbf{U}$. La división de $\mathbf{U}$ entre a es el producto $(1/a)\,\mathbf{U}$.

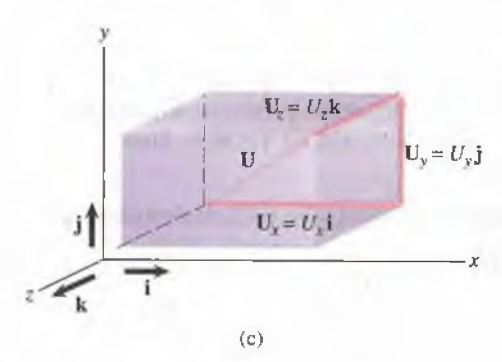
Un **vector unitario** tiene una magnitud igual a 1 y una dirección. Cualquier vector $\mathbf{U}$ se puede expresar como $|\mathbf{U}|\mathbf{e}$, donde $\mathbf{e}$ es un vector unitario con la misma dirección que $\mathbf{U}$. Dividiendo cualquier vector entre su magnitud se obtiene un vector unitario con la misma dirección que el vector.



Componentes cartesianas

Un vector $\mathbf{U}$ se expresa en función de **componentes escalares** como

$$\mathbf{U} = U_x\,\mathbf{i} + U_y\,\mathbf{j} + U_z\,\mathbf{k} \qquad \text{Ec. (2.12)}$$



(c)

(Fig. c). El sistema coordenado es **derecho** (Fig. d): si los dedos de la mano derecha apuntan en la dirección x positiva y luego se cierran hacia la dirección y positiva, el pulgar apuntará en la dirección z. La magnitud de $\mathbf{U}$ es

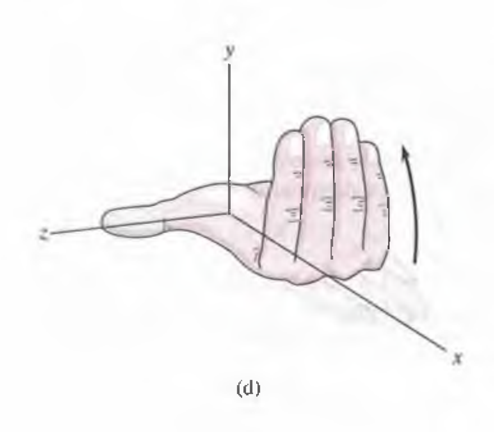
$$|\mathbf{U}| = \sqrt{U_x^2 + U_y^2 + U_z^2}. \qquad \text{Ec. (2.14)}$$

Sean θ_x, θ_y y θ_z los ángulos entre $\mathbf{U}$ y los ejes coordenados positivos (Fig. e). Las componentes escalares de $\mathbf{U}$ son entonces

$$U_x = |\mathbf{U}|\cos\theta_x, \quad U_y = |\mathbf{U}|\cos\theta_y, \quad U_z = |\mathbf{U}|\cos\theta_z. \qquad \text{Ec. (2.15)}$$

Las cantidades $\cos\theta_x$, $\cos\theta_y$ y $\cos\theta_z$ son los **cosenos directores** de $\mathbf{U}$ y satisfacen la relación

$$\cos^2\theta_x + \cos^2\theta_y + \cos^2\theta_z = 1. \qquad \text{Ec. (2.16)}$$



(d)

El **vector de posición** $\mathbf{r}_{AB}$ de un punto A con coordenadas (x_A, y_A, z_A) a un punto B con coordenadas (x_B, y_B, z_B) está dado por

$$\mathbf{r}_{AB} = (x_B - x_A)\,\mathbf{i} + (y_B - y_A)\,\mathbf{j} + (z_B - z_A)\,\mathbf{k}. \qquad \text{Ec. (2.17)}$$

Productos punto

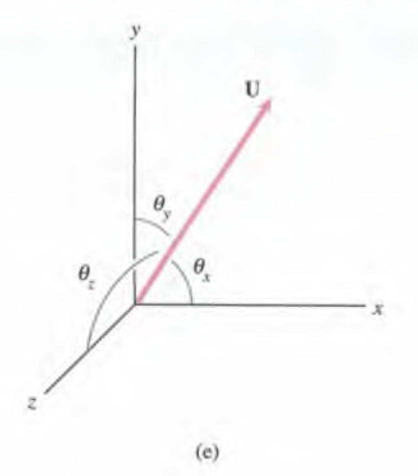
El producto punto de dos vectores $\mathbf{U}$ y $\mathbf{V}$ es

$$\mathbf{U}\cdot\mathbf{V} = |\mathbf{U}|\,|\mathbf{V}|\cos\theta, \qquad \text{Ec. (2.18)}$$

donde θ es el ángulo entre los vectores cuando se colocan cola con cola. El producto punto de dos vectores no nulos es igual a cero si y sólo si los dos vectores son perpendiculares.

En función de componentes escalares,

$$\mathbf{U} \cdot \mathbf{V} = U_x V_x + U_y V_y + U_z V_z. \qquad \textbf{Ec. (2.23)}$$



(c)

Un vector **U** se puede separar en componentes vectoriales $\mathbf{U}_p$ y $\mathbf{U}_n$ paralela y normal a una línea recta L. En función de un vector unitario **e** que es paralelo a L,

$$\mathbf{U}_p = (\mathbf{e} \cdot \mathbf{U})\,\mathbf{e} \qquad \textbf{Ec. (2.26)}$$

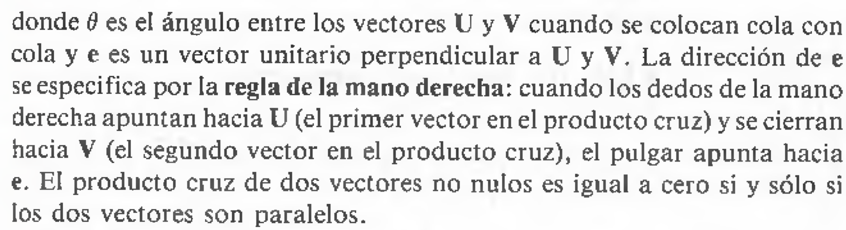
y

$$\mathbf{U}_n = \mathbf{U} - \mathbf{U}_p. \qquad \textbf{Ec. (2.27)}$$

Productos cruz

El producto cruz de dos vectores **U** y **V** es

$$\mathbf{U} \times \mathbf{V} = |\mathbf{U}|\,|\mathbf{V}| \operatorname{sen} \theta\, \mathbf{e}, \qquad \textbf{Ec. (2.28)}$$



donde θ es el ángulo entre los vectores **U** y **V** cuando se colocan cola con cola y **e** es un vector unitario perpendicular a **U** y **V**. La dirección de **e** se especifica por la **regla de la mano derecha**: cuando los dedos de la mano derecha apuntan hacia **U** (el primer vector en el producto cruz) y se cierran hacia **V** (el segundo vector en el producto cruz), el pulgar apunta hacia **e**. El producto cruz de dos vectores no nulos es igual a cero si y sólo si los dos vectores son paralelos.

En función de componentes escalares,

$$\mathbf{U} \times \mathbf{V} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ U_x & U_y & U_z \\ V_x & V_y & V_z \end{vmatrix}. \qquad \textbf{Ec. (2.34)}$$

Productos triples mixtos

El **producto triple mixto** es la operación

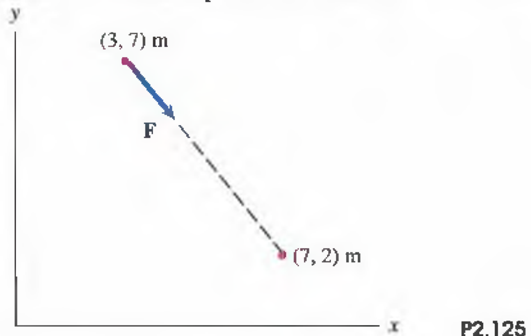
$$\mathbf{U} \cdot (\mathbf{V} \times \mathbf{W}). \qquad \textbf{Ec. (2.35)}$$

En función de componentes escalares,

$$\mathbf{U} \cdot (\mathbf{V} \times \mathbf{W}) = \begin{vmatrix} U_x & U_y & U_z \\ V_x & V_y & V_z \\ W_x & W_y & W_z \end{vmatrix}. \qquad \textbf{Ec. (2.36)}$$

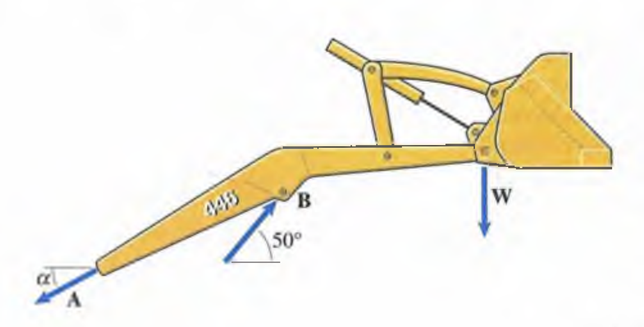
Problemas de repaso

2.125 En la figura P2.125, la magnitud de **F** es de 8 kN. Exprese **F** en función de sus componentes escalares.



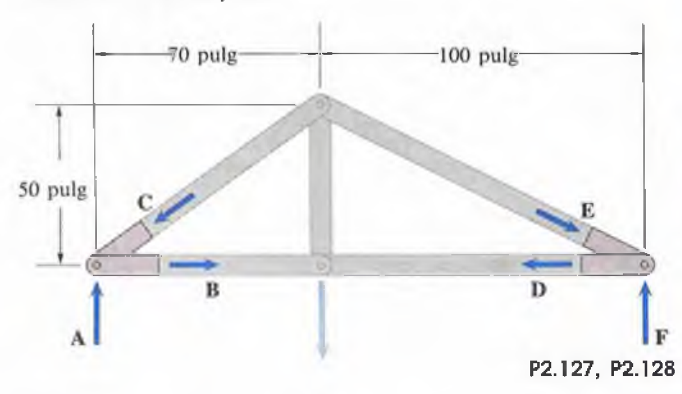
P2.125

2.126 La magnitud de la fuerza vertical **W** ilustrada es de 600 lb y la magnitud de la fuerza **B** es de 1500 lb. Si **A** + **B** + **W** = **0**, determine la magnitud de la fuerza **A** y el ángulo α.



P2.126

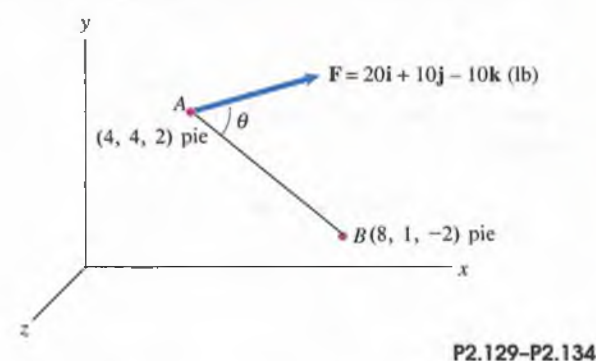
2.127 La magnitud del vector fuerza vertical **A** es de 200 lb. Si **A** + **B** + **C** = **0**, ¿qué valor tienen las magnitudes de los vectores fuerza **B** y **C**?



P2.127, P2.128

2.128 La magnitud del vector fuerza horizontal **D** del problema 2.127 es de 280 lb. Si **D** + **E** + **F** = **0**, ¿qué valor tienen las magnitudes de los vectores fuerza **E** y **F**?

2.129 ¿Qué valor tienen los cosenos directores de **F**?



P2.129–P2.134

2.130 Determine las componentes escalares de un vector unitario paralelo a la línea AB que va de A a B.

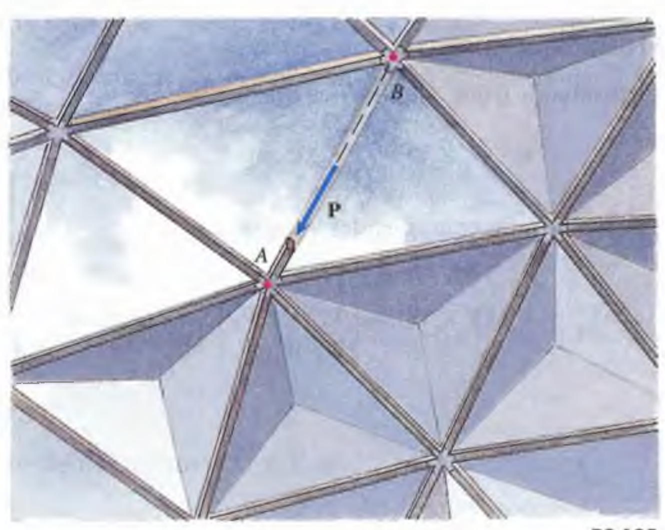
2.131 ¿Qué valor tiene el ángulo θ entre AB y la fuerza **F**?

2.132 Determine la componente vectorial de **F** paralela a la línea AB.

2.133 Determine la componente vectorial de **F** normal a la línea AB.

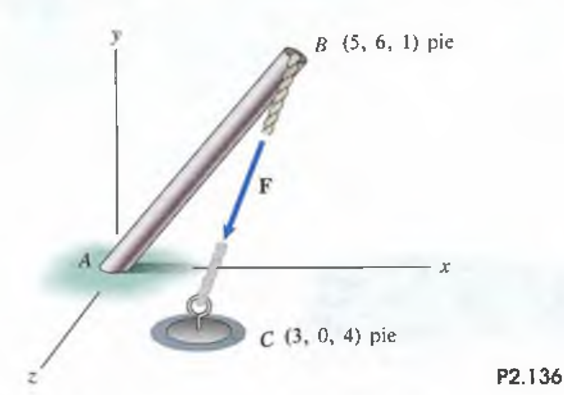
2.134 Determine el vector $\mathbf{r}_{BA} \times \mathbf{F}$, donde $\mathbf{r}_{BA}$ es el vector de posición de B a A.

2.135 La magnitud de la fuerza axial en una de las vigas de un domo geodésico es $|\mathbf{P}| = 7.65$ kN. Las coordenadas cartesianas de los puntos extremos A y B de la viga recta son (−12.4, 22.0, −18.4) m y (−9.2, 24.4, −15.6) m respectivamente. Exprese la fuerza **P** en función de sus componentes escalares.



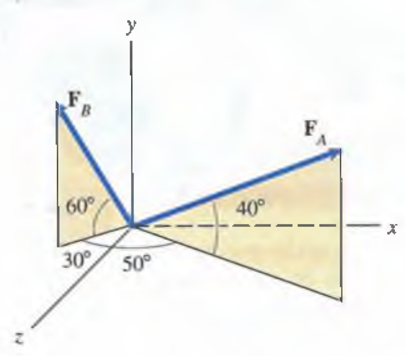
P2.135

2.136 La cuerda ejerce una fuerza de magnitud $|\mathbf{F}| = 200$ lb sobre la parte superior del poste en el punto B.
(a) Determine el vector $\mathbf{r}_{AB} \times \mathbf{F}$, donde $\mathbf{r}_{AB}$ es el vector de posición de A a B.
(b) Determine el vector $\mathbf{r}_{AC} \times \mathbf{F}$, donde $\mathbf{r}_{AC}$ es el vector de posición de A a C.



P2.136

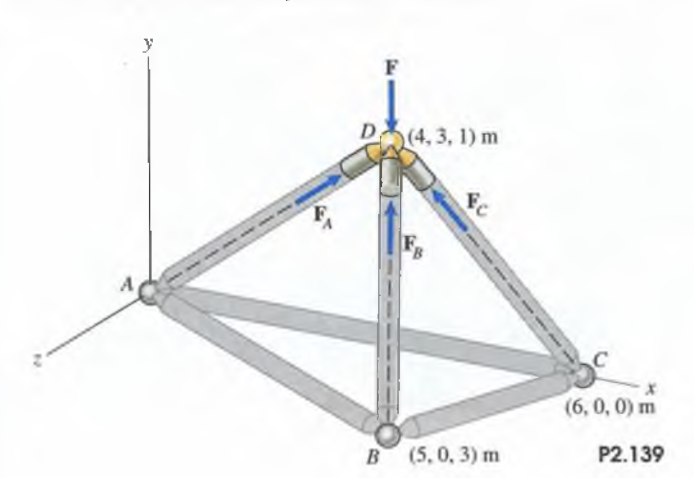
2.137 Se dan las magnitudes $|\mathbf{F}_A| = 600$ N y $|\mathbf{F}_B| = 400$ N. Determine $\mathbf{F}_A + \mathbf{F}_B$.



P2.137

2.138 Suponga que las fuerzas $\mathbf{F}_A$ y $\mathbf{F}_B$ del problema 2.137 tienen la misma magnitud y que $\mathbf{F}_A \cdot \mathbf{F}_B = 600$ N^2. ¿Qué valores tienen $\mathbf{F}_A$ y $\mathbf{F}_B$?

2.139 La magnitud del vector fuerza $\mathbf{F}_B$ es de 2 kN. Expréselo en función de sus componentes escalares.

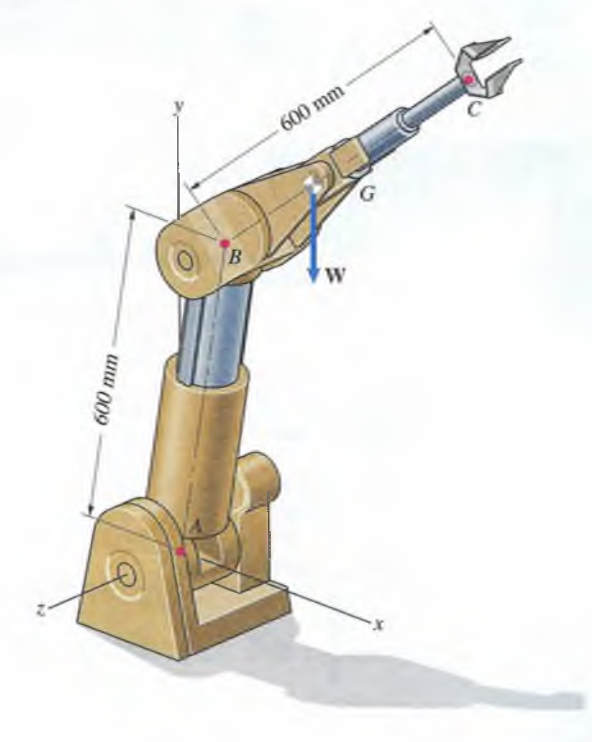


P2.139

2.140 La magnitud del vector fuerza vertical **F** del problema 2.139 es de 6 kN. Determine las componentes vectoriales de **F** paralela y normal a la línea de B a D.

2.141 La magnitud del vector fuerza vertical **F** ilustrado es de 6 kN. Dado que $\mathbf{F} + \mathbf{F}_A + \mathbf{F}_B + \mathbf{F}_C = \mathbf{0}$, ¿cuáles son las magnitudes de $\mathbf{F}_A$, $\mathbf{F}_B$ y $\mathbf{F}_C$?

2.142 La magnitud de la fuerza vertical **W** es de 160 N. Los cosenos directores del vector de posición de A a B son $\cos\theta_x = 0.500$, $\cos\theta_y = 0.866$ y $\cos\theta_z = 0$, y los cosenos directores del vector de posición de B a C son $\cos\theta_x = 0.707$, $\cos\theta_y = 0.619$ y $\cos\theta_z = -0.342$. El punto G es el punto medio de la línea de B a C. Determine el vector $\mathbf{r}_{AG} \times \mathbf{W}$, donde $\mathbf{r}_{AG}$ es el vector de posición de A a G.



P2.142



La suma de las fuerzas que actúan sobre un cuerpo en equilibrio es igual a cero. En vuelo uniforme, el peso de 400 000 lb de un DC-10 y la fuerza aerodinámica de arrastre que resulta de su movimiento a través del aire están equilibradas por el empuje de sus motores y la fuerza de elevación creada por el flujo de aire sobre sus alas. El paso esencial al analizar las fuerzas que actúan sobre un cuerpo es dibujar un diagrama de cuerpo libre, lo que se empezará a hacer en este capítulo.

Capítulo 3

Fuerzas

LOS ingenieros diseñan dispositivos para ejercer y controlar fuerzas. En el pasado los ingenieros diseñaron catapultas para lanzar piedras, y murallas para resistirlas. Los ingenieros modernos diseñan cilindros hidráulicos y motores de reacción para ejercer fuerzas, y estructuras para resistirlas. El primer paso para entender cómo trabajar con fuerzas será aprender a determinar fuerzas que actúen sobre cuerpos en equilibrio.

En el capítulo 2 representamos fuerzas con vectores y usamos la suma vectorial para sumar fuerzas. En este capítulo analizaremos con mayor detalle las fuerzas y presentaremos dos de los conceptos más importantes de la mecánica: el equilibrio y el diagrama de cuerpo libre. Usaremos los diagramas de cuerpo libre para identificar las fuerzas sobre cuerpos y usaremos el equilibrio para determinar fuerzas desconocidas.

3.1 *Tipos de fuerzas*

El concepto de fuerza nos es muy familiar, como se evidencia con palabras de uso diario como *empujar*, *tirar* y *elevar*. En ingeniería se tratan muchos tipos de fuerzas con un gran intervalo de magnitudes (Tabla 3.1), y es necesario familiarizarse con los términos básicos usados para describirlas.



El sobrealimentador *Energia* podría usarse en un programa espacial de E.U.A. y Rusia.

Tabla 3.1 Magnitudes de algunas fuerzas

Tensión en la cinta de un impulsor magnético	2.2 N (0.5 lb)
Fuerza de la atmósfera sobre una superficie de 1 metro cudrado al nivel del mar	1.0×10^5 N (2.2×10^4 lb)
Fuerza de tracción máxima de una locomotora	9.0×10^5 N (2.0×10^5 lb)
Empuje del cohete *Energia*	3.9×10^7 N (8.8×10^6 lb)
Tensión en los cables principales del puente Verrazano-Narrows (Nueva York)	1.1×10^9 N (2.5×10^8 lb)



Las cintas magnéticas se utilizan para almacenar información.

Línea de acción Cuando una fuerza se representa con un vector, la línea recta colineal al vector se denomina **línea de acción** de la fuerza (Fig. 3.1).

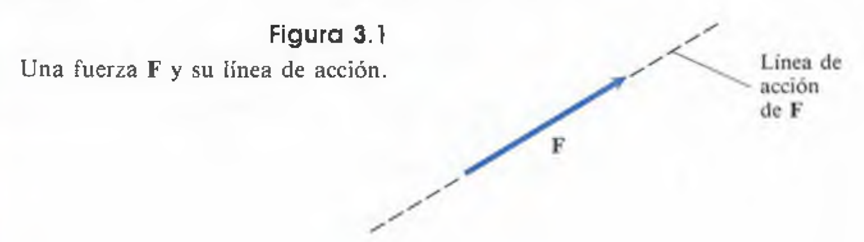


Figura 3.1
Una fuerza **F** y su línea de acción.

Sistemas de fuerzas Un **sistema de fuerzas** es simplemente un conjunto particular de fuerzas. Un sistema de fuerzas es **coplanar** o **bidimensional** si las líneas de acción de las fuerzas están contenidas en un plano. De lo contrario, el sistema es **tridimensional**. Un sistema de fuerzas es **concurrente** si las líneas de acción de las fuerzas se encuentran en un punto (Fig. 3.2a) y **paralelo** si las líneas de acción son paralelas (Fig. 3.2b).

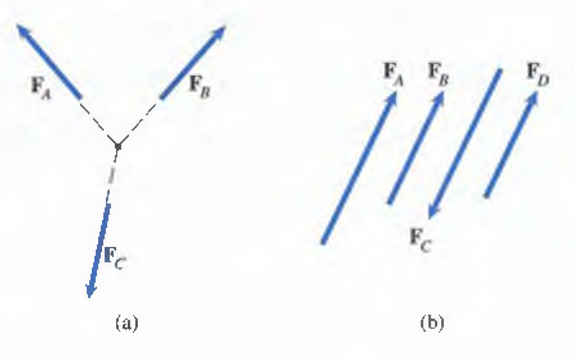


Figura 3.2
(a) Fuerzas concurrentes.
(b) Fuerzas paralelas.

Fuerzas externas e internas Se dice que un cuerpo está sometido a una **fuerza externa** si ésta es ejercida por un cuerpo diferente. Cuando una parte cualquiera de un cuerpo está sometida a una fuerza por otra parte del mismo cuerpo, está sometida a una **fuerza interna**. Estas definiciones requieren que se precise con claridad el cuerpo que se está considerando. Por ejemplo, suponga que usted es el cuerpo. Cuando usted está de pie, el piso, que es un cuerpo diferente, ejerce una fuerza externa sobre sus pies. Si aprieta sus manos, su mano izquierda ejerce una fuerza interna sobre su mano derecha. Sin embargo, si su mano derecha es el cuerpo en consideración, la fuerza ejercida por su mano izquierda es una fuerza externa.

Fuerzas de cuerpo y de superficie Una fuerza que actúa sobre un cuerpo se denomina **fuerza de cuerpo** si actúa sobre el volumen del cuerpo y **fuerza de superficie** si actúa sobre su superficie. La fuerza gravitatoria sobre un cuerpo es una fuerza de cuerpo. Una fuerza de superficie se puede ejercer sobre un cuerpo por contacto con otro cuerpo. Las fuerzas de cuerpo y las de superficie pueden resultar de efectos electromagnéticos.

Fuerzas gravitatorias

Cuando se levanta algo pesado se percibe la fuerza ejercida sobre un cuerpo por la gravedad de la Tierra. La fuerza gravitatoria o peso de un cuerpo se puede representar por medio de un vector (Fig. 3.3).

La magnitud del peso de un cuerpo se relaciona con su masa así

$$|\mathbf{W}| = mg,$$

donde g es la aceleración debida a la gravedad al nivel del mar. Usaremos los valores $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ (SI) y $g = 32.2 \text{ pie/s}^2$ (sistema inglés).

Las fuerzas gravitatorias, y también las electromagnéticas, actúan a distancia. Los cuerpos sobre los que actúan no tienen que estar en contacto con los cuerpos que ejercen las fuerzas. En la sección siguiente analizaremos fuerzas que resultan del contacto entre cuerpos.

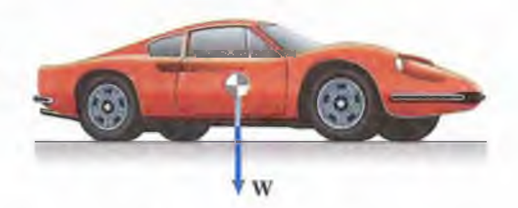


Figura 3.3
Representación del peso de un cuerpo por un vector.

Fuerzas de contacto

Las **fuerzas de contacto** son las fuerzas que resultan del contacto entre cuerpos, por ejemplo al empujar una pared (Fig. 3.4a). La superficie de la mano ejerce una fuerza sobre la superficie de la pared que se puede representar con un vector **F** (Fig. 3.4b). La pared ejerce una fuerza igual y opuesta −**F** sobre la mano (Fig. 3.4c). (Recuerde la tercera ley de Newton, citada en la página 4.) Si duda que la pared ejerce una fuerza sobre la mano, intente empujar la pared montado en patines.

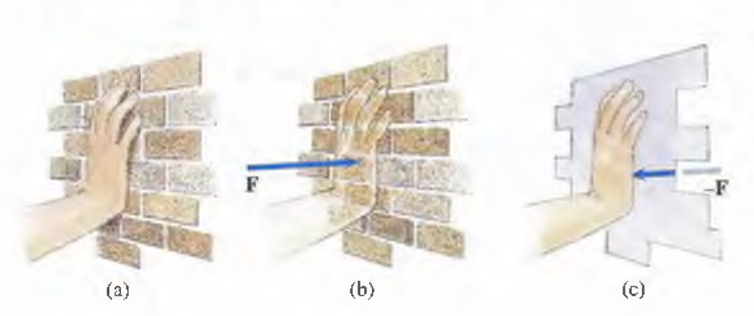


Figura 3.4
(a) Se ejerce una fuerza de contacto sobre una pared al empujar sobre ella.
(b) El vector **F** representa la fuerza que se ejerce sobre la pared.
(c) La pared ejerce una fuerza −**F** sobre la mano.

Trataremos con fuerzas de contacto ejercidas sobre cuerpos por el contacto con las superficies de otros cuerpos y por cuerdas, cables y resortes.

Superficies Considere dos superficies planas en contacto (Fig. 3.5a). La fuerza ejercida sobre la superficie derecha por la superficie izquierda se representa con el vector **F** (Fig. 3.5b). Podemos separar **F** en una componente **N** normal a la superficie y una componente **f** paralela a ésta (Fig. 3.5c). La componente **N** se denomina **fuerza normal** y la componente **f** se denomina **fuerza de fricción**. Si la fuerza de fricción entre dos superficies es despreciable respecto a la fuerza normal, diremos que las superficies son **lisas**. Aquí mostramos sólo la fuerza normal (Fig. 3.5d). Si la fuerza de fricción no se puede despreciar, las superficies son **rugosas**.

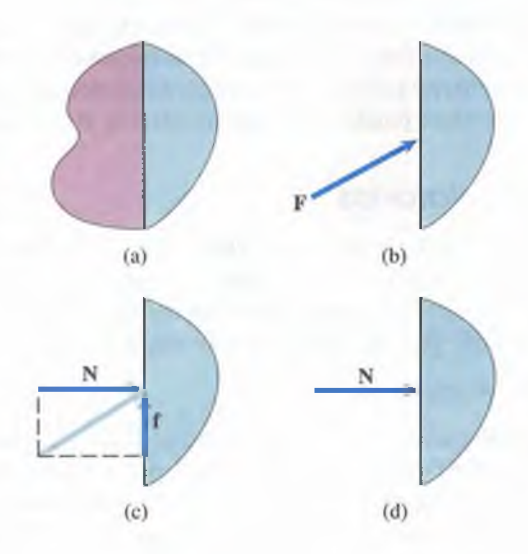
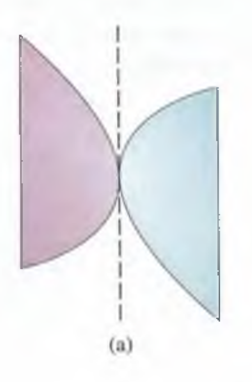


Figura 3.5
(a) Dos superficies planas en contacto.
(b) La fuerza **F** ejercida sobre la superficie derecha.
(c) La fuerza **F** se separa en sus componentes normal y paralela a la superficie.
(d) Sólo se muestra la fuerza normal cuando se desprecia la fricción.

Si las superficies de contacto son curvas (Fig. 3.6a), la fuerza normal y la fuerza de fricción son, respectivamente, perpendicular y paralela al plano tangente a las superficies en su punto común de contacto (Fig. 3.6b).



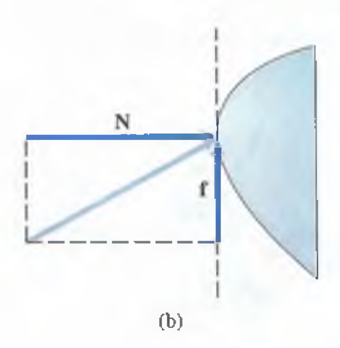
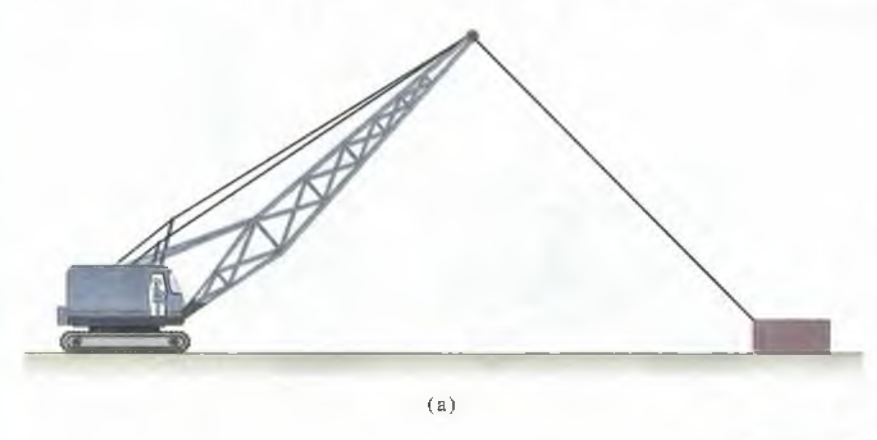


Figura 3.6
(a) Superficies curvas de contacto. La línea discontinua indica el plano tangente a las superficies en su punto de contacto.
(b) La fuerza normal y la fuerza de fricción sobre la superficie derecha.

Cuerdas y cables Se puede ejercer una fuerza de contacto sobre un cuerpo uniéndo una cuerda o un cable al cuerpo y tirando de él. En la figura 3.7(a), el cable de la grúa está unido a un contenedor de materiales de construcción. La fuerza que el cable ejerce sobre el contenedor se puede representar con un vector **T** (Fig. 3.7b). La magnitud de **T** se denomina **tensión** en el cable y la línea de acción de **T** es colineal al cable. El cable ejerce una fuerza igual y opuesta **−T** sobre la grúa (Fig. 3.7c).



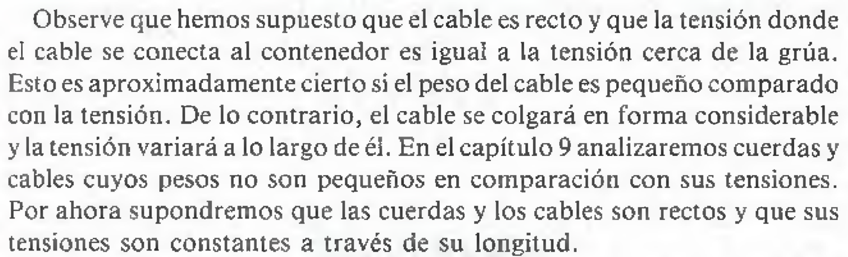
(a)

(b)

(c)

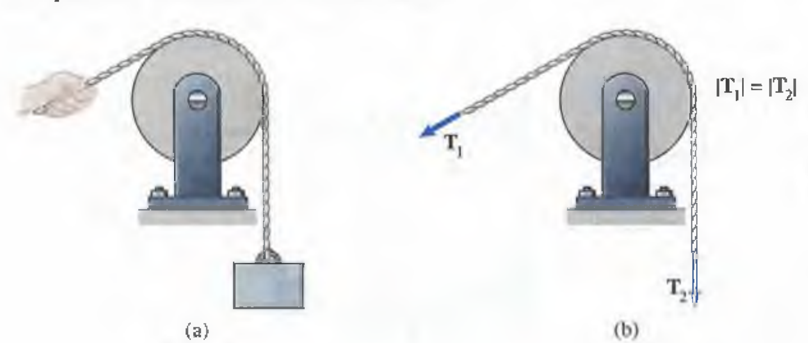
Figura 3.7

(a) Grúa con su cable unido a un contenedor.
(b) Fuerza **T** ejercida por el cable sobre el contenedor.
(c) Fuerza **−T** ejercida por el cable sobre la grúa.



Observe que hemos supuesto que el cable es recto y que la tensión donde el cable se conecta al contenedor es igual a la tensión cerca de la grúa. Esto es aproximadamente cierto si el peso del cable es pequeño comparado con la tensión. De lo contrario, el cable se colgará en forma considerable y la tensión variará a lo largo de él. En el capítulo 9 analizaremos cuerdas y cables cuyos pesos no son pequeños en comparación con sus tensiones. Por ahora supondremos que las cuerdas y los cables son rectos y que sus tensiones son constantes a través de su longitud.

Una **polea** es una rueda con un borde ranurado que se puede usar para cambiar la dirección de una cuerda o de un cable (Fig. 3.8a). Por ahora supondremos que la tensión es la misma en ambos lados de una polea (Fig. 3.8b). Esto es cierto, por lo menos de manera aproximada, cuando la polea puede girar libremente y la cuerda o el cable es estacionario o bien hace girar la polea a una velocidad constante.



(a) (b)

Figura 3.8

(a) Una polea cambia la dirección de una cuerda o un cable.
(b) Por ahora, se debe suponer que las tensiones a cada lado de la polea son iguales.

Resortes Los resortes se usan para ejercer fuerzas de contacto en dispositivos mecánicos, por ejemplo en la suspensión de vehículos (Fig. 3.9). Consideremos un resorte cuya **longitud no estirada**, es decir la longitud del resorte cuando sus extremos están sueltos, es L_0 (Fig. 3.10a). Cuando el resorte se estira una longitud L mayor que L_0 (Fig. 3.10b), jalará sobre el cuerpo al que está unido con una fuerza **F** (Fig. 3.10c). El cuerpo ejerce una fuerza igual y opuesta **−F** sobre el resorte (Fig. 3.10d).

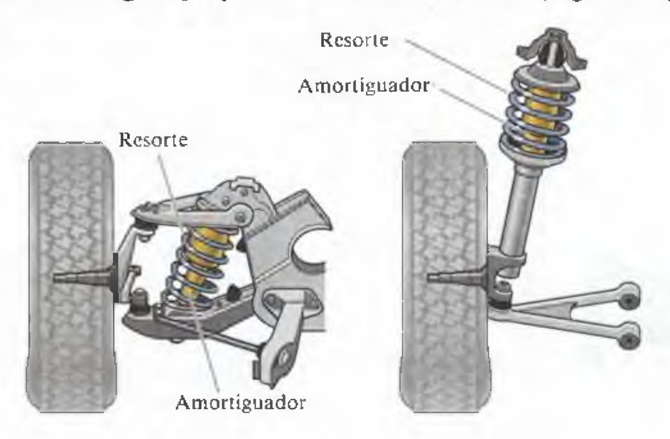


Figura 3.9
Resortes en la suspensión de un auto. El dispositivo de la derecha se llama soporte MacPherson.

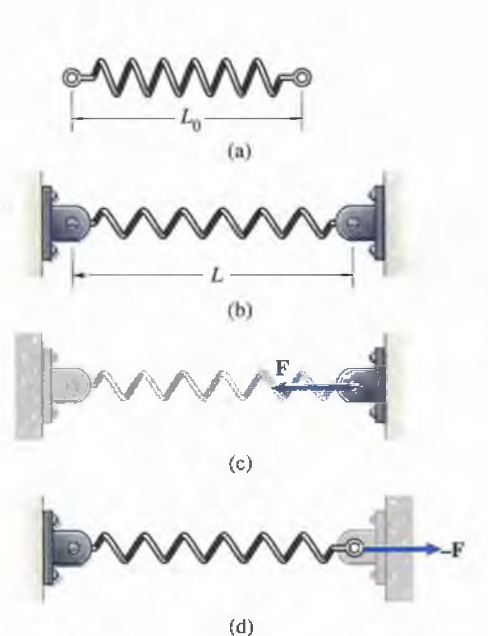


Figura 3.10
(a) Resorte de longitud no estirada igual a L_0.
(b) El resorte estirado a una longitud $L > L_0$.
(c, d) Fuerza **F** ejercida por el resorte y fuerza **−F** sobre el resorte.

Cuando el resorte se comprime una longitud L menor que L_0 (Figs. 3.11a, b), empuja sobre el cuerpo con una fuerza **F** y el cuerpo ejerce una fuerza igual y opuesta **−F** sobre el resorte (Fig. 3.11c, d). Si éste se comprime demasiado, puede pandearse (Fig. 3.11e). Un resorte diseñado para

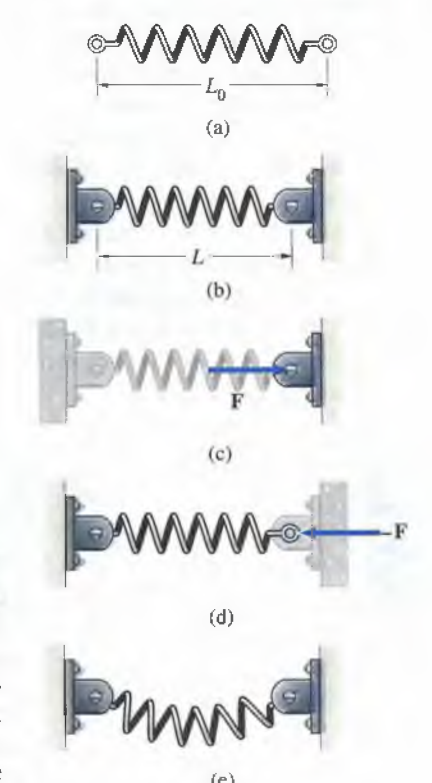


Figura 3.11
(a) Resorte de longitud L_0.
(b) El resorte comprimido a una longitud $L < L_0$.
(c, d) El resorte empuja sobre un cuerpo con una fuerza **F** y el cuerpo ejerce una fuerza **−F** sobre el resorte.
(e) Un resorte se pandeará si se comprime demasiado.

ejercer una fuerza al comprimirse suele tener un soporte lateral para prevenir el pandeo; por ejemplo, suele encerrársele en un cilindro. En las suspensiones de automóviles mostradas en la figura 3.9, los amortiguadores dentro del resorte impiden que éste se pandee.

La magnitud de la fuerza ejercida por un resorte depende de su material, su diseño y de cuánto varía con respecto a su longitud original. Cuando el cambio de longitud no es muy grande en comparación con la longitud no estirada, los resortes que suelen usarse en dispositivos mecánicos ejercen una fuerza aproximadamente proporcional al cambio de longitud:

$$|\mathbf{F}| = k|L - L_0|. \tag{3.1}$$

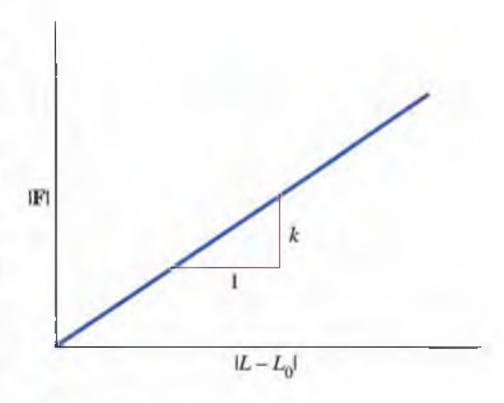


Figura 3.12
La gráfica de la fuerza ejercida por un resorte lineal en función de su alargamiento o contracción es una línea recta con pendiente k.

Como la fuerza es una función lineal del cambio de longitud (Fig. 3.12), un resorte que cumple con esta relación se denomina **resorte lineal**. El valor de la **constante del resorte** k depende del material y del diseño del resorte. Sus dimensiones son (fuerza)/(longitud). Observe en la ecuación (3.1) que k es igual a la magnitud de la fuerza requerida para estirar o comprimir el resorte una unidad de longitud.

Suponga que la longitud no estirada de un resorte es $L_0 = 1$ m y $k = 3000$ N/m. Si el resorte se estira hasta alcanzar una longitud $L = 1.2$ m, la magnitud de la fuerza que ejerce es

$$k|L - L_0| = 3000\,(1.2 - 1) = 600 \text{ N}.$$

Aunque es cierto que los resortes suelen utilizarse en dispositivos mecánicos, nos interesan por una razón mucho más general: sirven para *modelar* situaciones en que las fuerzas dependen de los desplazamientos. Por ejemplo, la fuerza necesaria para flexionar la viga de acero de la figura 3.13(a) es una función lineal del desplazamiento δ,

$$|\mathbf{F}| = k\delta,$$

si δ no es muy grande. Así, representamos el comportamiento debido a la fuerza de flexión de la viga con un resorte lineal (Fig. 3.13b). Esto revela una técnica poderosa: analizar estructuras complicadas modelándolas como conjuntos de pequeños elementos conectados por resortes lineales.

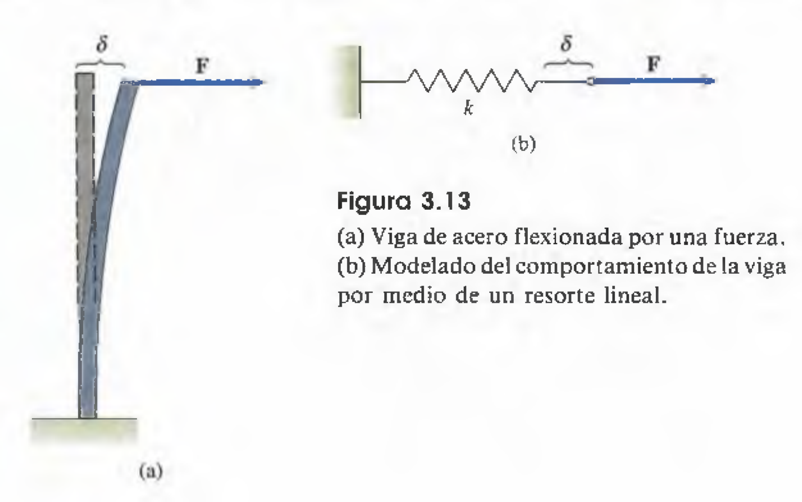


Figura 3.13
(a) Viga de acero flexionada por una fuerza.
(b) Modelado del comportamiento de la viga por medio de un resorte lineal.

3.2 *Equilibrio y diagramas de cuerpo libre*

La estática es el estudio de cuerpos en equilibrio. En la conversación diaria, "equilibrio" significa un estado invariable, es decir, una situación balanceada. Antes de explicar con precisión qué significa este término en mecánica, consideremos algunos ejemplos. Los muebles de una habitación y una persona inmóvil y de pie en esa habitación están en equilibrio. Si un tren viaja a velocidad constante en una trayectoria recta, los cuerpos que están en reposo con respecto al tren, como una persona de pie en el pasillo de éste, se hallan en equilibrio (Fig. 3.14a). La persona de pie en la habitación y la persona de pie en el pasillo del tren no sufren aceleraciones. Sin embargo, si el tren aumenta o disminuye su velocidad, la persona de pie en el pasillo ya no estará en equilibrio y podría caerse (Fig. 3.14b).

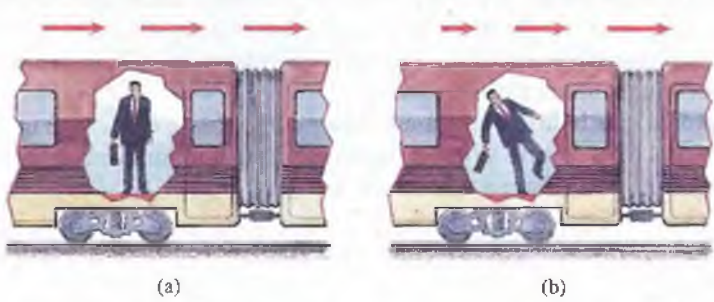


Figura 3.14
(a) Mientras el tren se mueve a velocidad constante, una persona de pie en el pasillo está en equilibrio.
(b) Si el tren acelera, la persona ya no está en equilibrio.

Decimos que un cuerpo está en **equilibrio** sólo si cada punto del cuerpo tiene la misma velocidad constante, denominada **traslación uniforme.** La velocidad debe medirse respecto a un marco de referencia en el que sean válidas las leyes de Newton, es decir, respecto a un **marco de referencia inercial**. En la mayoría de las aplicaciones de ingeniería, la velocidad se puede medir respecto a la superficie de la Tierra.

La suma vectorial de las fuerzas externas que actúan sobre un cuerpo en equilibrio es igual a cero. Usaremos el símbolo $\Sigma \mathbf{F}$ para denotar la suma de las fuerzas externas. Así, cuando un cuerpo está en equilibrio,

$$\boxed{\Sigma \mathbf{F} = \mathbf{0}.} \tag{3.2}$$

En ocasiones, esta **ecuación de equilibrio** se usa para determinar fuerzas desconocidas que actúan sobre un cuerpo en equilibrio. Lo primero es dibujar un diagrama de cuerpo libre para identificar las fuerzas externas que actúan sobre el cuerpo. El diagrama de cuerpo libre es una herramienta esencial de la mecánica. Con él se centra la atención en el cuerpo de interés, y se identifican las fuerzas externas que actúan sobre él. En estática nos interesarán sólo cuerpos en equilibrio, aunque los diagramas de cuerpo libre se usan en dinámica para analizar los movimientos de los cuerpos.

El diagrama de cuerpo libre es un concepto sencillo. Es el dibujo de un cuerpo y de las fuerzas externas que actúan sobre él, sin incluir *nada* aparte del cuerpo de interés; muestra el cuerpo aislado o liberado de su entorno. El dibujo de un **diagrama de cuerpo libre** consta de tres pasos:

1. *Identificar el cuerpo por aislar.* Como se verá, la elección suele estar dictada por las fuerzas particulares que se quiere determinar.

2. *Dibujar un croquis del cuerpo aislado de su entorno y mostrar las dimensiones y ángulos pertinentes.* El dibujo debe ser razonablemente preciso, pero pueden omitirse detalles irrelevantes.
3. *Dibujar los vectores que representen todas las fuerzas externas que actúen sobre el cuerpo aislado y designarlos apropiadamente.* No se debe olvidar incluir la fuerza gravitatoria, a menos que intencionalmente no se considere.

A menudo debe elegirse un sistema de coordenadas para expresar las fuerzas sobre el cuerpo aislado en función de sus componentes. Es conveniente elegir el sistema de coordenadas antes de dibujar el diagrama de cuerpo libre, pero en ciertos casos la mejor elección de un sistema de coordenadas no será notoria hasta después de dibujar el diagrama.

Un ejemplo sencillo mostrará cómo elegir los diagramas de cuerpo libre para determinar fuerzas particulares; recuerde que se debe distinguir con cuidado entre fuerzas externas e internas. En la figura 3.15 dos bloques en reposo de igual peso W están suspendidos por medio de cables. El sistema está en equilibrio. Se quiere determinar las tensiones en los dos cables.

Figura 3.15
Bloques en reposo suspendidos por cables.

Para determinar la tensión en el cable AB aislamos un "cuerpo" que consista en el bloque inferior y parte del cable AB (Fig. 3.16a). Luego, ¿qué fuerzas se pueden ejercer sobre este cuerpo aislado por cuerpos no incluidos en el diagrama? La Tierra ejerce una fuerza gravitatoria de magnitud W sobre el bloque, y en el sitio donde "cortamos" el cable AB éste se encuentra sometido a una fuerza de contacto igual a la tensión en el cable (Fig. 3.16b). Las flechas indican las direcciones de las fuerzas. El escalar W es el peso del bloque y T_{AB} es la tensión en el cable AB. El peso de la parte del cable incluida en el diagrama de cuerpo libre puede despreciarse si se compara con el peso del bloque.

Como el diagrama de cuerpo libre está en equilibrio, la suma de las fuerzas externas es cero. La ecuación de equilibrio se obtiene en función de un sistema coordenado con el eje y dirigido hacia arriba (Fig. 3.16c):

$$\Sigma \mathbf{F} = T_{AB}\,\mathbf{j} - W\,\mathbf{j} = (T_{AB} - W)\,\mathbf{j} = \mathbf{0}.$$

En consecuencia, la tensión en el cable AB es $T_{AB} = W$.

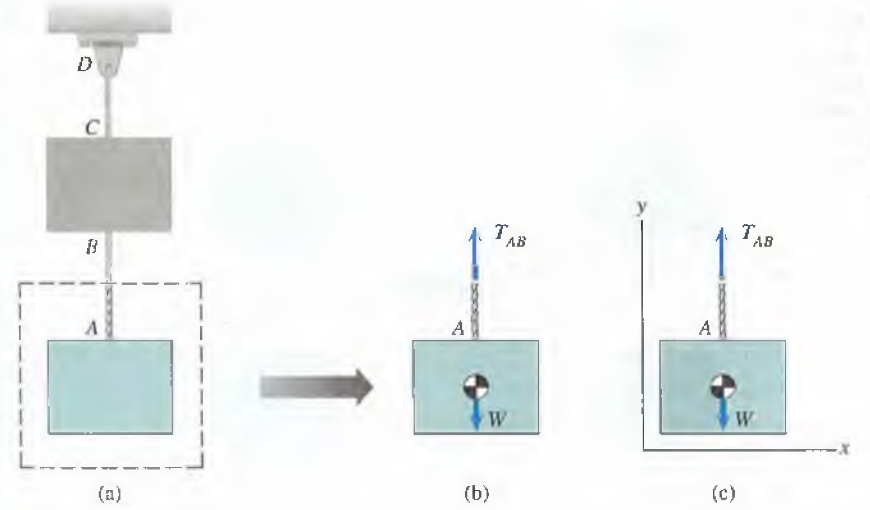


Figura 3.16
(a) Aislamiento del bloque inferior y parte del cable AB.
(b) La indicación de las fuerzas exteriores completa el diagrama de cuerpo libre.
(c) Introducción de un sistema de coordenadas.

Podemos determinar ahora la tensión en el cable CD aislando el bloque superior (Fig. 3.17a). Las fuerzas exteriores son el peso del bloque superior y las tensiones en los dos cables (Fig. 3.17b). Para este caso obtenemos la ecuación de equilibrio

$$\Sigma \mathbf{F} = T_{CD}\,\mathbf{j} - T_{AB}\,\mathbf{j} - W\,\mathbf{j} = (T_{CD} - T_{AB} - W)\,\mathbf{j} = \mathbf{0}.$$

$T_{AB} = W$, encontramos que $T_{CD} = 2W$.

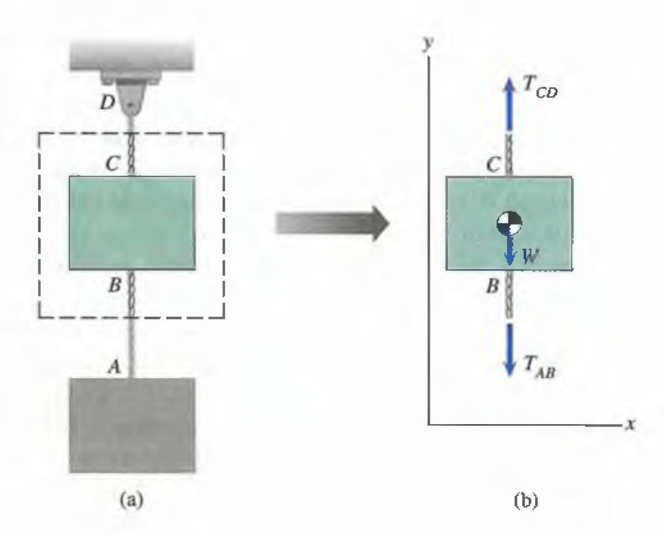


Figura 3.17
(a) Aislamiento del bloque superior para determinar la tensión en el cable CD.
(b) Diagrama de cuerpo libre del bloque superior.

Podríamos también haber determinado la tensión en el cable CD tratando los dos bloques y el cable AB como un solo cuerpo (Figs. 3.18a, b). La ecuación de equilibrio es

$$\Sigma \mathbf{F} = T_{CD}\,\mathbf{j} - W\,\mathbf{j} - W\,\mathbf{j} = (T_{CD} - 2W)\,\mathbf{j} = \mathbf{0},$$

y obtenemos de nuevo $T_{CD} = 2W$.

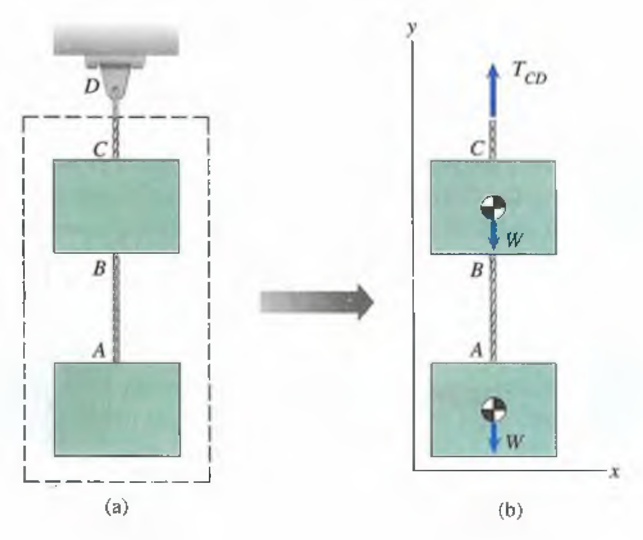


Figura 3.18
(a) Alternativa para determinar la tensión en el cable CD.
(b) Diagrama de cuerpo libre de ambos bloques y del cable AB.

¿Por qué la tensión en el cable AB no aparece en el diagrama de cuerpo libre de la figura 3.18(b)? Recuerde que en los diagramas de cuerpo libre sólo se muestran fuerzas externas. Como en este caso el cable AB es parte del diagrama de cuerpo libre, las fuerzas que ejerce sobre los bloques superiores e inferiores son fuerzas internas.

3.3 *Sistemas bidimensionales de fuerzas*

Suponga que el sistema de fuerzas externas que actúan sobre un cuerpo en equilibrio es bidimensional (coplanar). Orientando un sistema coordenado de manera que las fuerzas queden en el plano x-y, podemos expresar la suma de las fuerzas externas como

$$\Sigma \mathbf{F} = (\Sigma F_x)\,\mathbf{i} + (\Sigma F_y)\,\mathbf{j} = \mathbf{0},$$

donde ΣF_x y ΣF_y son las sumas de las componentes x y y de las fuerzas. Esta ecuación se satisface si y sólo si

$$\boxed{\Sigma F_x = 0, \qquad \Sigma F_y = 0.}$$

Obtenemos así dos ecuaciones de equilibrio. Cada una de las sumas de las componentes x y y de las fuerzas externas que actúan sobre un cuerpo en equilibrio debe ser igual a cero.

Los ejemplos siguientes presentan situaciones en las cuales se pueden usar las ecuaciones (3.3) para determinar fuerzas desconocidas que actúan sobre cuerpos en equilibrio. Se requiere efectuar dos pasos:

1. Dibujar un diagrama de cuerpo libre. *El cuerpo por aislar debe ser tal que conduzca a un diagrama de cuerpo libre donde se incluyan las fuerzas conocidas y las que se quieren determinar.*

2. Establecer las ecuaciones de equilibrio. *Fije un sistema coordenado y use la ecuación (3.3) para obtener expresiones que relacionen las fuerzas conocidas con las desconocidas.*

Ejemplo 3.1

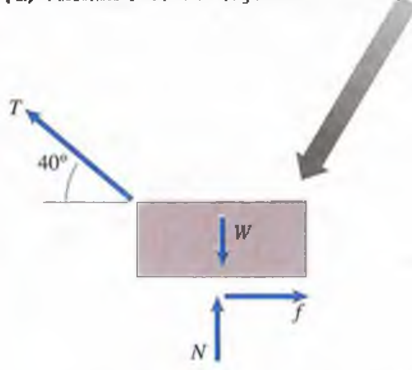
El cable de la grúa de la figura 3.19 está unido a un cajón neumático en reposo de masa igual a 300 kg. La tensión en el cable es de 1 kN. Determine las fuerzas normal y de fricción ejercidas sobre el cajón por el suelo.

Figura 3.19

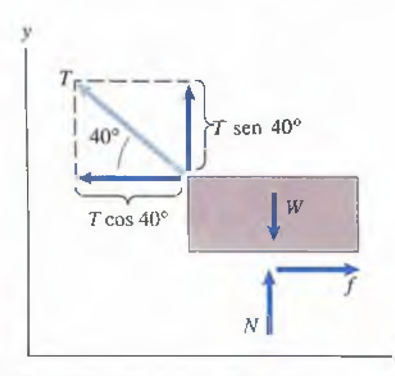




(a) Aislamiento del cajón neumático.



(b) El diagrama de cuerpo libre completo muestra las fuerzas externas conocidas y desconocidas.



(c) Introducción de un sistema coordenado y separación de T en sus componentes.

ESTRATEGIA

Como el cajón está en equilibrio, podemos determinar las fuerzas normal y de fricción dibujando su diagrama de cuerpo libre y usando las ecuaciones (3.3).

SOLUCIÓN

Dibujo del diagrama de cuerpo libre Aislamos el cajón (Fig. a) de su entorno y luego completamos el diagrama de cuerpo libre mostrando las fuerzas externas que actúan sobre él (Fig. b). Las fuerzas son el peso $W = mg = (300\ \text{kg})(9.81\ \text{m/s}^2) = 2943\ \text{N}$, la fuerza $T = 1000$ N ejercida por el cable, y la fuerza normal N y la fuerza f de fricción ejercida por el suelo.

Aplicación de las ecuaciones de equilibrio Estableciendo el sistema coordenado que se muestra en la figura (c) al descomponer la fuerza ejercida por el cable en sus componentes x y y, obtenemos las ecuaciones de equilibrio

$$\Sigma F_x = f - T\cos 40° = 0,$$

$$\Sigma F_y = T\,\text{sen}\,40° + N - W = 0.$$

La fuerza de fricción es

$$f = T\cos 40° = (1000)\cos 40° = 766\ \text{N},$$

y la fuerza normal es

$$N = W - T\,\text{sen}\,40° = 2943 - (1000)\,\text{sen}\,40° = 2300\ \text{N}.$$

COMENTARIOS

Siempre se debe tratar de entender el significado físico de las ecuaciones utilizadas. En este ejemplo, podemos ver en el diagrama de cuerpo libre (Fig. b) que el cajón estará en equilibrio sólo si la fuerza de fricción está equilibrada por la componente horizontal de la fuerza ejercida por el cable: $f = T\cos 40°$. Podemos ver también que la fuerza normal y la componente vertical de la fuerza ejercida por el cable deben equilibrar al peso del cajón: $N + T\,\text{sen}\,40° = W$. Éstas son las mismas ecuaciones de equilibrio que obtuvimos de manera formal haciendo las sumas de las fuerzas en las direcciones x y y iguales a cero.

Ejemplo 3.2

El motor (Fig. 3.20) está suspendido por un sistema de cables. La masa del motor es de 200 kg. ¿Qué valores tienen las tensiones en los cables AB y AC?

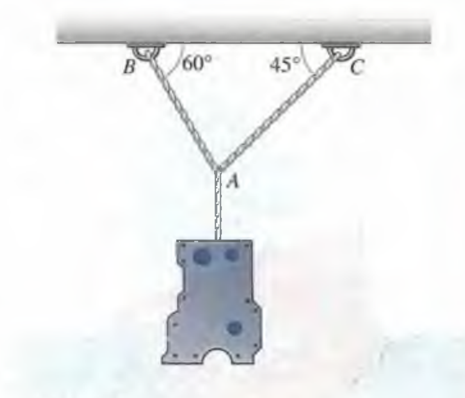


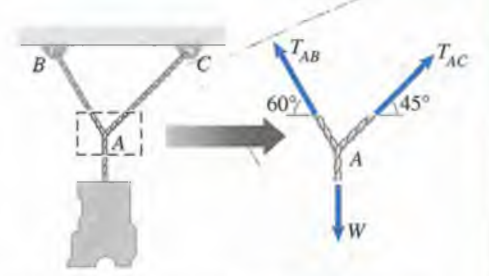
Figura 3.20

ESTRATEGIA

Necesitamos un diagrama de cuerpo libre en el que se muestren las fuerzas que queremos determinar. Aislando parte del sistema de cables cerca del punto A, donde se unen los cables, obtenemos un diagrama de cuerpo libre que está sometido al peso del motor y a las tensiones desconocidas en los cables AB y AC.

SOLUCIÓN

Dibujo del diagrama de cuerpo libre Aislando parte del sistema de cables cerca del punto A (Fig. a), se obtiene un diagrama de cuerpo libre sometido al peso del motor $W = mg = (200 \text{ kg})(9.81 \text{ m/s}^2) = 1962$ N y a las tensiones en los cables AB y AC (Fig. b).



(a) Aislamiento de parte del sistema de cables. **(b)** Diagrama de cuerpo libre completo.

Aplicación de las ecuaciones de equilibrio Seleccionamos el sistema coordenado de la figura (c) y descomponemos las tensiones de los cables en sus componentes x y y. Las ecuaciones de equilibrio resultantes son

$$\Sigma F_x = T_{AC} \cos 45° - T_{AB} \cos 60° = 0,$$

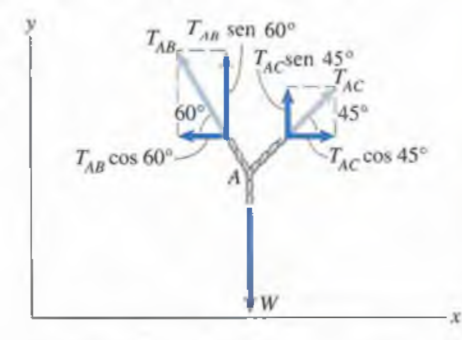
$$\Sigma F_y = T_{AC} \operatorname{sen} 45° + T_{AB} \operatorname{sen} 60° - 1962 = 0.$$

Al resolver estas ecuaciones, las tensiones son $T_{AB} = 1436$ N y $T_{AC} = 1016$ N.

Solución alternativa. Podemos determinar las tensiones en los cables de otra manera que nos ayudará también a visualizar las condiciones de equilibrio. Como la suma de las tres fuerzas que actúan en el diagrama de cuerpo libre es igual a cero, los vectores forman un polígono cerrado cuando se colocan uno a continuación del otro (Fig. d). Se puede ver que la suma de los componentes verticales de la tensión equilibra al peso y que las componentes horizontales de las tensiones se deben equilibrar entre sí. El ángulo opuesto al peso W en el triángulo es $180° - 30° - 45° = 105°$. Al aplicar la ley de los senos,

$$\frac{\operatorname{sen} 45°}{T_{AB}} = \frac{\operatorname{sen} 30°}{T_{AC}} = \frac{\operatorname{sen} 105°}{1962},$$

obtenemos $T_{AB} = 1436$ N y $T_{AC} = 1016$ N.



(c) Selección de un sistema coordenado y descomposición de las fuerzas en componentes.

(d) Triángulo formado por la suma de las tres fuerzas.

COMENTARIOS

¿Cómo escogimos el diagrama de cuerpo libre que nos permitió determinar las tensiones desconocidas en los cables? No hay reglas específicas para ello. Usted aprenderá a hacerlo con los ejemplos que presentaremos, pero siempre encontrará situaciones nuevas. Quizá sea necesario ensayar varios diagramas de cuerpo libre antes de encontrar el que proporcione la información requerida. Recuerde que las fuerzas que se quieren determinar deben aparecer como fuerzas externas en el diagrama de cuerpo libre, y que el objetivo es obtener un número de ecuaciones de equilibrio igual al número de fuerzas desconocidas.

Ejemplo 3.3



Figura 3.21

Una caja de 300 lb se mantiene en equilibrio en la bodega de un barco inclinado (Fig. 3.21), con ayuda de una cuerda elástica en el lado izquierdo de la caja. (La cuerda floja en el lado derecho de la caja ejerce una fuerza despreciable.) La cuerda se comporta como un resorte lineal con constante $k = 200$ lb/pie y su longitud sin estirar es de 5 pies. Desprecie la fricción.

(a) Determine la tensión en la cuerda y la fuerza normal ejercida sobre la caja por el piso de la bodega.

(b) ¿Cuál es la longitud de la cuerda estirada?

ESTRATEGIA

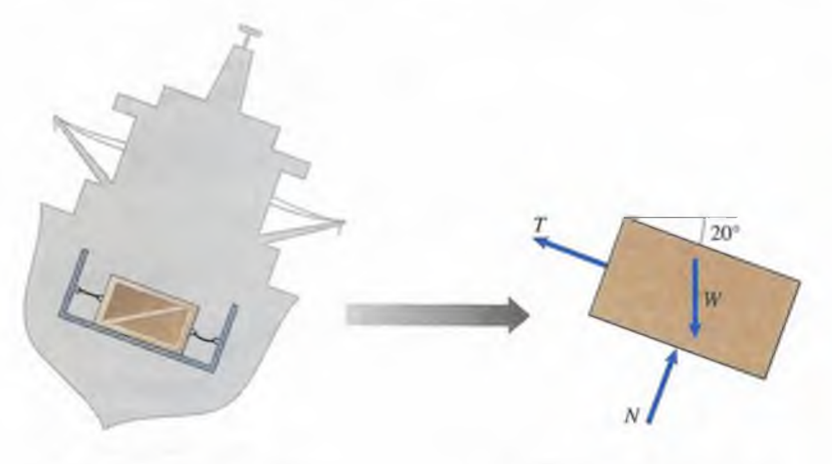
(a) La caja está fija respecto al barco y suponemos que éste se halla en reposo, por lo que la caja está en equilibrio. Para determinar las fuerzas ejercidas sobre la caja, debemos dibujar su diagrama de cuerpo libre y aplicar las ecuaciones de equilibrio. Este ejemplo sugiere dos posibles orientaciones para el sistema coordenado. ¿Deben los ejes ser horizontal y vertical o paralelo y perpendicular al piso? Usaremos ambas orientaciones con el fin de compararlas.

(b) Una vez que se ha determinado la tensión en la cuerda, podemos usar la ecuación (3.1) para calcular su longitud estirada.

SOLUCIÓN

(a) Para determinar la tensión en la cuerda y la fuerza normal sobre la caja se deben completar dos pasos.

Dibujo del diagrama de cuerpo libre Aislamos la caja de su entorno (Fig. a) y completamos el diagrama de cuerpo libre mostrando el peso W, la fuerza T ejercida por la cuerda y la fuerza normal N ejercida por el piso (Fig. b).



(a) Aislamiento del cajón.

(b) Diagrama de cuerpo libre completo.

Aplicación de las ecuaciones de equilibrio Alineando el sistema coordenado como se muestra en la figura (c) y descomponiendo T y N en sus componentes x y y, obtenemos las ecuaciones de equilibrio

$$\Sigma F_x = N \operatorname{sen} 20^\circ - T \cos 20^\circ = 0,$$

$$\Sigma F_y = N \cos 20^\circ + T \operatorname{sen} 20^\circ - W = 0.$$

Si multiplicamos la primera ecuación por sen 20° y la segunda por cos 20° y las sumamos, encontramos que la fuerza normal es

$$N = W \cos 20^\circ = (300) \cos 20^\circ = 281.9 \text{ lb}.$$

Ahora podemos resolver la primera ecuación de equilibrio y obtener la tensión en el resorte:

$$T = N \frac{\operatorname{sen} 20^\circ}{\cos 20^\circ} = (281.9) \frac{\operatorname{sen} 20^\circ}{\cos 20^\circ} = 102.6 \text{ lb}.$$

Solución alternativa. Si alineamos el sistema coordenado como se muestra en la figura (d) y separamos el peso W en sus componentes x y y, obtenemos las ecuaciones de equilibrio

$$\Sigma F_x = W \operatorname{sen} 20^\circ - T = 0,$$

$$\Sigma F_y = N - W \cos 20^\circ = 0.$$

Las soluciones para N y T son

$$N = W \cos 20^\circ = (300) \cos 20^\circ = 281.9 \text{ lb},$$

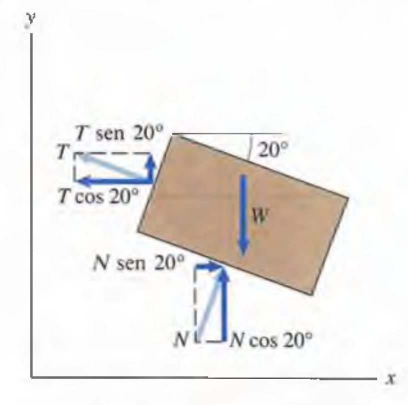
$$T = W \operatorname{sen} 20^\circ = (300) \operatorname{sen} 20^\circ = 102.6 \text{ lb}.$$

(b) La tensión en la cuerda está relacionada con su longitud según la expresión

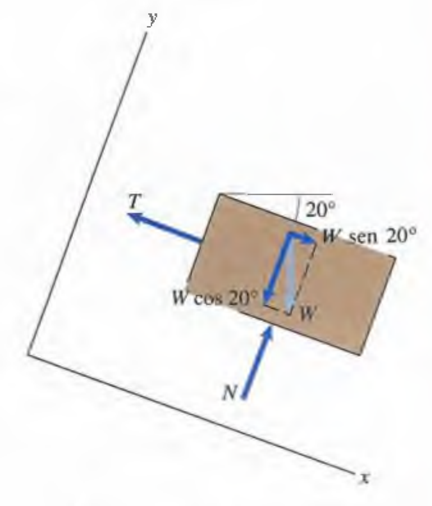
$$T = k(L - L_0),$$

donde L y L_0 son las longitudes estirada y sin estirar, respectivamente. Si resolvemos esta ecuación para la longitud estirada obtenemos

$$L = L_0 + \frac{T}{k} = 5 + \frac{102.6}{200} = 5.51 \text{ pie}.$$



(c) El sistema coordenado dispuesto horizontal y verticalmente.



(d) El sistema coordenado dispuesto paralela y perpendicularmente al piso.

COMENTARIOS

Si bien pudimos determinar las fuerzas desconocidas sobre la caja usando ambas orientaciones del sistema coordenado, la alineación de los ejes paralelamente a las fuerzas desconocidas (Fig. d) dio origen a ecuaciones más fáciles de resolver. A veces las soluciones de los problemas se pueden simplificar escogiendo en forma adecuada los sistemas coordenados. Aunque se obtendrán diferentes ecuaciones de equilibrio usando distintos sistemas coordenados, los resultados para las fuerzas desconocidas no dependerán de la selección del sistema coordenado.

Ejemplo 3.4

Aplicaciones a la ingeniería

Vuelo uniforme

Las fuerzas que actúan sobre el avión son su peso W, el empuje T ejercido por sus motores, y las fuerzas aerodinámicas. La línea discontinua indica la trayectoria que sigue el avión. Al descomponer las fuerzas aerodinámicas se tienen una componente perpendicular a la trayectoria, la fuerza de sustentación L, y una componente paralela a la trayectoria, la fuerza de arrastre D. El ángulo γ entre la horizontal y la trayectoria se denomina ángulo de la trayectoria de vuelo, y α es el ángulo de ataque. Si el avión permanece en equilibrio durante un intervalo de tiempo, se dice que se encuentra en vuelo uniforme. Si $\gamma = 6°$, $D = 125$ kN, $L = 680$ kN y la masa del avión $= 72$ Mg (megagramos), ¿qué valores de T y de α son necesarios para mantener un vuelo uniforme?



Figura 3.22
Fuerzas externas sobre un avión en vuelo.

SOLUCIÓN

En términos del sistema coordenado, las ecuaciones de equilibrio son

$$\Sigma F_x = T\cos\alpha - D - W\,\mathrm{sen}\,\gamma = 0, \quad (3.4)$$

$$\Sigma F_y = T\,\mathrm{sen}\,\alpha + L - W\cos\gamma = 0. \quad (3.5)$$

En la ecuación (3.5) despejamos sen α, en la ecuación (3.4) despejamos cos α y las dividimos para obtener una ecuación para tan α:

$$\tan\alpha = \frac{\mathrm{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} = \frac{W\cos\gamma - L}{W\,\mathrm{sen}\,\gamma + D}$$

$$= \frac{(72\,000)(9.81)\cos 6° - 680\,000}{(72\,000)(9.81)\,\mathrm{sen}\,6° + 125\,000}$$

$$= 0.113.$$

El ángulo de ataque α = arctan (0.113) = 6.44°. Ahora usamos la ecuación (3.4) para determinar el empuje:

$$T = \frac{W \operatorname{sen} \gamma + D}{\cos \alpha} = \frac{(72\,000)(9.81) \operatorname{sen} 6° + 125\,000}{\cos 6.44°} = 200\,094 \text{ N}.$$

Observe que el empuje necesario para un vuelo uniforme corresponde al 28% del peso del avión.

TEMAS DE DISEÑO

En los ejemplos, hasta ahora, se dieron los valores de ciertas fuerzas que actúan sobre un cuerpo en equilibrio, y el objetivo fue tan sólo determinar las fuerzas desconocidas haciendo la suma de las fuerzas igual a cero. En casos reales de ingeniería, un cuerpo en equilibrio está sometido a fuerzas que tienen valores diferentes en condiciones distintas, y esto influye mucho en su diseño.

Cuando un avión viaja a altitud constante ($\gamma = 0$), las ecuaciones (3.4) y (3.5) se reducen a

$$T \cos \alpha = D,$$

$$T \operatorname{sen} \alpha + L = W.$$

La componente horizontal del empuje debe ser igual al arrastre, y la suma de la componente vertical del empuje y de la sustentación debe ser igual al peso. Para un valor fijo de α, la sustentación y el arrastre aumentan conforme se incrementa la velocidad del avión. Un aspecto importante del diseño es minimizar D a la velocidad de crucero para reducir el empuje (y en consecuencia el consumo de combustible) necesario para satisfacer la primera ecuación de equilibrio. Gran parte de la investigación relativa al diseño de aviones, incluidos los análisis teóricos y los ensayos en túneles de viento (Fig. 3.23), se dedica al desarrollo de perfiles aerodinámicos que minimicen el arrastre.



Figura 3.23
Los túneles de viento se usan para medir las fuerzas aerodinámicas sobre modelos de aviones.

Cuando un avión va a aterrizar, su velocidad es mucho menor y el arrastre es de menor influencia en el diseño. También la sustentación es menor, y el cumplimiento de la ecuación (3.5) se convierte en la principal consideración en el diseño. Dentro de ciertos límites, el piloto puede incrementar los términos T sen α y L incrementando el ángulo de ataque. Esto es muy evidente en el gran ángulo de ataque empleado durante el aterrizaje del Concorde (Fig. 3.24), avión en el que los ingenieros tuvieron que sacrificar buenas características aerodinámicas durante el aterrizaje para obtener un arrastre suficientemente bajo a velocidades de crucero muy altas. En el caso del F-14 (Fig. 3.25), se usaron alas con flecha o barrido variable para obtener buenas características de sustentación a baja velocidad, así como un bajo arrastre a alta velocidad.



Figura 3.24
El Concorde tiene que aterrizar con un gran ángulo de ataque para generar suficiente sustentación.



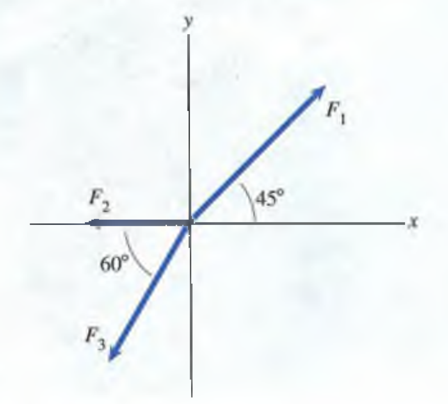
Figura 3.25
El avión de cada F-14 con sus alas configuradas para el despegue y aterrizaje, y configuradas para altas velocidades.

Problemas

3.1 Tres fuerzas externas actúan sobre un cuerpo en equilibrio: $\mathbf{F}_1 = 20\mathbf{i} - 30\mathbf{j}$(N), $\mathbf{F}_2 = 10\mathbf{i} - 10\mathbf{j}$(N), y $\mathbf{F}_3$. ¿Cuál es la magnitud de $\mathbf{F}_3$?

3.2 Tres fuerzas externas actúan sobre un elemento estructural en equilibrio: $\mathbf{F}_1 = 40\mathbf{i} + 30\mathbf{j}$(klb), $\mathbf{F}_2$ y $\mathbf{F}_3$. La fuerza $\mathbf{F}_2$ es paralela al vector unitario $(-2/\sqrt{5})\mathbf{i} + (1/\sqrt{5})\mathbf{j}$, y $\mathbf{F}_3$ es paralela al vector unitario $(-2/\sqrt{5})\mathbf{i} - (1/\sqrt{5})\mathbf{j}$. Determine $\mathbf{F}_2$ y $\mathbf{F}_3$.

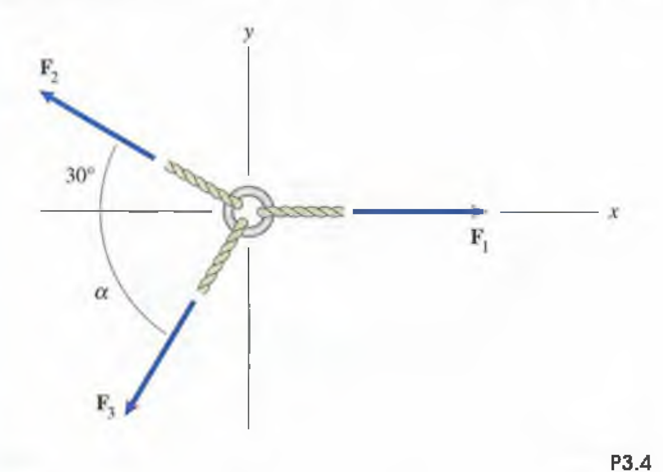
3.3 Se muestran las fuerzas externas que actúan sobre un cuerpo en equilibrio. Si $F_1 = 75$ N, ¿qué valor tienen F_2 y F_3?



P3.3

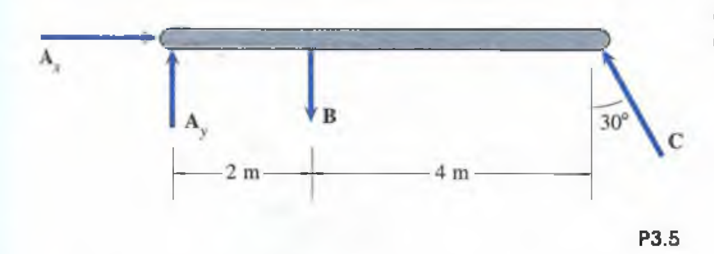
3.4 La fuerza $F_1 = 100$ lb. (a) ¿Cuál es el mínimo valor de F_3 para el cual el diagrama de cuerpo libre puede estar en equilibrio? (b) Si F_3 tiene el valor determinado en la parte (a), ¿qué valor tiene el ángulo α?

Estrategia: Dibuje un diagrama vectorial de la suma de las tres fuerzas.



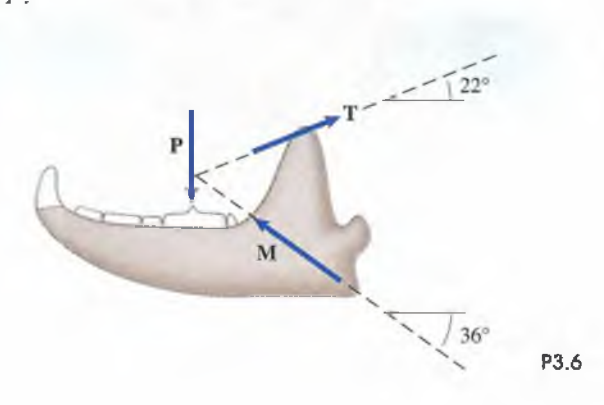
P3.4

3.5 La viga mostrada está en equilibrio. Si $B = 260$ N y $C = 100$ N, ¿qué valor tienen las fuerzas A_x y A_y?



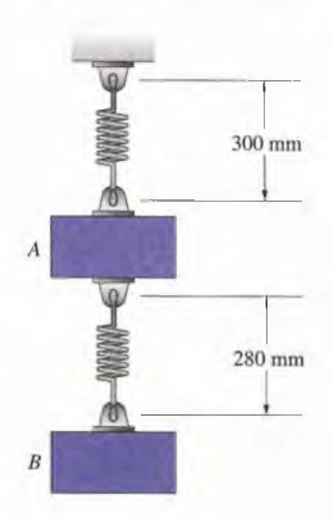
P3.5

3.6 Un zoólogo calcula que la quijada de un predador está sometida a una fuerza P de 800 N. ¿Qué fuerzas T y M deben ejercer los músculos temporal y masetero para soportar este valor de P?



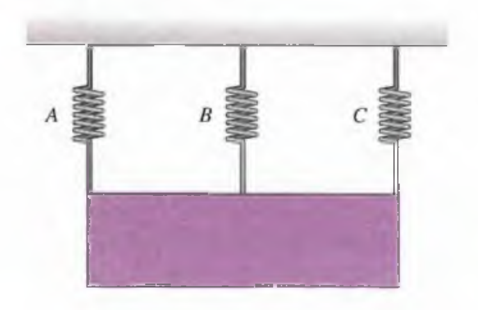
P3.6

3.7 Se tienen dos resortes idénticos, con longitudes sin estirar de 250 mm y constantes $k = 1200$ N/m.
(a) Dibuje el diagrama de cuerpo libre del bloque A.
(b) Dibuje el diagrama de cuerpo libre del bloque B.
(c) ¿Cuáles son las masas de los dos bloques?



P3.7

3.8 En la figura P3.8, la barra horizontal de 200 lb está colgada de los resortes A, B y C. Las longitudes sin estirar de los resortes son iguales. Las constantes de los resortes son $k_A = k_C = 400$ lb/pie y $k_B = 300$ lb/pie. ¿Cuáles son las tensiones en los resortes?



P3.8

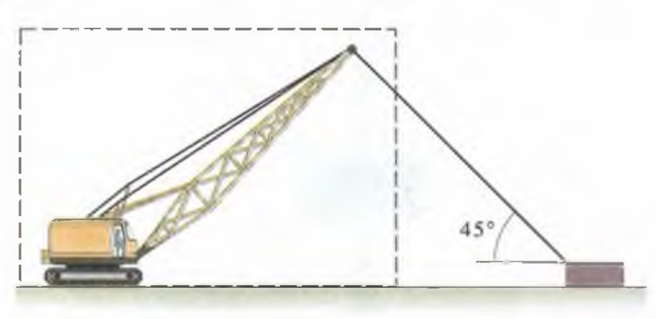
3.9 Si se desprecian los pesos de las poleas mostradas, ¿qué fuerza F se necesita para soportar el peso W?



P3.9

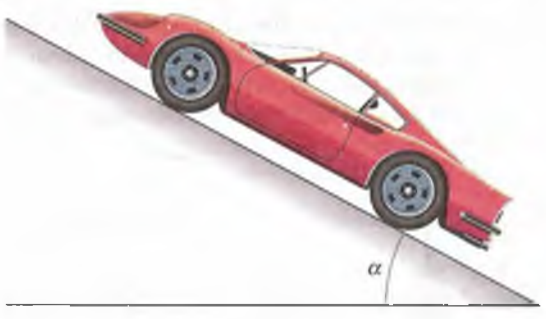
3.10 La masa de una grúa es de 20 Mg (megagramos) y la tensión en su cable es de 1 kN. El cable de la grúa está unido a un bloque cuya masa es de 400 kg. Determine las magnitudes de las fuerzas normal y de fricción ejercidas sobre la grúa por el terreno a nivel.

Estrategia: Dibuje el diagrama de cuerpo libre de la grúa y la parte de su cable dentro de la línea discontinua.



P3.10

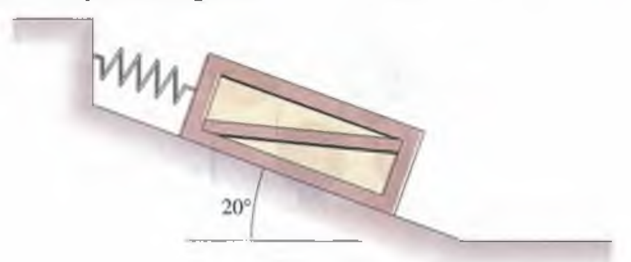
3.11 Un auto de 2400 lb se aparca en una calle inclinada. Si $\alpha = 25°$, ¿cuáles son las magnitudes de las fuerzas totales normal y de fricción ejercidas sobre el auto por el pavimento?



P3.11

3.12 Suponga que el automóvil de 2400 lb del problema 3.11 permanecerá en equilibrio sobre la calle inclinada sólo si la fuerza de fricción ejercida sobre él por el pavimento no es mayor que 0.6 veces la fuerza normal. ¿Cuál es el máximo ángulo α para el cual el automóvil permanecerá en equilibrio?

3.13 La masa de una caja es de 40 kg. La superficie inclinada es rugosa. La longitud del resorte es de 180 mm, su longitud sin estirar es de 200 mm y su constante es $k = 2500$ N/m. ¿Cuál es la magnitud de la fuerza de fricción ejercida sobre la caja por la superficie rugosa?

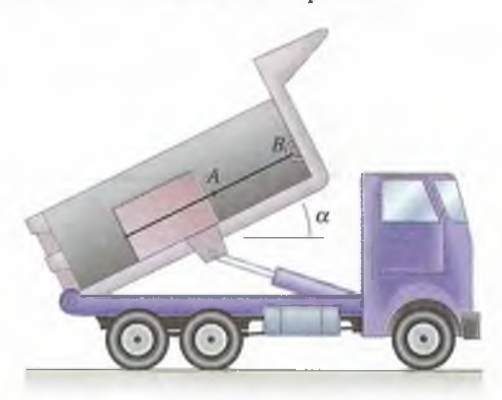


P3.13

3.14 Una caja de 600 lb se mantiene en equilibrio sobre la plataforma lisa de un camión de volteo por medio de la cuerda AB. (Recuerde que "lisa" significa que la fricción es despreciable.)

(a) Si $\alpha = 25°$, ¿cuál es la tensión en la cuerda?

(b) Si la cuerda resiste con seguridad una tensión de 400 lb, ¿cuál es el valor máximo admisible para α?



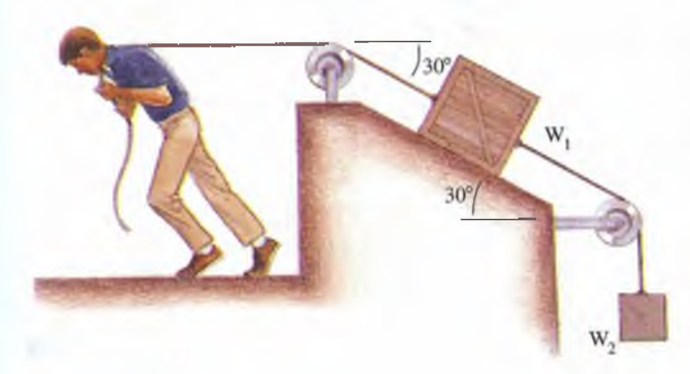
P3.14

3.15 El cable AB impide que la caja de 5 Mg (megagramos) se deslice sobre el piso liso de la bodega del barco escorado. Si el cable puede resistir con seguridad una tensión de 40 kN, ¿cuál es el valor máximo seguro del ángulo α de escora?



P3.15

3.16 Los pesos de dos bloques (Fig. P3.16) son $W_1 = 200$ lb y $W_2 = 50$ lb. Ignorando la fricción, determine la fuerza que la persona debe ejercer para mantener los bloques en equilibrio.

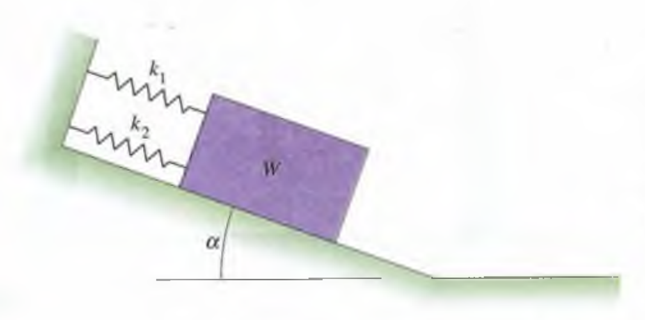


P3.16

3.17 Los dos resortes mostrados tienen la misma longitud no estirada, y la superficie inclinada es lisa. Demuestre que las magnitudes de las fuerzas ejercidas por los dos resortes son

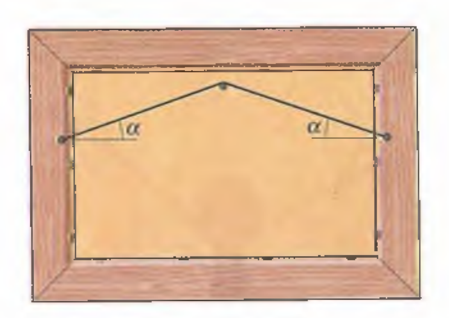
$$F_1 = W \text{ sen } \alpha/(1 + k_2/k_1),$$

$$F_2 = W \text{ sen } \alpha/(1 + k_1/k_2).$$



P3.17

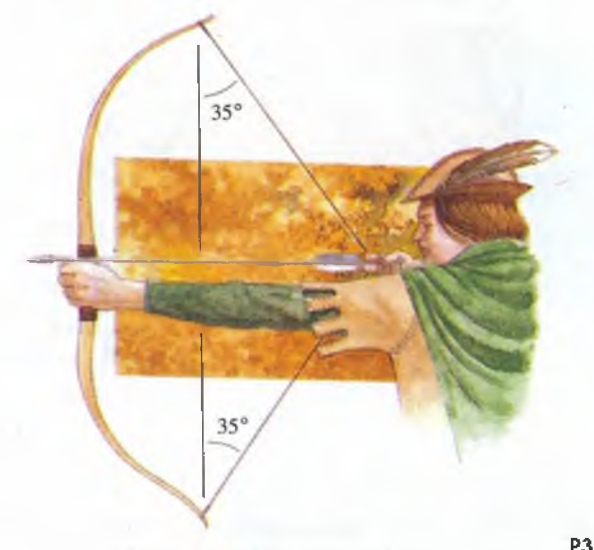
3.18 Un cuadro de 10 kg está colgado de un alambre. Si $\alpha = 25°$, ¿cuál es la tensión en el alambre?



P3.18

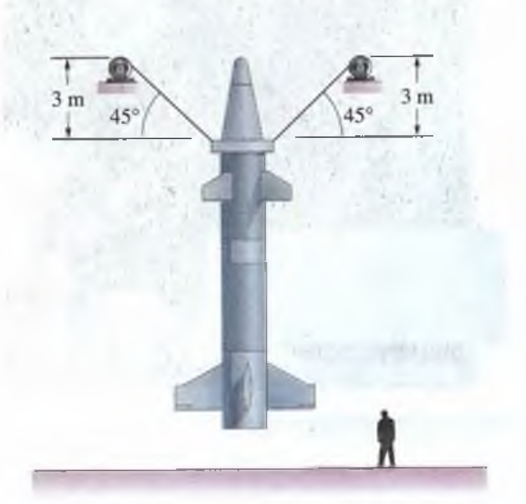
3.19 Si el alambre que soporta el cuadro del problema 3.18 se rompe cuando la tensión excede de 150 N y se quiere tener un factor de seguridad de 100% (o sea, se quiere que el alambre resista un peso igual al doble del peso del cuadro), ¿cuál es el valor mínimo que se puede usar para α?

3.20 Se requiere una tensión de 50 lb para jalar el arco a la posición mostrada. Determine la tensión en la cuerda del arco (a) dibujando un diagrama de cuerpo libre de la cuerda y (b) dibujando un diagrama de cuerpo libre del arco.



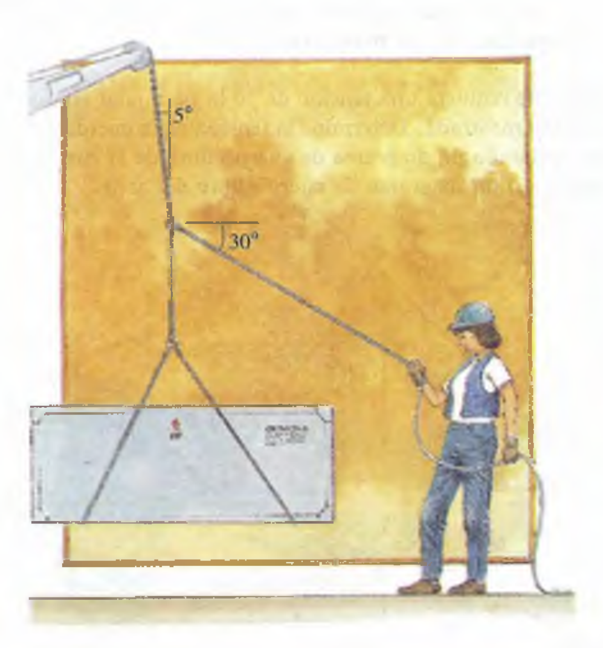
P3.20

3.21 Un cohete está suspendido por medio de dos cables. La masa del cohete es de 45 Mg (megagramos).
(a) ¿Cuál es la tensión en los cables cuando el cohete se encuentra en la posición mostrada?
(b) Si el cohete mostrado se levanta enrollando los dos cables cantidades iguales, ¿qué tensión deben soportar los cables (con base en la tensión requerida para soportar el cohete en reposo) a fin de levantar el cohete 2 m arriba de la posición mostrada?



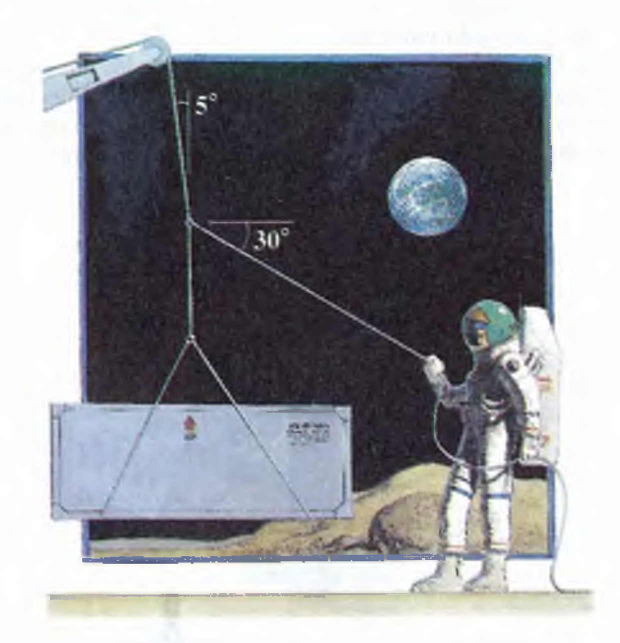
P3.21

3.22 Un obrero mantiene en equilibrio una caja de 500 lb como se muestra en la figura. ¿Qué fuerza debe ejercer sobre el cable?



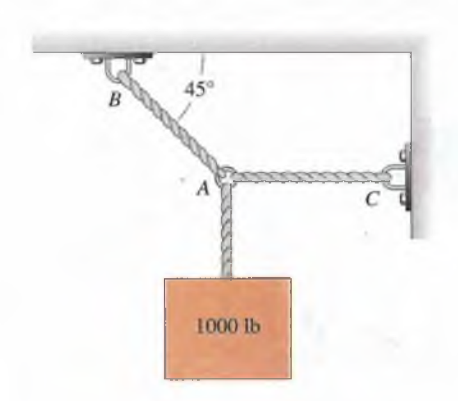
P3.22

3.23 Un obrero en la Luna (aceleración debida a la gravedad = 5.32 pie/s^2) mantiene en equilibrio la misma caja descrita en el problema 3.22 en la posición mostrada. ¿Qué fuerza debe ejercer sobre el cable?



P3.23

3.24 Determine las tensiones en los cables AB y AC mostrados.



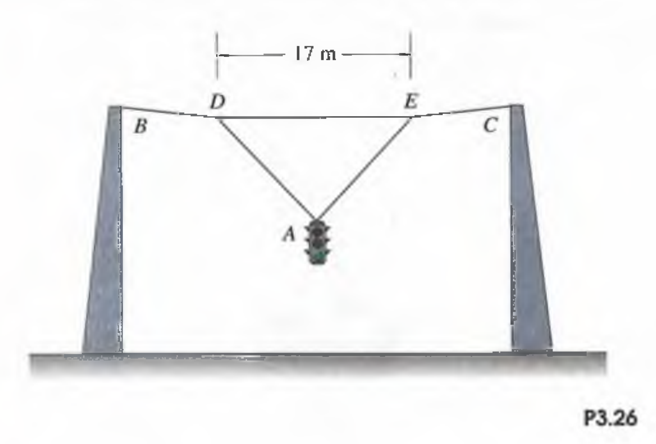
P3.24

3.25 Un semáforo de 140 kg pende de dos cables. ¿Cuál es la tensión en los cables?

20 m
20 m
12 m
B
C
A

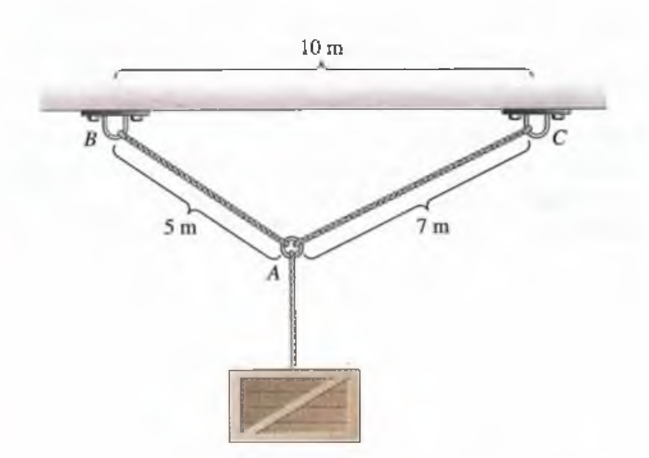
P3.25

3.26 Considere el semáforo del problema 3.25. Para levantar temporalmente el semáforo durante un desfile, un ingeniero quiere conectar el cable *DE* de 17 m de longitud a los puntos medios de los cables *AB* y *AC*, como se muestra en la figura. Sin embargo, por razones de seguridad, no quiere someter ninguno de los cables a una tensión mayor que 4 kN. ¿Podrá lograrlo?



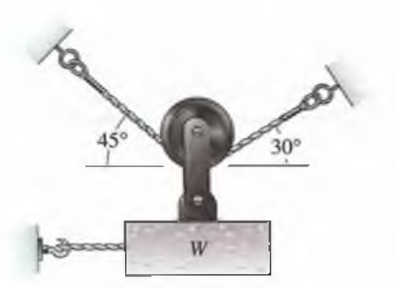
P3.26

3.27 La masa de una caja suspendida es de 5 kg. ¿Cuáles son las tensiones en los cables *AB* y *AC*?



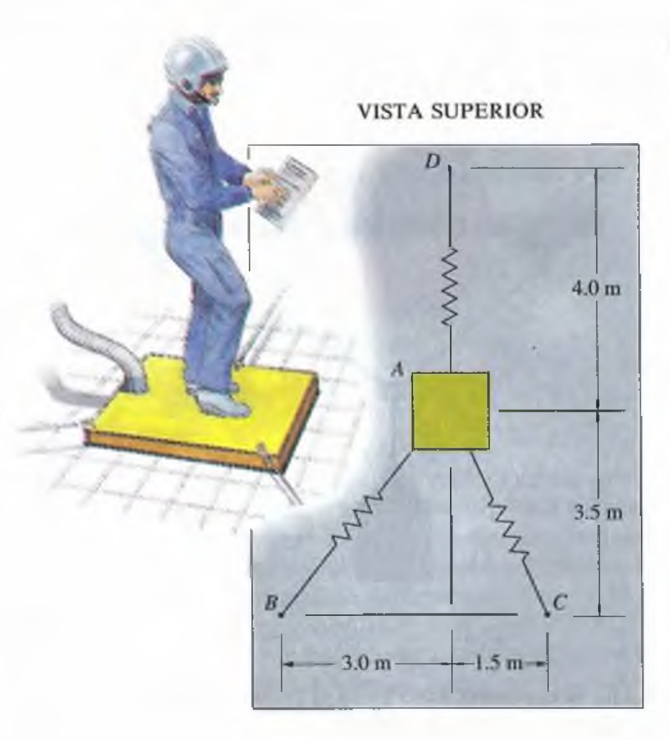
P3.27

3.28 ¿Cuáles son las tensiones en los cables superior e inferior? (Deberá dar sus respuestas en función de *W*. Ignore el peso de la polea.)



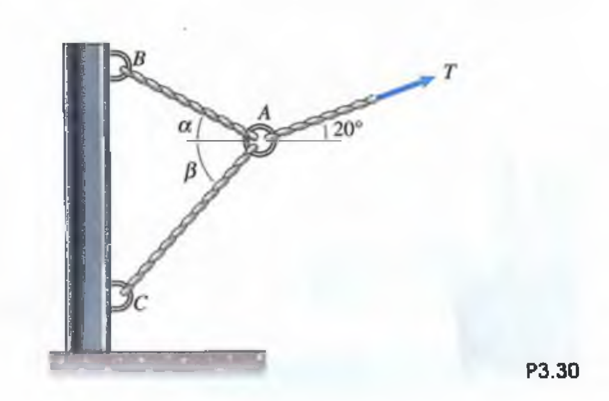
P3.28

3.29 Un astronauta realiza experimentos sobre una plataforma neumática. Mientras efectúa calibraciones, la plataforma se mantiene en equilibrio por los tirantes *AB*, *AC* y *AD*. Las fuerzas ejercidas por los tirantes son las únicas fuerzas horizontales que actúan sobre la plataforma. Si la tensión en el tirante *AC* es de 2 N, ¿cuáles son las tensiones en los otros dos tirantes?



P3.29

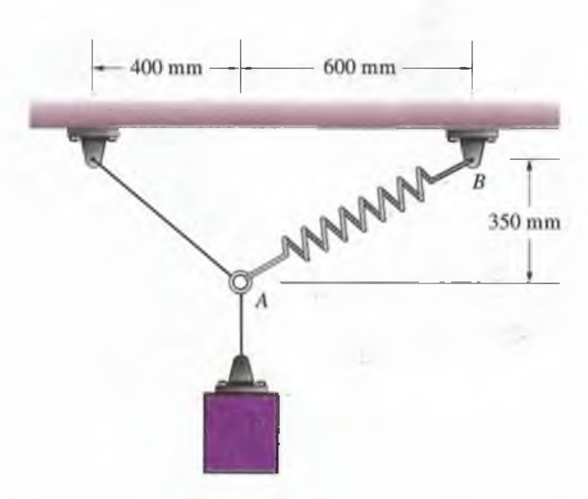
3.30 El poste mostrado ancla un cable que ayuda a soportar una torre petrolera. Si $\alpha = 35°$ y $\beta = 50°$, ¿cuáles son las tensiones en los cables *AB* y *AC*? (Deberá dar sus respuestas en función de la tensión *T*.)



P3.30

3.31 Considere el sistema del problema 3.30. Ángulo $\alpha = 35°$.
(a) Determine el valor del ángulo β que minimiza la tensión en el cable AC.
(b) Cuando β tiene el valor determinado en la parte (a), ¿cuáles son las tensiones en los cables AB y AC? (Deberá dar sus respuestas en función de la tensión T.)

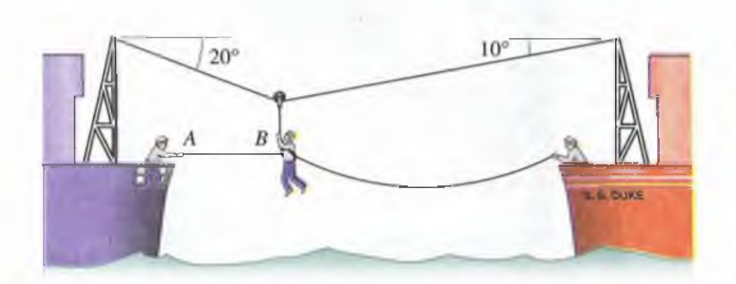
3.32 La longitud del resorte AB sin estirar que aparece en la figura es de 660 mm y la constante k = 1000 N/m. ¿Cuál es la masa del cuerpo suspendido?



P3.32

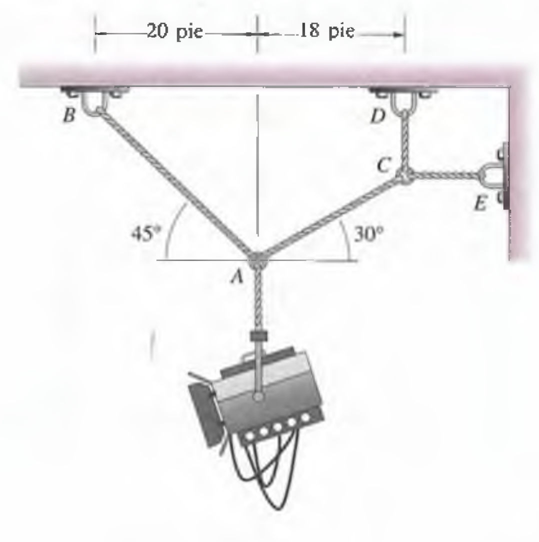
3.33 Si el sistema descrito en el problema 3.32 se encuentra en Marte (aceleración debida a la gravedad = 4.02 m/s^2), ¿cuál es la masa del cuerpo suspendido?

3.34 La boya de salvamento mostrada se usa para transferir a la persona B de un barco a otro. La persona está conectada a una polea que rueda sobre el cable superior. El peso total de la persona y la boya es de 250 lb. ¿Qué tensión se necesita en la cuerda horizontal AB para mantener a la persona en equilibrio en la posición mostrada?



P3.34

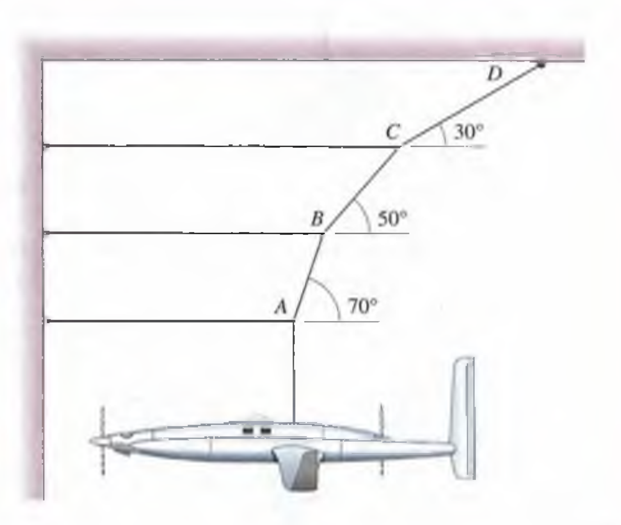
3.35 Un sistema de cables sostiene un banco de luces de 1000 lb sobre un estudio cinematográfico. Determine las tensiones en los cables AB, CD y CE de la figura.



P3.35

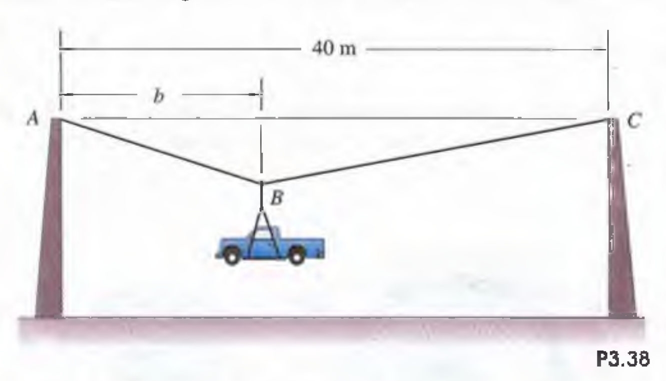
3.36 Considere el banco de luces de 1000 lb del problema 3.35. Un operador cambia la posición de las luces retirando el cable CE. ¿Cuál es la tensión en el cable AB después del cambio?

3.37 Un modelo de avión pende del techo y se encuentra en equilibrio soportado por el conjunto de cables que se muestra en la figura. La masa del avión es de 1250 kg. Determine las tensiones en los segmentos de cable AB, BC y CD.



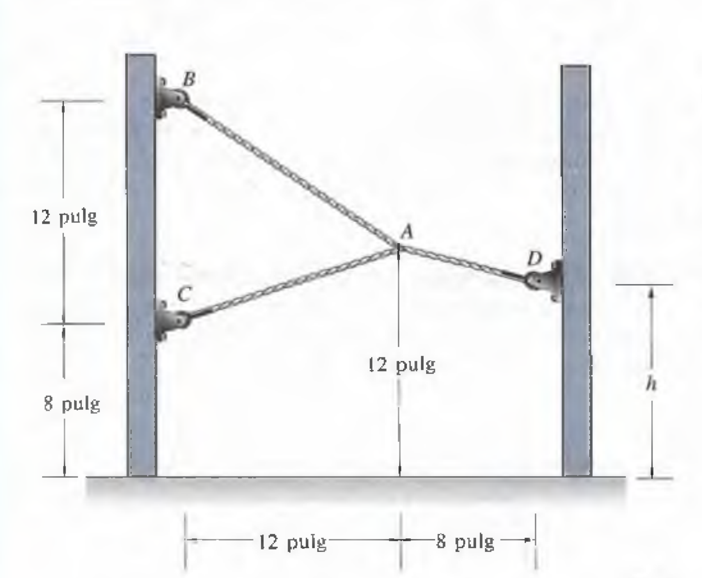
P3.37

3.38 Se quiere suspender un camión de 4 Mg (megagramos) como se muestra en la figura, con fines publicitarios. La distancia $b = 15$ m y la suma de las longitudes de los cables AB y BC es de 42 m. ¿Cuáles son las tensiones en los cables?



P3.38

3.39 La distancia $h = 12$ pulg y la tensión en el cable AD es de 200 lb. ¿Cuáles son las tensiones en los cables AB y AC?

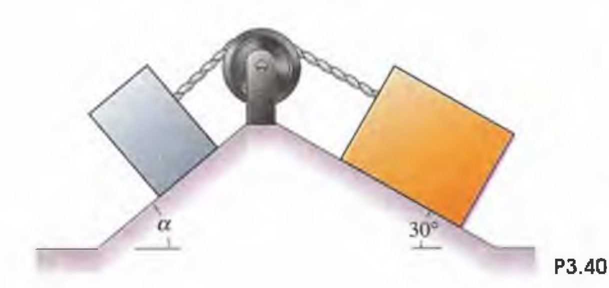


P3.39

3.40 En la figura P3.40 la masa de la caja de la izquierda es de 30 kg y la masa de la caja de la derecha es de 40 kg. Las superficies son lisas.

(a) ¿Cuál es la tensión en el cable?

(b) ¿Qué valor tiene el ángulo α?



P3.40

3.41 En el sistema en reposo del problema 3.40, la masa de la caja derecha es de 40 kg y el ángulo α equivale a 45°.

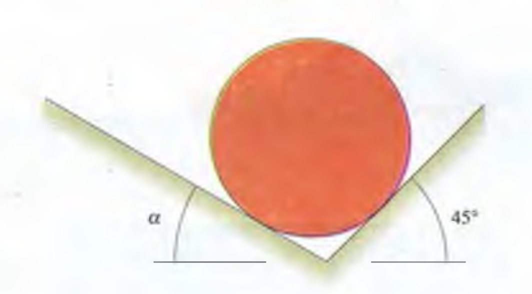
(a) ¿Cuál es la tensión en el cable?

(b) ¿Cuál es la masa de la caja de la izquierda?

3.42 Un cilindro de 50 lb descansa sobre dos superficies lisas.

(a) Dibuje el diagrama de cuerpo libre del cilindro.

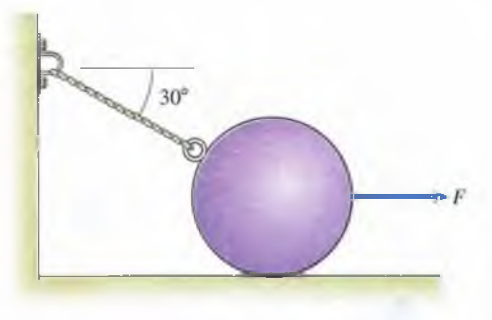
(b) Si $\alpha = 30°$, ¿cuáles son las magnitudes de las fuerzas ejercidas sobre el cilindro por las superficies izquierda y derecha?



P3.42

3.43 Obtenga una ecuación para la fuerza ejercida sobre el cilindro del problema 3.42 por la superficie izquierda en función del ángulo α de dos maneras: (a) usando un sistema coordenado con el eje y vertical, y (b) usando un sistema coordenado con el eje y paralelo a la superficie derecha.

3.44 Una esfera de 50 kg se encuentra en reposo sobre una superficie lisa horizontal. La fuerza horizontal $F = 500$ N. ¿Cuál es la fuerza normal ejercida sobre la esfera por la superficie?



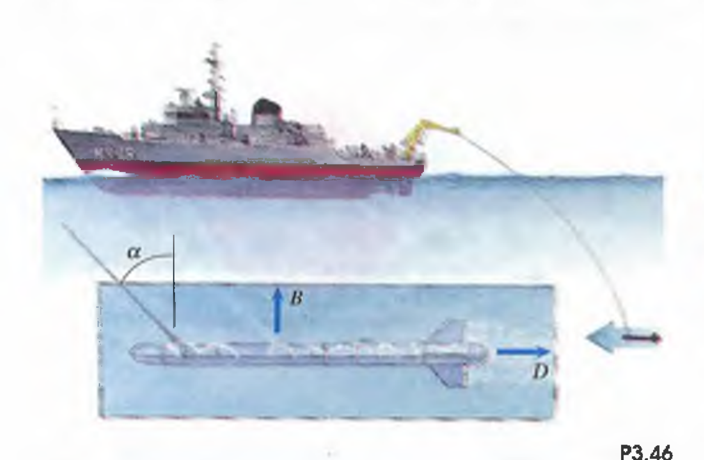
P3.44

3.45 Considere la esfera en reposo del problema 3.44.

(a) Dibuje una gráfica de la fuerza normal ejercida sobre la esfera por la superficie en función de la fuerza F desde $F = 0$ hasta $F = 1$ kN.

(b) En el resultado de la parte (a), observe que la fuerza normal disminuye hasta 0 y se vuelve negativa conforme F crece. ¿Qué significa esto?

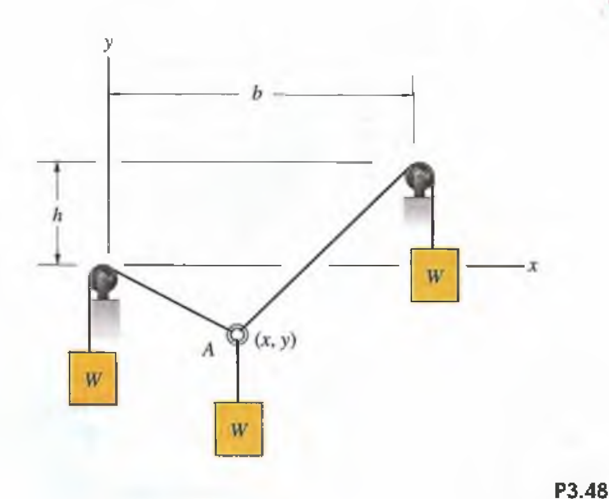
3.46 El dispositivo que se muestra es arrastrado debajo de un barco para medir la temperatura y la salinidad del agua. La masa del dispositivo es de 130 kg. El ángulo $\alpha = 20^{\circ}$. El movimiento del agua respecto al dispositivo genera una fuerza de arrastre D horizontal. La distribución de la presión hidrostática en el agua ejerce una fuerza de "flotación" B vertical de 500 N. Determine la fuerza de arrastre D y la tensión en el cable.



P3.46

3.47 Considere el dispositivo descrito en el problema 3.46. El dispositivo pesa 300 lb, la fuerza de arrastre $D = 50$ lb y la fuerza de flotación $B = 100$ lb. Determine la tensión en el cable y el ángulo α.

3.48 El sistema está en equilibrio. ¿Cuáles son las coordenadas del punto A?

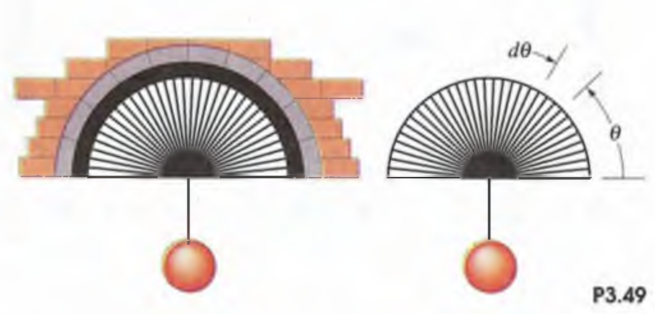


P3.48

3.49 Una lámpara de peso W pende de un arco circular por medio de un gran número N de cables uniformemente espaciados. La tensión en cada cable es la misma. Demuestre que

$$T = \frac{\pi W}{2N}.$$

Estrategia: Considere un elemento del arco definido por un ángulo $d\theta$ medido en el punto donde se unen los cables:



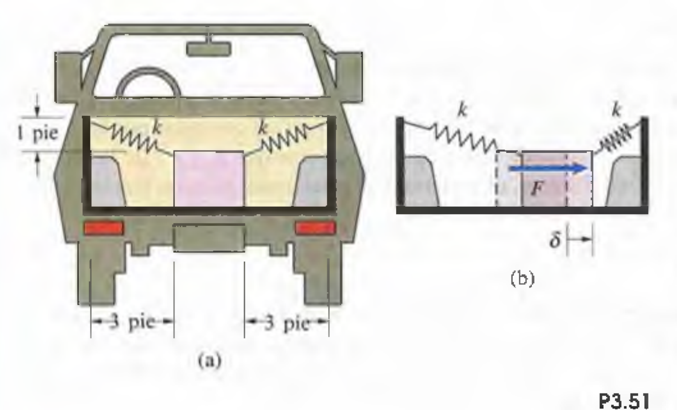
P3.49

Como el ángulo total descrito por el arco es de π radianes, el número de cables unidos al elemento es $(N/\pi)\,d\theta$. Este resultado se puede usar para establecer las ecuaciones de equilibrio para la parte del sistema de cables en el punto en que éstos se unen.

3.50 La solución del problema 3.49 es un resultado "asintótico" cuya exactitud aumenta conforme se incrementa N. Determine la tensión exacta $T_{(\text{exacta})}$ para $N = 3, 5, 9$ y 17, y verifique las cifras de la siguiente tabla.

N	3	5	9	17
$\dfrac{T_{\text{exacta}}}{\left(\dfrac{\pi W}{2N}\right)}$	1.91	1.32	1.14	1.07

3.51 Un sistema (Fig. a) soporta lateralmente una carga que descansa en la plataforma lisa de un camión. La constante del resorte $k = 100$ lb/pie y la longitud de cada resorte no estirado es de 2 pies. Cuando la carga está sometida a una fuerza lateral efectiva F (Fig. b), la distancia de la posición original de la carga a su posición de equilibrio es $\delta = 1$ pie. ¿Qué valor tiene F?



P3.51

Los problemas 3.52 a 3.54 están relacionados con el ejemplo 3.4.

3.52 Un avión se encuentra en vuelo uniforme a nivel ($\gamma = 0$). Su peso $W = 30\,000$ lb, el empuje $T = 8000$ lb y el ángulo de ataque $\alpha = 10°$. ¿Qué valor tiene la fuerza de arrastre D y la fuerza de sustentación L?

3.53 Un avión se encuentra en vuelo uniforme. El ángulo de ataque $\alpha = 0$, la razón del empuje al arrastre $T/D = 2$ y la razón de la sustentación al arrastre $L/D = 4$. ¿Cuál es el ángulo γ de la trayectoria del vuelo?

3.54 Un avión planea en vuelo uniforme ($T = 0$) y su razón de sustentación a arrastre $L/D = 4$.
(a) ¿Cuál es el ángulo γ de la trayectoria del vuelo?
(b) Si el avión planea desde una altura de 1000 m hasta una altura de 0 m, ¿qué distancia horizontal viajará?

3.4 *Sistemas tridimensionales de fuerzas*

Las situaciones de equilibrio que hemos considerado hasta ahora implicaron sólo fuerzas coplanares. Cuando el sistema de fuerzas externas que actúan sobre un cuerpo en equilibrio es tridimensional, podemos expresar la suma de las fuerzas externas como

$$\Sigma \mathbf{F} = (\Sigma F_x)\,\mathbf{i} + (\Sigma F_y)\,\mathbf{j} + (\Sigma F_z)\,\mathbf{k} = \mathbf{0}.$$

Esta ecuación se cumple si y sólo si

$$\boxed{\Sigma F_x = 0, \qquad \Sigma F_y = 0, \qquad \Sigma F_z = 0.} \tag{3.6}$$

Las sumas de las componentes x, y y z de las fuerzas externas que actúan sobre un cuerpo en equilibrio deben ser iguales a cero.

En los siguientes ejemplos analizaremos situaciones en las que se pueden usar las ecuaciones (3.6) para determinar las fuerzas desconocidas que actúan sobre cuerpos en equilibrio.

Ejemplo 3.5

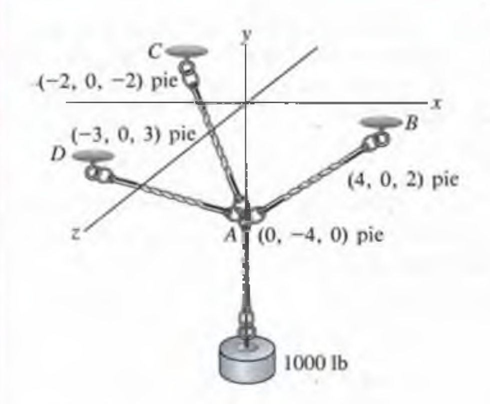


Figura 3.26

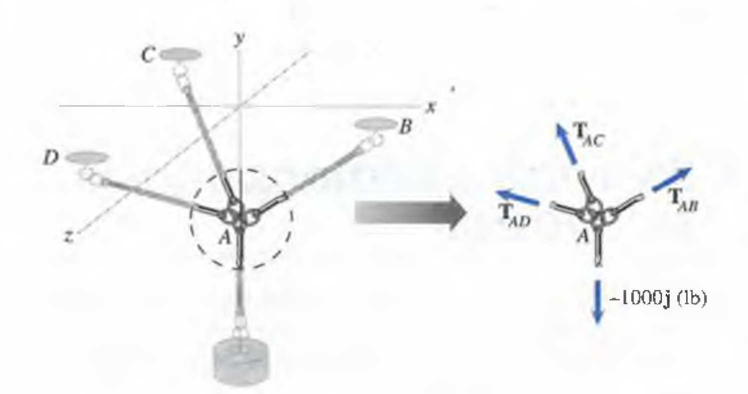
Un cilindro de 1000 lb pende del techo por un sistema de cables sostenidos en los puntos B, C y D. ¿Cuáles son las tensiones en los cables AB, AC y AD?

ESTRATEGIA

Las tensiones se determinan con el método usado para problemas bidimensionales similares. Aislando parte del sistema de cables cerca del punto A, obtenemos un diagrama de cuerpo libre sometido a las fuerzas causadas por las tensiones en los cables. Como cada suma de las componentes x, y y z de las fuerzas externas debe ser igual a cero, obtenemos tres ecuaciones para las tres tensiones.

SOLUCIÓN

Dibujo del diagrama de cuerpo libre Aislamos parte del sistema de cables cerca del punto A (Fig. a) y completamos el diagrama de cuerpo libre mostrando las fuerzas ejercidas por las tensiones en los cables (Fig. b). Las magnitudes de los vectores T_{AB}, T_{AC} y T_{AD} son las tensiones en los cables AB, AC y AD respectivamente.



(a) Aislamiento de una parte del sistema de cables.

(b) El diagrama de cuerpo libre completo muestra las fuerzas ejercidas por las tensiones en los cables.

Aplicación de las ecuaciones de equilibrio La suma de las fuerzas externas que actúan en el diagrama de cuerpo libre es

$$\Sigma \mathbf{F} = \mathbf{T}_{AB} + \mathbf{T}_{AC} + \mathbf{T}_{AD} - 1000\,\mathbf{j} = \mathbf{0}.$$

Para despejar de esta ecuación las tensiones en los cables, necesitamos expresar los vectores T_{AB}, T_{AC} y T_{AD} en función de sus componentes.

Primero determinamos las componentes de un vector unitario que apunte en la dirección del vector T_{AB}. Sea $\mathbf{r}_{AB}$ el vector de posición de A a B (Fig. c):

$$\mathbf{r}_{AB} = (x_B - x_A)\mathbf{i} + (y_B - y_A)\mathbf{j} + (z_B - z_A)\,\mathbf{k} = 4\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 2\mathbf{k}\ \text{(pie)}.$$

Dividiendo $\mathbf{r}_{AB}$ por su magnitud, obtenemos un vector unitario que tiene la misma dirección que T_{AB}:

$$\mathbf{e}_{AB} = \frac{\mathbf{r}_{AB}}{|\mathbf{r}_{AB}|} = 0.667\,\mathbf{i} + 0.667\,\mathbf{j} + 0.333\,\mathbf{k}.$$

Podemos ahora escribir el vector T_{AB} como el producto de la tensión T_{AB} en el cable AB y $\mathbf{e}_{AB}$:

$$\mathbf{T}_{AB} = T_{AB}\,\mathbf{e}_{AB} = T_{AB}(0.667\,\mathbf{i} + 0.667\,\mathbf{j} + 0.333\,\mathbf{k}).$$

Ahora expresamos de la misma manera los vectores de fuerza $\mathbf{T}_{AC}$ y $\mathbf{T}_{AD}$ en función de las tensiones T_{AC} y T_{AB} en los cables AC y AD. Los resultados son

$$\mathbf{T}_{AC} = T_{AC}(-0.408\,\mathbf{i} + 0.816\,\mathbf{j} - 0.408\,\mathbf{k}),$$

$$\mathbf{T}_{AD} = T_{AD}(-0.514\,\mathbf{i} + 0.686\,\mathbf{j} + 0.514\,\mathbf{k}).$$

Con estas expresiones escribimos la suma de las fuerzas externas en función de las tensiones T_{AB}, T_{AC} y T_{AD}:

$$\begin{aligned}\Sigma\mathbf{F} &= \mathbf{T}_{AB} + \mathbf{T}_{AC} + \mathbf{T}_{AD} - 1000\,\mathbf{j}\\ &= (0.667T_{AB} - 0.408T_{AC} - 0.514T_{AD})\,\mathbf{i}\\ &\quad + (0.667T_{AB} + 0.816T_{AC} + 0.686T_{AD} - 1000)\,\mathbf{j}\\ &\quad + (0.333T_{AB} - 0.408T_{AC} + 0.514T_{AD})\,\mathbf{k}\\ &= \mathbf{0}.\end{aligned}$$

Cada una de las sumas de las fuerzas en las direcciones x, y y z debe ser igual a cero:

$$\Sigma F_x \quad 0.667T_{AB} - 0.408T_{AC} - 0.514T_{AD} = 0,$$

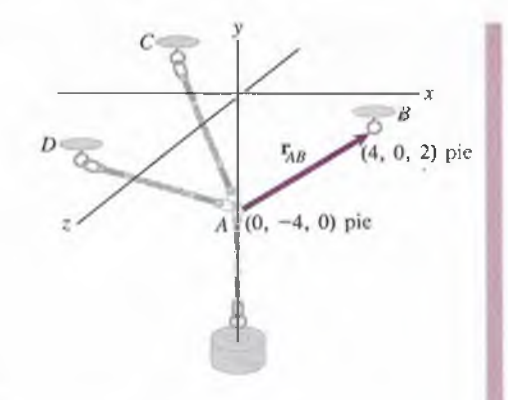
$$\Sigma F_y \quad 0.667T_{AB} + 0.816T_{AC} + 0.686T_{AD} - 1000 = 0,$$

$$\Sigma F_z \quad 0.333T_{AB} - 0.408T_{AC} + 0.514T_{AD} = 0.$$

Resolviendo estas ecuaciones, las tensiones son T_{AB} = 529 lb, T_{AC} = 648 lb y T_{AD} = 171 lb.

COMENTARIO

Observe que en este ejemplo usamos varios de los procedimientos vistos en el capítulo 2. En particular, tuvimos que determinar las componentes de un vector de posición, dividir este vector por su magnitud para obtener un vector unitario con la misma dirección que una fuerza particular, y expresar la fuerza en función de sus componentes escribiéndola como el producto del vector unitario y la magnitud de la fuerza.

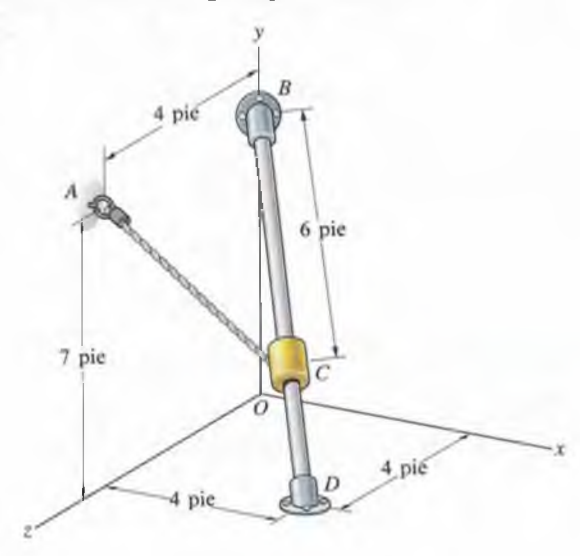


(c) Vector de posición $\mathbf{r}_{AB}$.

Ejemplo 3.6

El manguito C de 100 lb de peso de la figura 3.27 está en equilibrio sobre la barra lisa bajo la acción del cable AC. Determine la tensión en el cable y la fuerza ejercida sobre el manguito por la barra.

Figura 3.27



ESTRATEGIA

Para determinar fuerzas que actúan sobre el manguito, dibujamos su diagrama de cuerpo libre. Las fuerzas externas son su peso y las fuerzas ejercidas por el cable y la barra. Si resolvemos este ejemplo como el anterior, expresamos las fuerzas en función de sus componentes. Pero no conocemos la dirección de la fuerza ejercida por la barra. Como la barra lisa ejerce una fuerza de fricción despreciable, será normal a su eje. Entonces, podemos eliminar esta fuerza de la ecuación $\Sigma \mathbf{F} = \mathbf{0}$ formando el producto punto de la suma de fuerzas con un vector unitario que sea paralelo a la barra.

SOLUCIÓN

Dibujo del diagrama de cuerpo libre Aislamos el manguito (Fig. a) y completamos el diagrama de cuerpo libre mostrando el peso del manguito, la fuerza T ejercida por la tensión en el cable y la fuerza normal N ejercida por la barra (Fig. b).



(a) Aislamiento del manguito.

(b) Diagrama de cuerpo libre del manguito con las fuerzas ejercidas por su peso, el cable y la barra.

Aplicación de las ecuaciones de equilibrio La suma de las fuerzas externas que actúan sobre el diagrama de cuerpo libre es

$$\Sigma \mathbf{F} = \mathbf{T} + \mathbf{N} - 100\mathbf{j} = \mathbf{0}. \tag{3.7}$$

Sea $\mathbf{e}_{BD}$ el vector unitario que va del punto B al punto D. Como N es perpendicular a la barra, $\mathbf{e}_{BD} \cdot \mathbf{N} = 0$. Por tanto,

$$\mathbf{e}_{BD} \cdot (\Sigma \mathbf{F}) = \mathbf{e}_{BD} \cdot (\mathbf{T} - 100\mathbf{j}) = 0. \tag{3.8}$$

Interpretamos fácilmente la ecuación: la componente del peso del manguito paralela a la barra está equilibrada por la componente de **T** paralela a la barra.

Determinación de $\mathbf{e}_{BD}$: Determinamos el vector que va del punto B al punto D,

$$\mathbf{r}_{BD} = (4 - 0)\mathbf{i} + (0 - 7)\mathbf{j} + (4 - 0)\mathbf{k} = 4\mathbf{i} - 7\mathbf{j} + 4\mathbf{k} \text{ (pies)},$$

y lo dividimos por su magnitud para obtener el vector unitario $\mathbf{e}_{BD}$:

$$\mathbf{e}_{BD} = \frac{\mathbf{r}_{BD}}{|\mathbf{r}_{BD}|} = \frac{4}{9}\mathbf{i} - \frac{7}{9}\mathbf{j} + \frac{4}{9}\mathbf{k}.$$

Descomposición de **T** *en componentes*: Para expresar **T** en función de sus componentes, necesitamos determinar las coordenadas del manguito C. Podemos escribir el vector de B a C en función del vector unitario $\mathbf{e}_{BD}$,

$$\mathbf{r}_{BC} = 6\,\mathbf{e}_{BD} = 2.67\,\mathbf{i} - 4.67\,\mathbf{j} + 2.67\,\mathbf{k} \text{ (pies)},$$

y luego sumarlo al vector que va del origen O a B para obtener el vector de O a C:

$$\mathbf{r}_{OC} = \mathbf{r}_{OB} + \mathbf{r}_{BC} = (7\,\mathbf{j}) + (2.67\,\mathbf{i} - 4.67\,\mathbf{j} + 2.67\,\mathbf{k})$$

$$= 2.67\,\mathbf{i} + 2.33\,\mathbf{j} + 2.67\,\mathbf{k} \text{ (pies)}.$$

Las componentes de este vector son las coordenadas del punto C.

Ahora podemos determinar un vector unitario con la misma dirección que **T**. El vector de C a A es

$$\mathbf{r}_{CA} = (0 - 2.67)\,\mathbf{i} + (7 - 2.33)\,\mathbf{j} + (4 - 2.67)\,\mathbf{k}$$

$$= -2.67\,\mathbf{i} + 4.67\,\mathbf{j} + 1.33\,\mathbf{k} \text{ (pies)},$$

y el vector unitario de C a A es

$$\mathbf{e}_{CA} = \frac{\mathbf{r}_{CA}}{|\mathbf{r}_{CA}|} = -0.482\,\mathbf{i} + 0.843\,\mathbf{j} + 0.241\,\mathbf{k}.$$

Sea T la tensión en el cable AC. Podemos entonces escribir el vector **T** como

$$\mathbf{T} = T\mathbf{e}_{CA} = T(-0.482\,\mathbf{i} + 0.843\,\mathbf{j} + 0.241\,\mathbf{k}).$$

Determinación de **T** *y* **N**: Sustituyendo en la ecuación (3.8) las expresiones para $\mathbf{e}_{BD}$ y **T** en función de sus componentes,

$$\mathbf{e}_{BD} \cdot (\mathbf{T} - 100\,\mathbf{j}) = \left[\frac{4}{9}\mathbf{i} - \frac{7}{9}\mathbf{j} + \frac{4}{9}\mathbf{k}\right]$$

$$\cdot\, [-0.482T\,\mathbf{i} + (0.843T - 100)\,\mathbf{j} + 0.241T\,\mathbf{k}]$$

$$= -0.762T + 77.8 = 0,$$

obtenemos la tensión $T = 102$ lb.

Usando la ecuación (3.7) podemos ahora determinar la fuerza ejercida por la barra sobre el manguito:

$$\mathbf{N} = -\mathbf{T} + 100\,\mathbf{j} = -102(-0.482\,\mathbf{i} + 0.843\,\mathbf{j} + 0.241\,\mathbf{k}) + 100\,\mathbf{j}$$

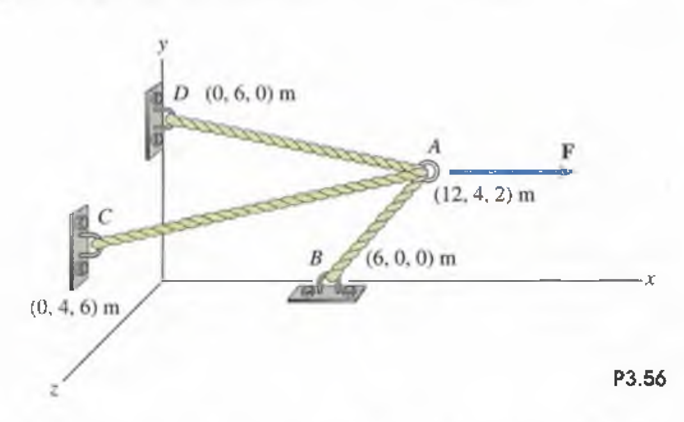
$$= 49.1\,\mathbf{i} + 14.0\,\mathbf{j} - 24.6\,\mathbf{k} \text{ (lb)}.$$

Problemas

3.55 Las fuerzas externas que actúan sobre un cuerpo en equilibrio son $\mathbf{F}_1 = 120\mathbf{i} - 30\mathbf{j} + 20\mathbf{k}$ (lb), $\mathbf{F}_2 = -100\mathbf{i} + 40\mathbf{k}$ (lb), $\mathbf{F}_3$ y $\mathbf{F}_4$. ¿Cuál es la magnitud de $\mathbf{F}_3 + \mathbf{F}_4$?

3.56 La fuerza $\mathbf{F} = 5\mathbf{i}$ (kN) actúa sobre el punto A de la figura P3.56, donde se unen los cables AB, AC y AD. ¿Cuáles son las tensiones en los tres cables?

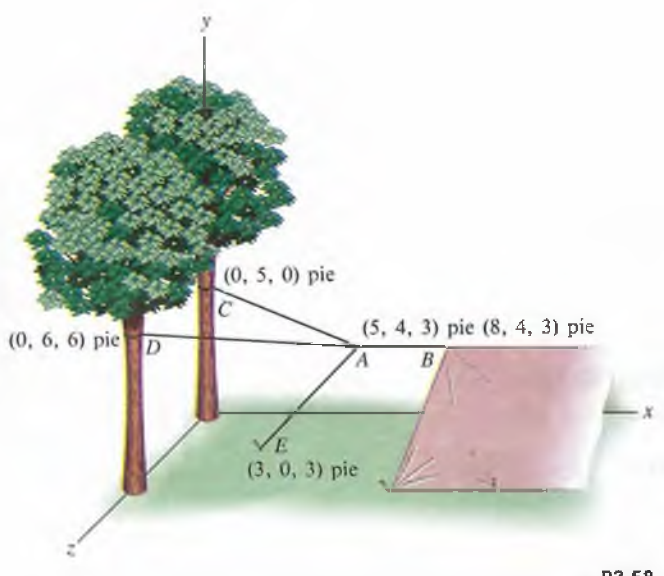
Estrategia: Aísle parte del sistema de cables cerca del punto A. Véase el ejemplo 3.5.



P3.56

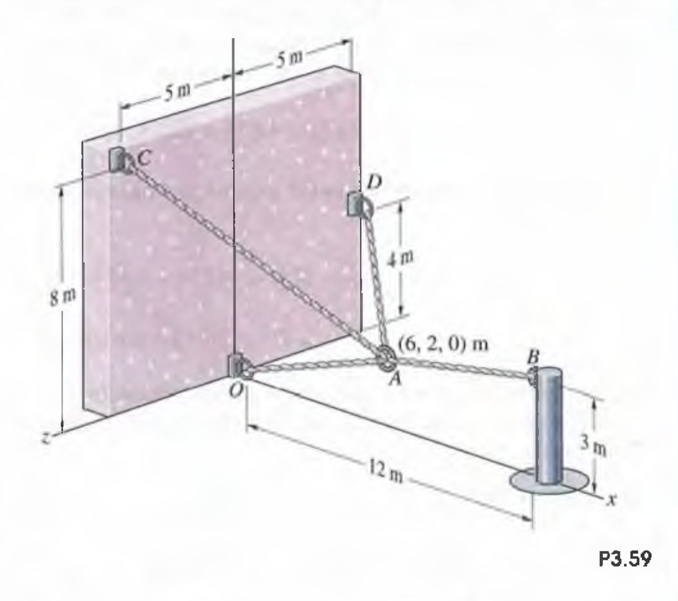
3.57 Considere el sistema de cables del problema 3.56. La fuerza $\mathbf{F} = F\mathbf{i}$ actúa en el punto A, donde se unen los cables AB, AC y AD. La tensión en el cable AB es de 10 kN. Determine las tensiones en los cables AC y AD y la fuerza F.

3.58 Para soportar la tienda de campaña mostrada, la tensión en la cuerda AB debe ser de 40 lb. ¿Cuáles son las tensiones de las cuerdas AC, AD y AE?



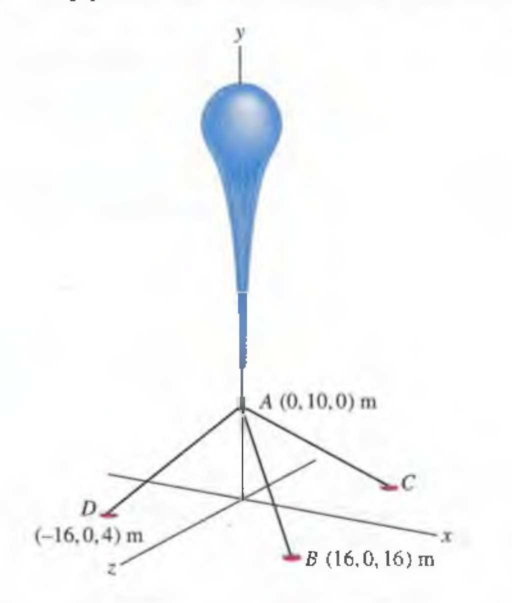
P3.58

3.59 En la figura P3.59, el cable AB está unido a la parte superior del poste vertical de 3 m de altura, y su tensión es de 50 kN. ¿Cuáles son las tensiones en los cables AO, AC y AD?



P3.59

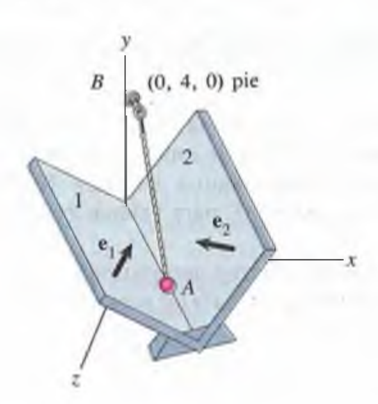
3.60 Un globo meteorológico está sostenido por los cables AB, AC y AD. La masa del globo y del gas que contiene es de 80 kg, y la fuerza de flotación (hacia arriba) sobre el globo es de 1000 N. ¿Qué valores tienen las tensiones en los cables?



P3.60

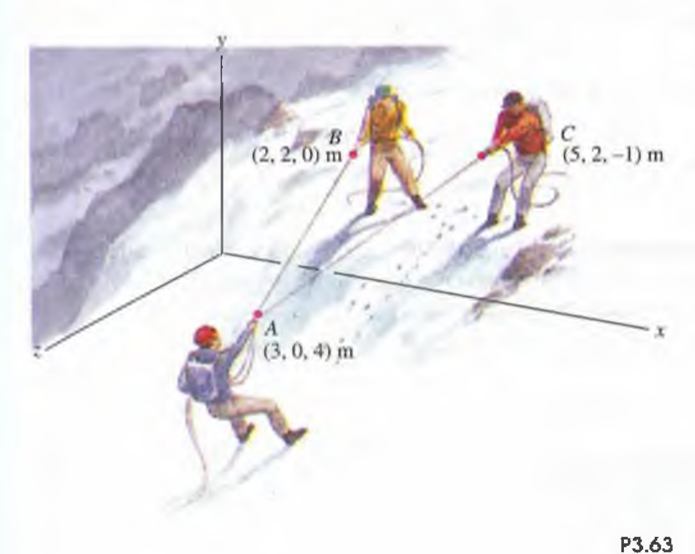
3.61 Considere el globo del problema 3.60. La masa del globo y del gas que contiene es de 80 kg. La tensión medida en el cable AB es de 150 N. ¿Qué valor tiene la fuerza de flotación?

3.62 La pequeña esfera A mostrada pesa 20 lb y sus coordenadas son (4, 0, 6) pies. Está soportada por las placas lisas y planas 1 y 2, y por el cable AB. El vector unitario $\mathbf{e}_1 = \frac{4}{9}\mathbf{i} + \frac{7}{9}\mathbf{j} + \frac{4}{9}\mathbf{k}$ es perpendicular a la placa 1, mientras que el vector unitario $\mathbf{e}_2 = -\frac{9}{11}\mathbf{i} + \frac{2}{11}\mathbf{j} + \frac{6}{11}\mathbf{k}$ es perpendicular a la placa 2. ¿Qué valor tiene la tensión en el cable?



P3.62

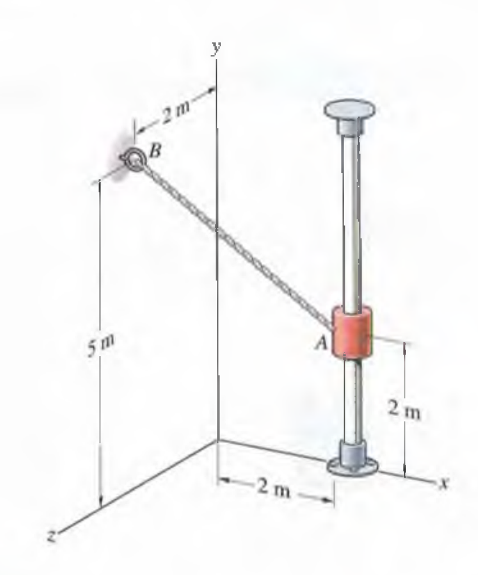
3.63 En la figura P3.63, el alpinista A está recibiendo ayuda de dos compañeros para subir la pendiente de hielo. Su masa es de 80 kg, y los cosenos directores de la fuerza ejercida sobre él por la pendiente son $\cos\theta_x = -0.286$, $\cos\theta_y = 0.429$ y $\cos\theta_z = 0.857$. El eje y es vertical. Si el alpinista está en equilibrio en la posición mostrada, ¿cuáles son las tensiones en las cuerdas AB y AC, y cuál es la magnitud de la fuerza ejercida por la pendiente sobre el alpinista?



P3.63

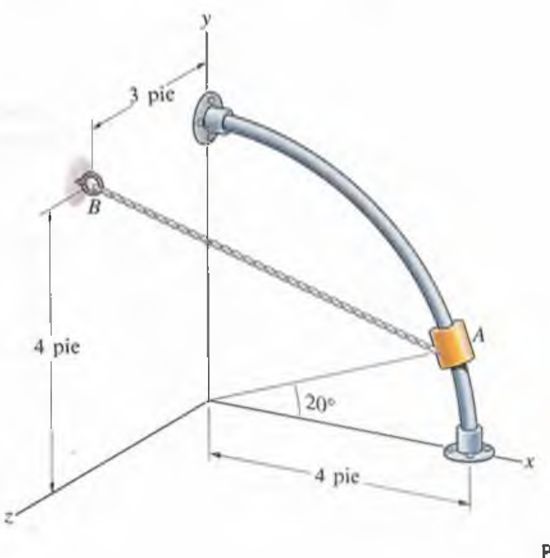
3.64 Considere al alpinista A del problema 3.63. Para tratar de que las tensiones en las cuerdas sean menos desiguales, el alpinista B se mueve a la posición (4, 2, 0) m. ¿Cuáles son las nuevas tensiones en las cuerdas AB y AC y cuál es la magnitud de la fuerza ejercida por la pendiente sobre el alpinista A?

3.65 El manguito A de 200 kg mostrado se halla en equilibrio sobre el poste liso vertical bajo la acción del cable AB.
(a) Determine la tensión en el cable.
(b) Determine la fuerza ejercida por el poste sobre el manguito.



P3.65

3.66 El manguito A de 100 lb se encuentra en equilibrio sobre la barra circular lisa bajo la acción del cable AB. La barra circular se halla en el plano x-y.
(a) Determine la tensión en el cable.
(b) Determine la fuerza normal ejercida por la barra sobre el manguito.



P3.66



Ejemplos con computador

Los siguientes ejercicios y problemas se diseñaron para resolverse con calculadora programable o computador. El ejercicio 7 es similar a los ejemplos y problemas anteriores, excepto que la solución se debe obtener para un intervalo de datos de entrada (input). *El ejemplo 3.8 conduce a una ecuación algebraica que se debe resolver numéricamente.*

Ejemplo 3.7



Figura 3.28

El sistema de cables está diseñado para soportar una carga cuya masa sea de 1 Mg (megagramo). La longitud del cable AB es de 1 m, y $b = 2$ m. La altura de la carga se puede ajustar modificando la longitud del cable AC.

(a) Grafique las tensiones en los cables AB y AC para valores de la longitud del cable AC de 1.2 m a 2.2 m.

(b) Cada uno de los cables AB y AC puede soportar con seguridad una tensión igual al peso de la carga. Use los resultados de la parte (a) para calcular el intervalo admisible para la longitud del cable AC.

ESTRATEGIA

Dibujando el diagrama de cuerpo libre de la parte del sistema de cables en la que se unen los cables, podemos determinar las tensiones en éstos en función de la longitud del cable AC.

SOLUCIÓN

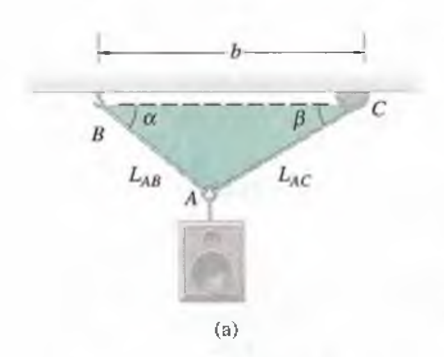
(a) Sean las longitudes de los cables $L_{AB} = 1$ m y L_{AC}. Podemos aplicar la ley de los cosenos al triángulo de la figura (a) para determinar α en función de L_{AC}

$$\alpha = \arccos\left(\frac{b^2 + L_{AB}^2 - L_{AC}^2}{2bL_{AB}}\right).$$

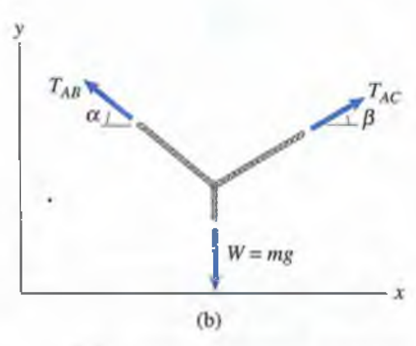
Usamos la ley de los senos para determinar β:

$$\beta = \arcsen\left(\frac{L_{AB} \operatorname{sen} \alpha}{L_{AC}}\right).$$

Dibujo del diagrama de cuerpo libre Dibujamos el diagrama de cuerpo libre de la parte del sistema de cables en la que se unen los cables (Fig. b), donde T_{AB} y T_{AC} son las tensiones en los cables.



(a) Determinación de los ángulos α y β.



(b) Diagrama de cuerpo libre de una parte del sistema de cables.

Aplicación de las ecuaciones de equilibrio Elegimos el sistema coordenado de la figura (b); las ecuaciones de equilibrio son entonces

$$\Sigma F_x = -T_{AB}\cos\alpha + T_{AC}\cos\beta = 0,$$

$$\Sigma F_y = T_{AB}\,\text{sen}\,\alpha + T_{AC}\,\text{sen}\,\beta - W = 0.$$

Despejando en estas ecuaciones las tensiones en los cables obtenemos

$$T_{AB} = \frac{W\cos\beta}{\text{sen}\,\alpha\cos\beta + \cos\alpha\,\text{sen}\,\beta},$$

$$T_{AC} = \frac{W\cos\alpha}{\text{sen}\,\alpha\cos\beta + \cos\alpha\,\text{sen}\,\beta}.$$

Para calcular los resultados asignamos un valor a la longitud L_{AC} y calculamos el ángulo α, luego el ángulo β y finalmente las tensiones T_{AB} y T_{AC}. En la figura 3.29, los valores resultantes de T_{AB}/W y T_{AC}/W se grafican como funciones de L_{AC}.

(b) El intervalo admisible de la longitud del cable AC es aquel en el cual las tensiones en ambos cables son menores que W. En la figura 3.29 vemos que la tensión T_{AB} excede a W para valores de L_{AC} menores que aproximadamente 1.35 m, por lo que el intervalo seguro es $L_{AC} > 1.35$ m.

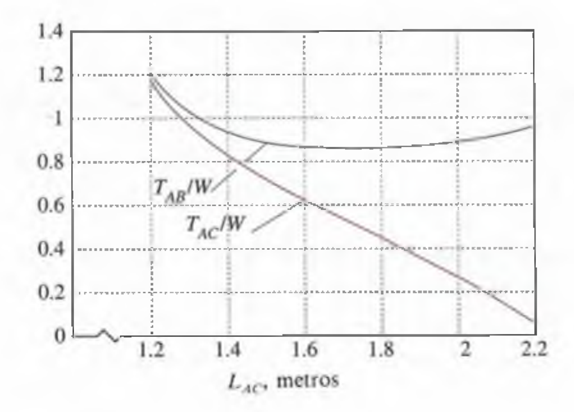


Figura 3.29
Razones de las tensiones en el cable al peso suspendido, en función de L_{AC}.

Ejemplo 3.8

Figura 3.30

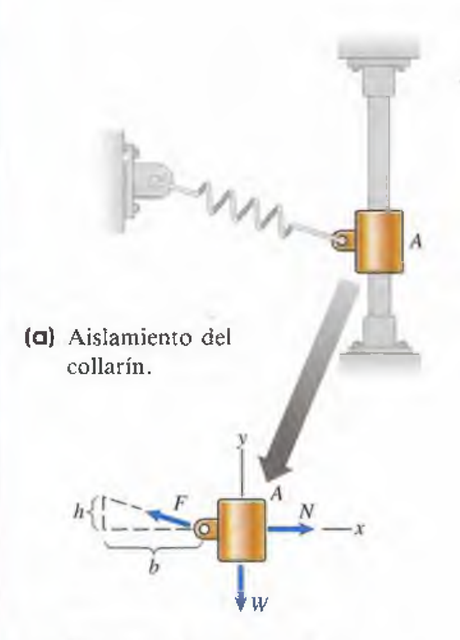
El collarín A de 12 lb se mantiene en equilibrio sobre la barra vertical lisa por el resorte. La constante del resorte $k = 300$ lb/pie, la longitud del resorte no estirado $L_0 = b$ y la distancia $b = 1$ pie. ¿Qué valor tiene la distancia h?

ESTRATEGIA

Tanto la dirección como la magnitud de la fuerza ejercida por el resorte sobre el collarín dependen de h. Dibujando el diagrama de cuerpo libre del collarín y aplicando las ecuaciones de equilibrio podemos obtener una ecuación para h.

SOLUCIÓN

Dibujo del diagrama de cuerpo libre Aislamos el collarín (Fig. a) y completamos el diagrama de cuerpo libre mostrando su peso $W = 12$ lb, la fuerza F ejercida por el resorte y la fuerza normal N ejercida por la barra (Fig. b).



(a) Aislamiento del collarín.

(b) Diagrama de cuerpo libre.

Aplicación de las ecuaciones de equilibrio Elegimos el sistema coordenado de la figura (b) y obtenemos las ecuaciones de equilibrio

$$\Sigma F_x = N - \left(\frac{b}{\sqrt{h^2 + b^2}}\right) F = 0,$$

$$\Sigma F_y = \left(\frac{h}{\sqrt{h^2 + b^2}}\right) F - W = 0.$$

En función de la longitud del resorte $L = \sqrt{h^2 + b^2}$, la fuerza ejercida por el resorte es

$$F = k(L - L_0) = k\left(\sqrt{h^2 + b^2} - b\right).$$

Sustituyendo esta expresión en la segunda ecuación de equilibrio, obtenemos la ecuación

$$\left(\frac{h}{\sqrt{h^2 + b^2}}\right) k\left(\sqrt{h^2 + b^2} - b\right) - W = 0.$$

Sustituyendo los valores de k, b y W encontramos que la distancia h es una raíz de la ecuación

$$f(h) = \left(\frac{300h}{\sqrt{h^2 + 1}}\right)\left(\sqrt{h^2 + 1} - 1\right) - 12 = 0. \quad (3.9)$$

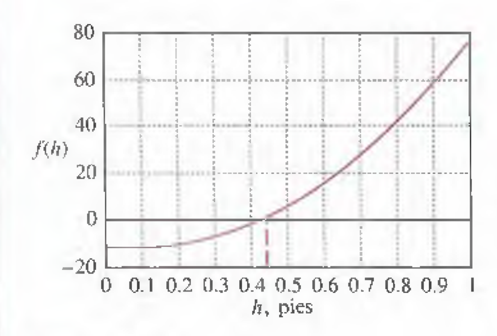


Figura 3.31
Gráfica de la función $f(h)$.

¿Cómo podemos resolver esta ecuación algebraica no lineal en h? Algunas calculadoras y programas como el *Mathcad* y el *TK! Solver* pueden obtener raíces de tales ecuaciones. Otro método es calcular el valor de $f(h)$ para un intervalo de valores de h y graficar los resultados, como lo hicimos en la figura 3.31. De la gráfica calculamos que la solución es $h = 0.45$.

También podemos calcular numéricamente la solución usando el **método de Newton-Raphson**. Nuestro objetivo es obtener una raíz h_r tal que $f(h_r) = 0$ (Fig. 3.32a). Al principio del método escogemos un valor de h y lo denotamos con h_0. El valor de la función en h_0 es $f(h_0)$ (Fig. 3.32b). Si extendemos una línea recta tangente a la función $f(h)$ en $h = h_0$ hasta el eje horizontal, cortará

a éste en un punto h_1 (Fig. 3.32c). La pendiente de esta línea recta es igual a la derivada de $f(h)$ evaluada en h_0:

$$f'(h_0) = \frac{f(h_0)}{h_0 - h_1}.$$

Despejando h_1 en esta ecuación obtenemos

$$h_1 = h_0 - \frac{f(h_0)}{f'(h_0)}.$$

Si ahora extendemos una línea recta tangente a la función $f(h)$ en $h = h_1$ hasta el eje horizontal, cortará a éste en un punto h_2 (Fig. 3.32d). Como la pendiente de esta línea recta es igual a la derivada de $f(h)$ evaluada en $h = h_1$,

$$f'(h_1) = \frac{f(h_1)}{h_1 - h_2},$$

podemos despejar h_2:

$$h_2 = h_1 - \frac{f(h_1)}{f'(h_1)}.$$

Procediendo de la misma manera resolvemos recursivamente la ecuación

$$h_n = h_{n-1} - \frac{f(h_{n-1})}{f'(h_{n-1})}$$

para $n = 1, 2, \ldots$ Si los valores de h_n convergen a una raíz h_r, podemos detener la iteración cuando el valor de $f(h_n)$ se reduzca a un valor razonablemente pequeño. Este método es fácil de programar.

La derivada de la ecuación (3.9) es

$$f'(h) = 300\{[(h^2+1)^{-1/2} - h^2(h^2+1)^{-3/2}][(h^2+1)^{1/2} - 1]$$
$$+ h^2(h^2+1)^{-1}\}.$$

Si escogemos un valor inicial $h_0 = 1$ pie, $f(h_0) = f(1) = 75.868$. El primer paso da

$$h_1 = h_0 - \frac{f(h_0)}{f'(h_0)} = 1 - \frac{f(1)}{f'(1)} = 0.609 \text{ pie},$$

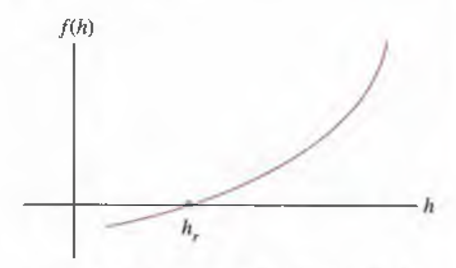
y $f(h_1) = f(0.609) = 14.636$. El segundo paso da

$$h_2 = h_1 - \frac{f(h_1)}{f'(h_1)} = 0.609 - \frac{f(0.609)}{f'(0.609)} = 0.479 \text{ pie},$$

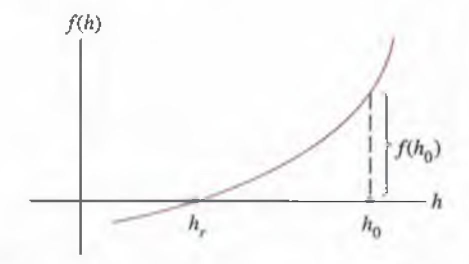
y $f(h_2) = f(0.479) = 2.127$.

Procediendo de la misma manera obtenemos los valores mostrados en la tabla 3.2. Después de 7 pasos, el proceso converge en la solución $h = 0.452$ pies.

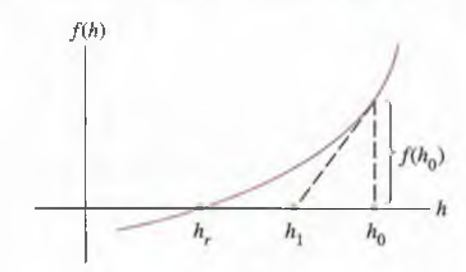
Figura 3.32



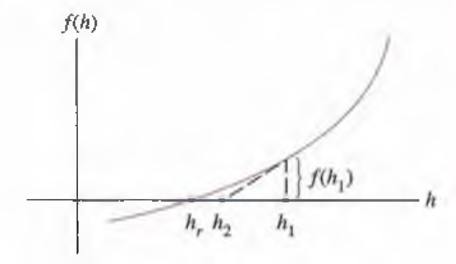
(a) Una raíz h_r de la función $f(h)$.



(b) El valor de la función en h_0 es $f(h_0)$.



(c) La línea recta tangente a $f(h)$ en h_0 prolongada hasta el eje horizontal.



(d) La línea recta tangente a $f(h)$ en h_1 prolongada hasta el eje horizontal.

Tabla 3.2 Valores de h_n y $f(h_n)$

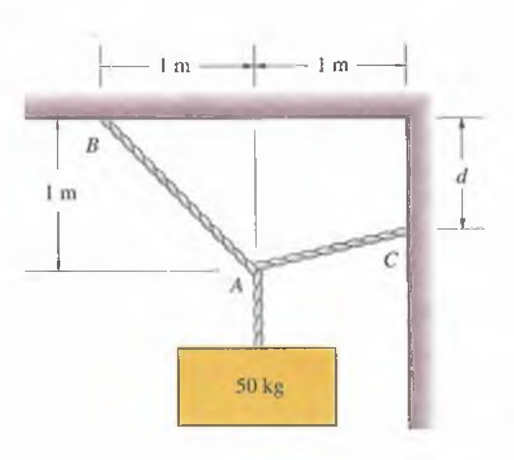
n	h_n, pies	$f(h_n)$
0	1.000	75.868
1	0.609	14.636
2	0.479	2.127
3	0.453	0.091
4	0.452	0.000

COMENTARIO

El método de Newton-Raphson puede converger o no en una raíz diferente de la buscada. Cuando esto sucede, se debe usar un valor inicial diferente.

Problemas

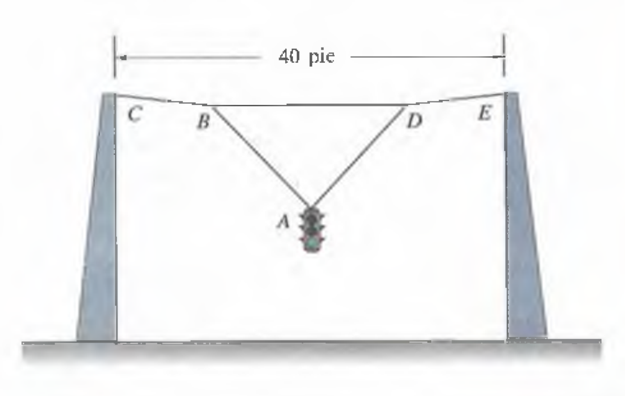
3.67 (a) Grafique las tensiones en los cables AB y AC mostrados para valores de d de 0 a 1.8 m.
(b) Cada cable soportará con seguridad una tensión de 1 kN. Use su gráfica para calcular el intervalo admisible de valores de d.



P3.67

3.68 El semáforo colgante mostrado pesa 110 lb. Los cables AB, BC, AD y DE tienen cada uno 11 pies de longitud. Determine la longitud mínima admisible del cable BD si las tensiones en los cables no deben exceder de 1000 lb.

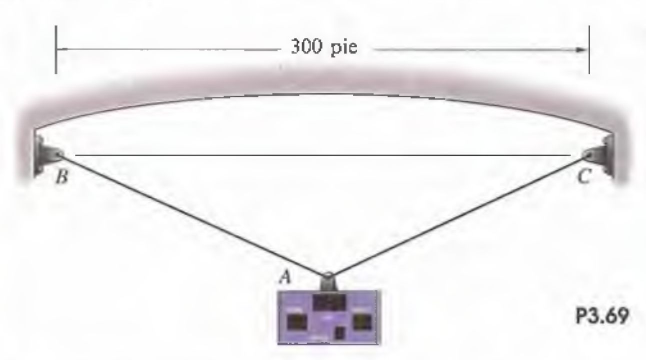
Estrategia: Grafique las tensiones en los cables para un intervalo de longitudes del cable BD.



P3.68

3.69 En la figura P3.69 el tablero de resultados A, que pesa 2000 lb, está suspendido por los cables AB y AC sobre un estadio deportivo. Cada cable tiene 160 pies de longitud. Suponga que se quiere desplazar el tablero acortando el cable AB y manteniendo constante la longitud del cable AC.
(a) Grafique la tensión en el cable AB en función de su longitud para valores de ésta de 142 a 160 pies.
(b) Use su gráfica para calcular cuánto se puede levantar el ta-

blero respecto a su posición original si no se quiere someter el cable AB a una tensión mayor que 6000 lb.

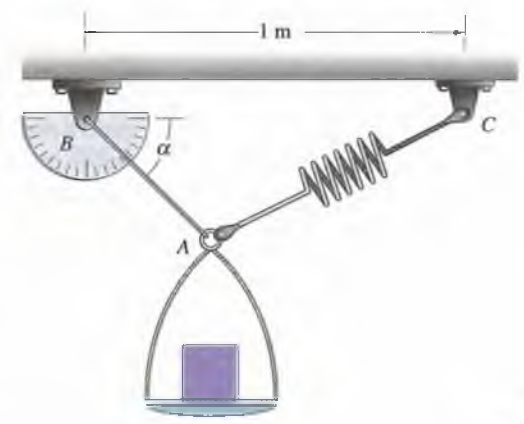


P3.69

3.70 Considere el camión suspendido de 4 Mg (megagramos) del problema 3.38. La suma de las longitudes de los cables AB y BC es de 42 m.
(a) Grafique las tensiones en los cables AB y BC para valores de b de 0 a 20 m.
(b) Cada cable soportará con seguridad una tensión de 60 kN. Use los resultados de la parte (a) para calcular el intervalo admisible de la distancia b.

3.71 Considere el sistema del problema 3.39. La tensión en el cable AD es de 200 lb.
(a) Grafique las tensiones en los cables AB y AC para valores de h de 0 a 20 pulg.
(b) ¿Para qué intervalos de valores de h son las tensiones en los cables AB y AC positivas? ¿Qué sucede cuando h no está en ese intervalo?

3.72 Se encargó a un grupo de estudiantes de ingeniería diseñar una báscula para pesar cuerpos de pequeño peso. Se coloca un objeto sobre la bandeja y se mide el ángulo α usando el transportador B. La longitud de la cuerda AB es de 500 mm. La longitud del resorte AC sin estirar es de 660 mm y la constante del resorte k es de 20 N/m.
(a) Grafique el ángulo α para valores del peso del cuerpo (sin considerar el peso de la bandeja) de 0 a 20 N.
(b) Use el resultado de la parte (a) para calcular el ángulo α correspondiente a un peso de 10 N.



P3.72

3.73 El sistema del problema 3.51 proporciona soporte lateral a una carga que descansa sobre la plataforma lisa de un camión. Cuando la carga está sometida a una fuerza lateral F efectiva (Fig. b), la distancia de la posición original de la carga a su posición de equilibrio es δ. La longitud no estirada de cada resorte es de 1 pie. Suponga que la carga está sometida a una fuerza lateral efectiva $F = 200$ lb.
(a) Grafique la constante k para valores de δ de 0.5 a 3 pies.
(b) Use los resultados de la parte (a) a fin de calcular los valores de k para $\delta = 1$ pie y $\delta = 2$ pies.

3.74 Considere el globo del problema 3.60. La masa del globo y del gas que contiene es de 80 kg, y la fuerza de flotación es de 1000 N. Si los cables AB, AC y AD resisten con seguridad una tensión de 500 N cada uno y las coordenadas del punto A son $(0, h, 0)$, ¿cuál es la altura h mínima a la que el globo se puede mantener?

Resumen del capítulo

La línea recta que coincide con un vector fuerza se denomina **línea de acción** de la fuerza. Un sistema de fuerzas es **coplanar** o **bidimensional** si las líneas de acción de las fuerzas se encuentran en un plano. De otra manera el sistema es **tridimensional**. Un sistema de fuerzas es **concurrente** si las líneas de acción de las fuerzas se cortan en un punto y **paralelo** si las líneas de acción son paralelas.

Un cuerpo está sometido a una **fuerza externa** si la fuerza es ejercida por un cuerpo diferente. Cuando una parte de un cuerpo está sometida a una fuerza por otra parte del mismo cuerpo, entonces la fuerza es **interna.**

Una fuerza **de cuerpo** actúa sobre el volumen de un cuerpo, y una fuerza **de superficie** o **de contacto** actúa sobre una superficie.

Fuerzas gravitatorias

El peso de un cuerpo está relacionado con su masa por la ecuación $W = mg$, donde $g = 9.81$ m/s^2 en unidades SI y $g = 32.2$ pie/s^2 en unidades del sistema inglés.

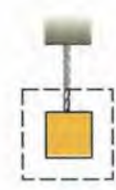
Superficies

Dos superficies en contacto ejercen entre sí fuerzas que son iguales en magnitud y opuestas en dirección. Cada fuerza se puede descomponer en la **fuerza normal** y en la **fuerza de fricción.** Si la fuerza de fricción es despreciable en comparación con la fuerza normal, se dice que las superficies son **lisas.** De lo contrario, son **rugosas.**

Cuerdas y cables

Una cuerda o un cable unido a un cuerpo ejerce una fuerza sobre el cuerpo cuya magnitud es igual a la tensión y cuya línea de acción es paralela a la cuerda o cable en el punto de unión.

Una **polea** es una rueda con un borde ranurado que se puede usar para cambiar la dirección de la cuerda o cable. Cuando una polea puede girar con libertad y la cuerda o cable está en reposo o hace girar a la polea con velocidad constante, la tensión es aproximadamente igual en ambos lados de la polea.



1. Seleccione el cuerpo por aislar.

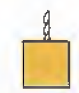
Resortes

La fuerza ejercida por un **resorte lineal** es

$$|\mathbf{F}| = k\,(L - L_0), \qquad \text{Ec. (3.1)}$$

donde k es **la constante del resorte,** L es la longitud del resorte y L_0 es su longitud sin estirar.

Diagramas de cuerpo libre



2. Dibuje el cuerpo aislado.

Un diagrama de cuerpo libre es el dibujo de un cuerpo en el que el cuerpo se aísla de su entorno y se muestran las fuerzas exteriores que actúan sobre el cuerpo. Dibujar un diagrama de cuerpo libre requiere tres pasos. Se debe elegir un sistema coordenado para expresar las fuerzas sobre el cuerpo aislado en función de sus componentes.

Equilibrio

Si un cuerpo está en equilibrio, la suma de las fuerzas externas que actúan sobre él es igual a cero.

$$\Sigma\mathbf{F} = \mathbf{0}. \qquad \text{Ec. (3.2)}$$



3. Muestre las fuerzas externas.

Al expresar la suma de las fuerzas en función de sus componentes,

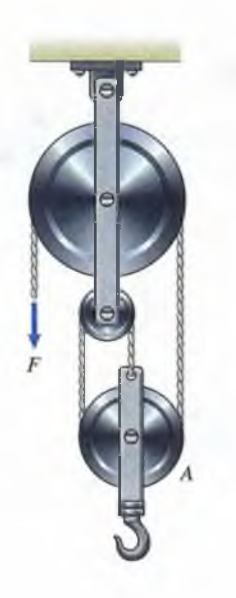
$$\Sigma\mathbf{F} = (\Sigma F_x)\mathbf{i} + (\Sigma F_y)\mathbf{j} + (\Sigma F_z)\mathbf{k} = \mathbf{0},$$

cada una de las sumas de las fuerzas externas en las direcciones x, y y z debe ser igual a cero:

$$\Sigma F_x = 0, \qquad \Sigma F_y = 0, \qquad \Sigma F_z = 0. \qquad \text{Ec. (3.6)}$$

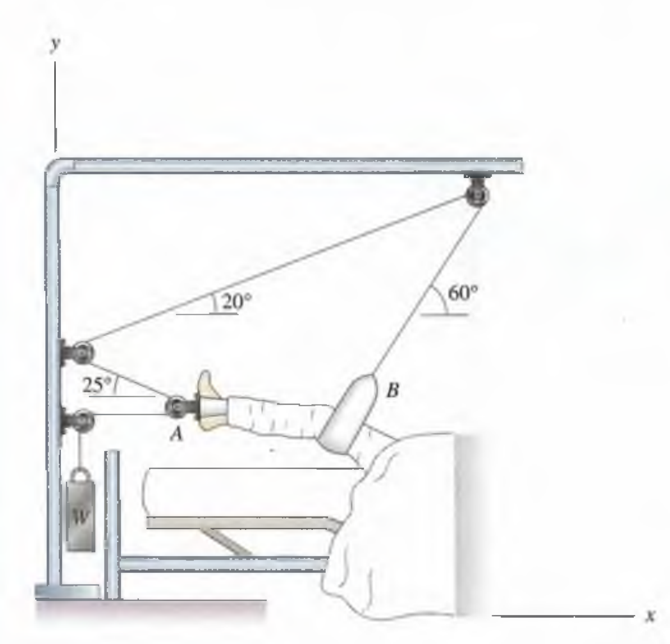
Problemas de repaso

3.75 El dispositivo A mostrado, que incluye la polea, pesa 60 lb. ¿Qué fuerza F se necesita para que el sistema esté en equilibrio?



P3.75

3.76 El sistema mostrado se llama tensión de Russell. Si la suma de las fuerzas hacia abajo ejercidas en A y B por las piernas del paciente es de 32.2 lb, ¿cuál es el peso W?



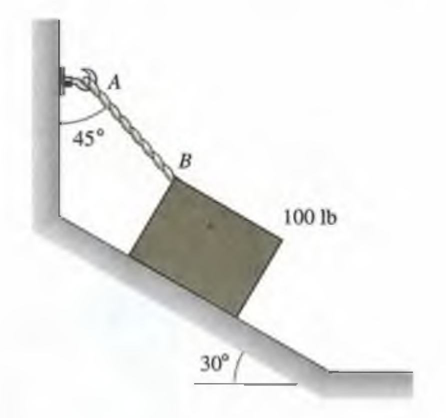
P3.76

3.77 Una cuerda pesada cuelga como se muestra. Si su peso es de 200 lb, ¿cuáles son las tensiones en la cuerda en los puntos A y B?



P3.77

3.78 Una caja de 100 lb es mantenida en equilibrio sobre la superficie lisa por una cuerda AB. Determine la tensión en la cuerda y la magnitud de la fuerza normal ejercida por la superficie sobre la caja.

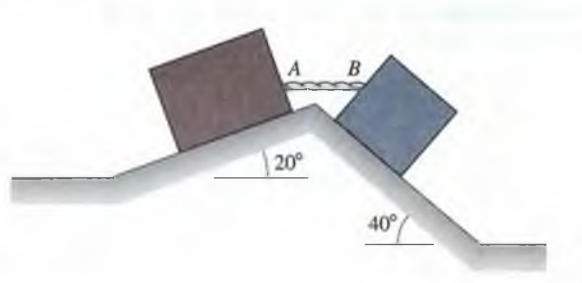


P3.78

3.79 El cable AB mostrado es horizontal y la caja de la derecha pesa 100 lb. Las superficies son lisas.

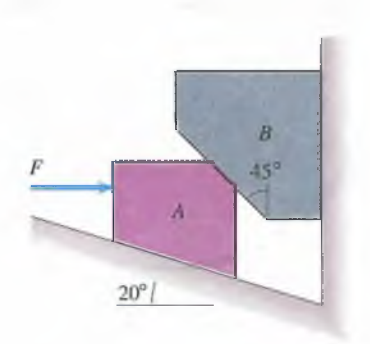
(a) ¿Cuál es la tensión en el cable?

(b) ¿Cuál es el peso de la caja de la izquierda?



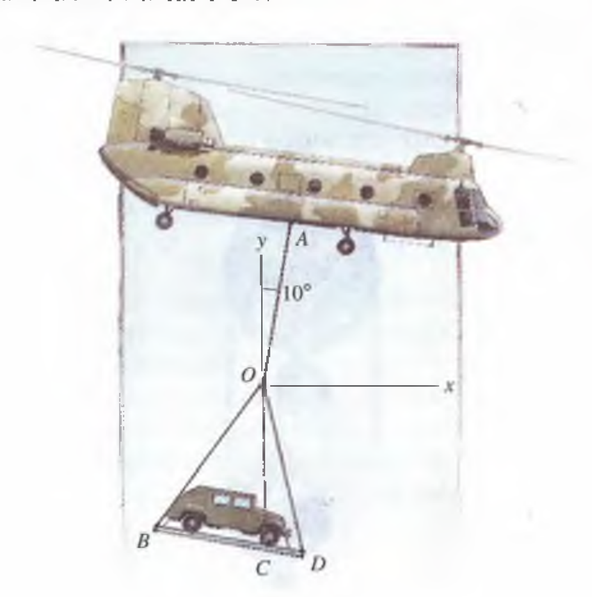
P3.79

3.80 En la figura P3.80, la masa del bloque A es de 42 kg y la masa del bloque B es de 50 kg. Las superficies son lisas. Si los bloques están en equilibrio, ¿qué valor tiene la fuerza F?



P3.80

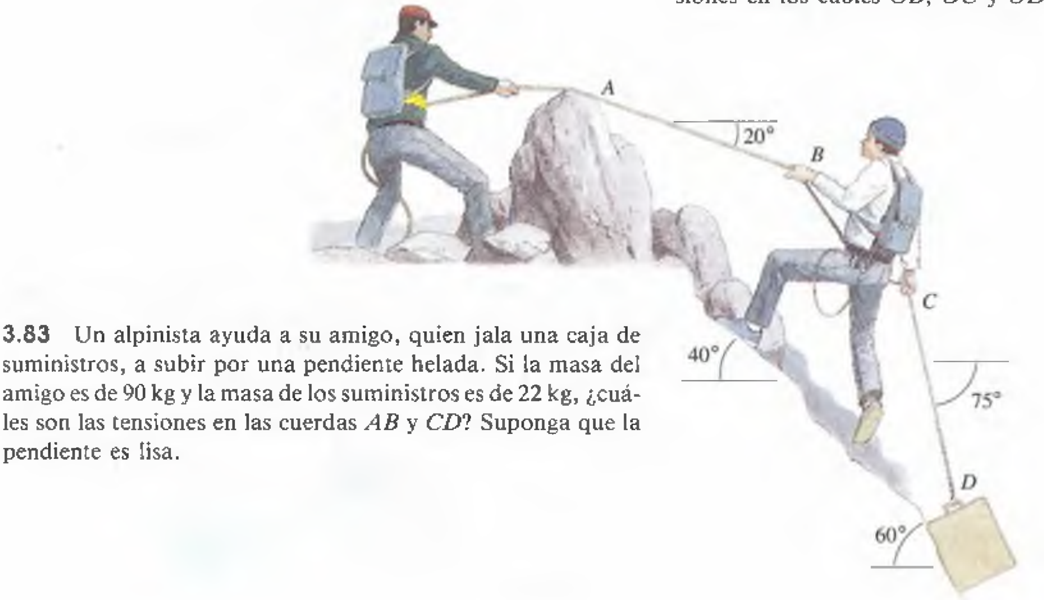
3.81 La carga de 680 kg que pende del helicóptero está en equilibrio. La fuerza aerodinámica de arrastre sobre la carga es horizontal. El eje y es vertical y el cable OA se encuentra en el plano x-y. Determine la magnitud de la fuerza de arrastre y la tensión en el cable OA.



P3.81

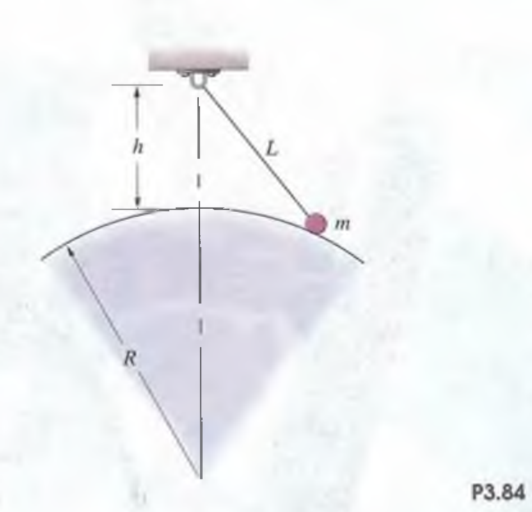
3.82 En el problema 3.81 las coordenadas de los puntos B, C y D de conexión del cable son: $(-3.3, -4.5, 0)$ m, $(1.1, -5.3, 1)$ m, y $(1.6, -5.4, -1)$ m, respectivamente. ¿Cuáles son las tensiones en los cables OB, OC y OD?

3.83 Un alpinista ayuda a su amigo, quien jala una caja de suministros, a subir por una pendiente helada. Si la masa del amigo es de 90 kg y la masa de los suministros es de 22 kg, ¿cuáles son las tensiones en las cuerdas AB y CD? Suponga que la pendiente es lisa.



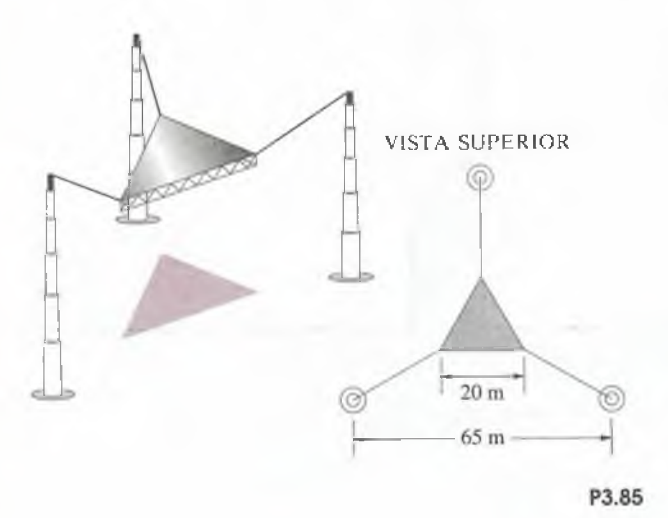
P3.83

3.84 Una pequeña esfera de masa m está unida a una cuerda de longitud L y descansa sobre la superficie lisa de una esfera de radio R. Determine la tensión en la cuerda en función de m, L, h y R.



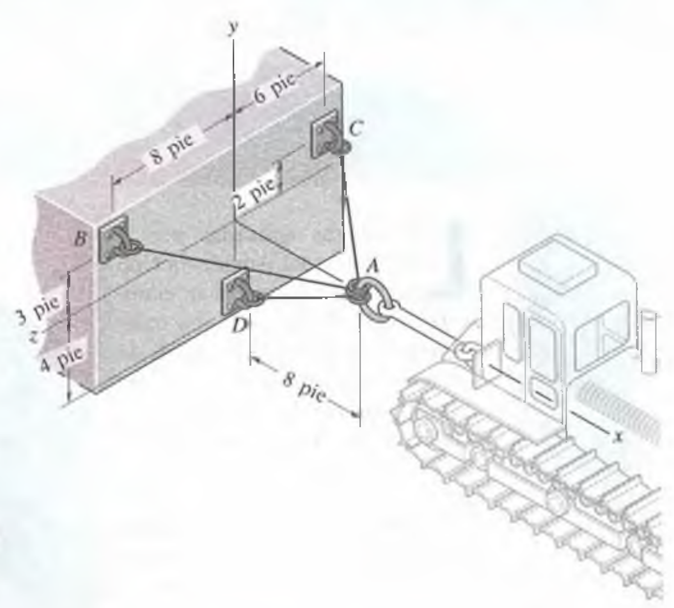
P3.84

3.85 Un ingeniero que efectúa estudios preliminares para el diseño de un nuevo radiotelescopio proyectó una plataforma triangular suspendida por cables apoyados en tres torres de 40 m de altura igualmente espaciadas. La plataforma tiene una masa de 20 Mg (megagramos) y está 10 m abajo del punto más alto de las torres. ¿A qué tensión están sometidos los cables?



P3.85

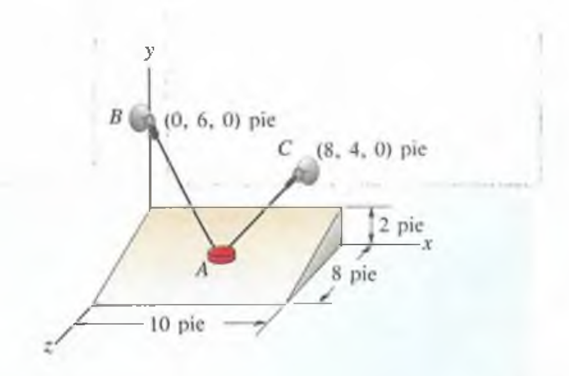
3.86 El tractor mostrado ejerce una fuerza $\mathbf{F} = 2\mathbf{i}$ (klb) en A. ¿Qué valor tienen las tensiones en los cables AB, AC y AD?



P3.86

3.87 Considere el tractor del problema 3.86. Por seguridad, no se quiere someter ninguno de los cables a una tensión mayor que 5 klb. Con base en este criterio, ¿cuál es la mayor fuerza paralela al eje x que el tractor puede ejercer en A?

3.88 El disco metálico A mostrado pesa 10 lb. Es mantenido en su posición en el centro de la superficie lisa inclinada por las cuerdas AB y AC. ¿Cuáles son las tensiones en las cuerdas?



P3.88



Las fuerzas aplicadas por el tripulante del America's Cup ejercen un par sobre la manivela "molinillo de café". La componente del par paralela al eje de la manivela hace que éste gire, cambiando rápidamente la orientación de la vela. En este capítulo se calcularán los momentos y los pares ejercidos por fuerzas y se representarán sistemas de fuerzas y momentos por medio de sistemas equivalentes más sencillos.

Capítulo 4

Sistemas de fuerzas y momentos

LOS efectos de las fuerzas dependen no sólo de sus magnitudes y direcciones, sino también de los momentos que ejercen. El momento de una fuerza es una medida de su tendencia a causar giros. Los momentos causan el giro de maquinaria como la manivela de un barco de vela, las ruedas de un vehículo, los cigüeñales y las turbinas. Aun si la suma de las fuerzas que actúan sobre un cuerpo es nula, éstas pueden ejercer un momento, que se denomina par. Si un cuerpo está en equilibrio, la suma de los momentos respecto a cualquier punto debido a las fuerzas externas y pares actuantes en él es igual a cero. Antes de que continúe su estudio del diagrama de cuerpo libre y del equilibrio, es necesario que usted se familiarice con los momentos, los pares, y el concepto de sistemas equivalentes de fuerzas y momentos.

4.1 *Descripción bidimensional del momento*

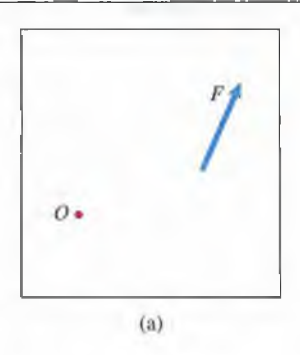
Consideremos una fuerza de magnitud F y un punto O en la dirección perpendicular al plano que los contiene (Fig. 4.1a). La **magnitud del momento** de la fuerza respecto a O es DF, donde D es la distancia perpendicular de O a la línea de acción de la fuerza (Fig. 4.1b). La fuerza tiende a causar un giro antihorario alrededor de O. Es decir, si la fuerza actúa sobre un cuerpo que puede girar alrededor del punto O, la fuerza generará un giro antihorario (Fig. 4.1c). Se dice que el **sentido del momento** es antihorario. *Definimos los momentos antihorarios como positivos y los momentos horarios como negativos.* (Ésta es la convención usual, aunque encontraremos situaciones en las que será más conveniente definir los momentos horarios como positivos.) El momento de la fuerza respecto a O es entonces

$$M_0 = DF. \tag{4.1}$$

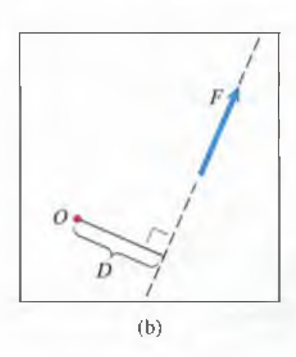
Si la línea de acción de F pasa por O, la distancia perpendicular D es igual a cero y el momento de F respecto a O también es igual a cero.

Las dimensiones del momento son (fuerza) × (distancia). Por ejemplo, los momentos se pueden expresar en newton-metro en unidades SI y en lb-pie en el sistema inglés.

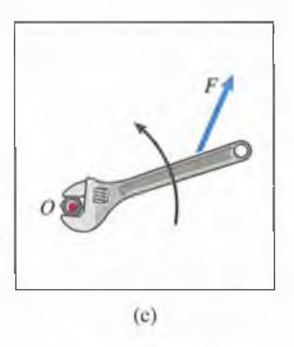
Se colocará un televisor en una repisa, pero ¿la unión de la repisa a la pared es suficientemente fuerte para resistir la carga? De manera instintiva, se colocará el aparato cerca de la pared (Fig. 4.2a), pues es más probable que la conexión falle si se coloca lejos de la pared (Fig. 4.2b). ¿Cuál es la diferencia en los dos casos? La magnitud y la dirección de la fuerza ejercida sobre la repisa por el peso del televisor son las mismas en ambos casos, pero los momentos ejercidos sobre la unión son diferentes. El momento ejercido respecto a O por el peso, cuando éste se halla cerca de la pared, $M_0 = -D_1W$, es de menor magnitud que el momento respecto a O, $M_0 = -D_2W$, cuando el peso está lejos de la pared.



(a)



(b)



(c)

Figura 4.1

(a) La fuerza F y un punto O.
(b) Distancia perpendicular D del punto O a la línea de acción de F.
(c) El sentido del momento es antihorario.

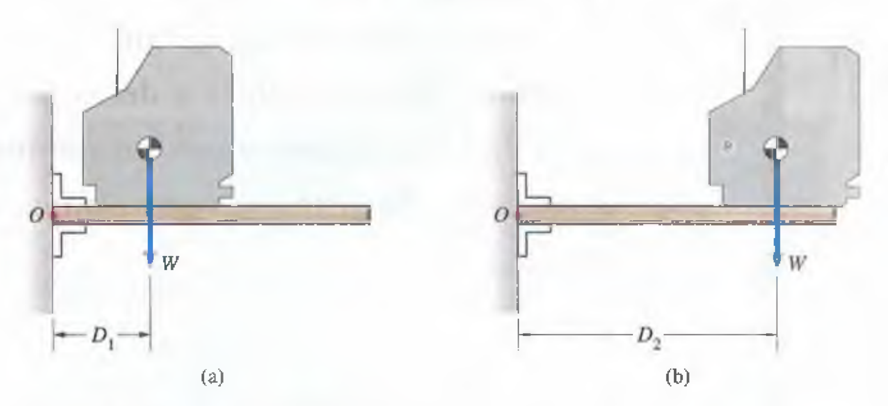


Figura 4.2

Es mejor colocar el televisor cerca de la pared (a) y no lejos de ella (b) porque el momento ejercido sobre la unión de la repisa con la pared es menor en el primer caso.

Se puede usar el método descrito en esta sección para determinar la suma de los momentos de un sistema de fuerzas respecto a un punto si éstas son bidimensionales (coplanares) y el punto se encuentra en el mismo plano. Por ejemplo, consideremos la grúa mostrada en la figura 4.3. El momento ejercido respecto a O por la carga W_1 y el contrapeso W_2 es

$$\Sigma M_0 = D_1 W_1 - D_2 W_2.$$

Este momento tiende a hacer que la parte superior de la torre vertical gire, lo cual podría ocasionar su colapso. Si la distancia D_2 se ajusta de modo que $D_1 W_1 = D_2 W_2$, el momento respecto al punto O debido a la carga y al contrapeso será igual a cero.

Si descomponemos una fuerza en sus componentes, el momento de la fuerza respecto a un punto O es igual a la suma de los momentos de sus componentes respecto a O. En la próxima sección demostraremos este utilísimo resultado.

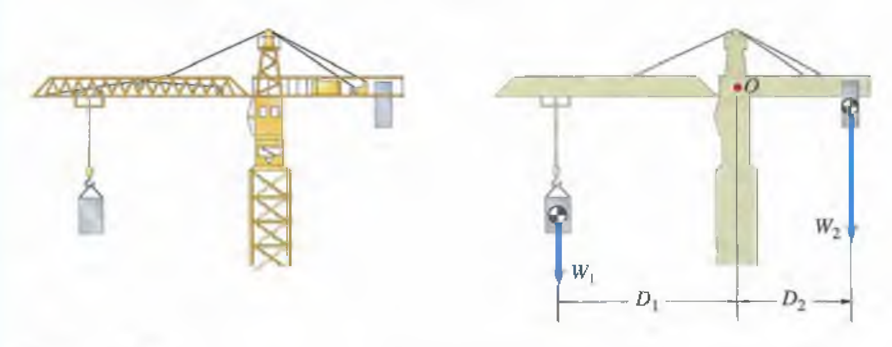


Figura 4.3
Grúa de torre usada en la construcción de edificios altos.

Los siguientes ejemplos ilustran algunas situaciones en las que se puede usar la descripción bidimensional para calcular momentos. La determinación del momento de una fuerza respecto a un punto O requiere tres pasos:

1. Determinar la distancia perpendicular. *Se debe determinar la distancia perpendicular de O a la línea de acción de la fuerza. Si esto resulta difícil, la fuerza se puede separar en componentes para determinar las distancias perpendiculares a las componentes.*

2. Calcular la magnitud del momento. *La magnitud del momento es el producto de la fuerza por la distancia perpendicular.*

3. Determinar el signo. *El momento se define como positivo si el sentido del momento (la dirección en que la fuerza tiende a girar respecto a O) es antihorario.*

Ejemplo 4.1

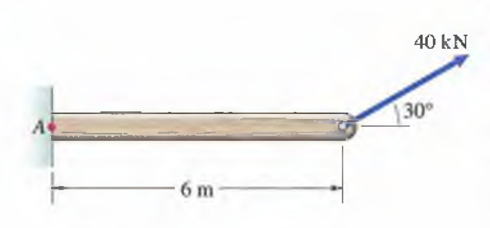


Figura 4.4

¿Qué valor tiene el momento de la fuerza de 40 kN en la figura 4.4 respecto al punto A?

ESTRATEGIA

Podemos calcular el momento de dos maneras: determinando la distancia perpendicular del punto A a la línea de acción de la fuerza, o haciendo la descomposición de la fuerza en sus componentes y determinando luego la suma de los momentos de las componentes respecto a A.

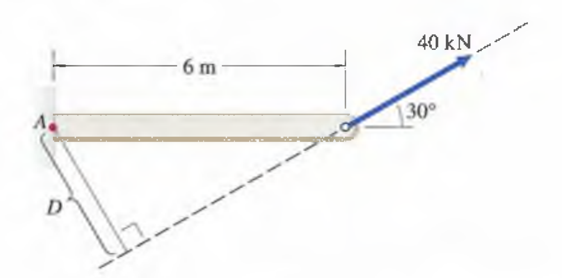
SOLUCIÓN

Primer método De la figura (a), la distancia perpendicular de A a la línea de acción de la fuerza es

$$D = 6 \text{ sen } 30^\circ = 3 \text{ m}.$$

La magnitud del momento de la fuerza respecto a A es (3 m)(40 kN) = 120 kN-m, y el sentido del momento respecto a A es antihorario. Por tanto, el momento es

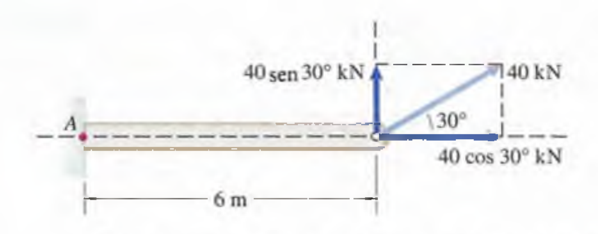
$$M_A = 120 \text{ kN-m}.$$



(a) Determinación de la distancia perpendicular D.

Segundo método En la figura (b) separamos la fuerza en sus componentes horizontal y vertical. La distancia perpendicular de A a la línea de acción de la componente horizontal es cero, por lo que la componente horizontal no ejerce momento respecto a A. La magnitud del momento de la componente vertical respecto a A es (6 m)(40 sen 30° kN) = 120 kN-m, y el sentido de su momento respecto a A es antihorario. El momento es

$$M_A = 120 \text{ kN-m}.$$



(b) Descomposición de la fuerza en componentes.

Ejemplo 4.2

Cuatro fuerzas actúan sobre la parte de máquina mostrada en la figura 4.5. ¿Qué valor tiene la suma de los momentos de las fuerzas respecto al origen O?

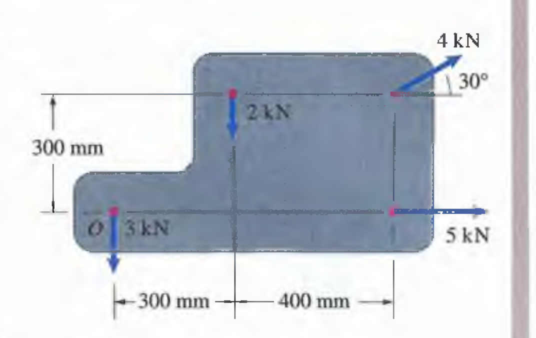


Figura 4.5

ESTRATEGIA

Podemos determinar los momentos de las fuerzas respecto al punto O directamente de la información dada excepto para la fuerza de 4 kN. Determinaremos su momento separándolas en sus componentes y sumando los momentos de éstas.

SOLUCIÓN

Momento de la fuerza de 3 kN La línea de acción de la fuerza de 3 kN pasa por O. No ejerce momento respecto a O.

Momento de la fuerza de 5 kN La línea de acción de la fuerza de 5 kN también pasa por O. No ejerce tampoco momento respecto a O.

Momento de la fuerza de 2 kN La distancia perpendicular de O a la línea de acción de la fuerza de 2 kN es 0.3 m, y el sentido del momento respecto a O es horario. El momento de la fuerza de 2 kN respecto a O es

$$-(0.3 \text{ m})\,(2 \text{ kN}) = -0.600 \text{ kN-m}.$$

(Observe que convertimos la distancia perpendicular de milímetros a metros para expresar el resultado en términos de kilonewton-metro.)

Momento de la fuerza de 4 kN En la figura (a) incluimos un sistema coordenado y descomponemos la fuerza de 4 kN en sus componentes x y y. La distancia perpendicular de O a la línea de acción de la componente x es de 0.3 m, y el sentido del momento respecto a O es horario. El momento de la componente x respecto a O es

$$-(0.3 \text{ m})\,(4 \cos 30° \text{ kN}) = -1.039 \text{ kN-m}.$$

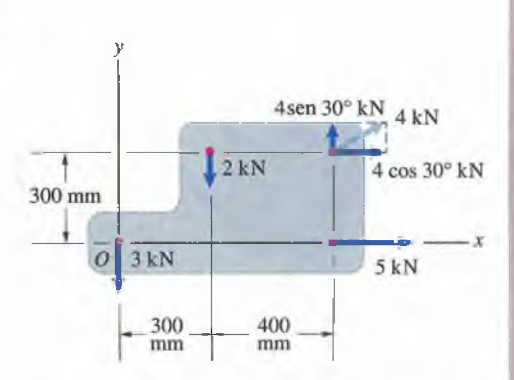
La distancia perpendicular del punto O a la línea de acción de la componente y es de 0.7 m, y el sentido del momento respecto a O es antihorario. El momento de la componente y respecto a O es

$$(0.7 \text{ m})(4 \text{ sen } 30° \text{ kN}) = 1.400 \text{ kN-m}.$$

La suma de los momentos de las cuatro fuerzas respecto a O es

$$\Sigma M_0 = -0.600 - 1.039 + 1.400 = -0.239 \text{ kN-m}.$$

Las cuatro fuerzas ejercen un momento horario de 0.239 kN-m respecto al punto O.



(a) Descomposición de la fuerza de 4 kN en componentes.

Ejemplo 4.3

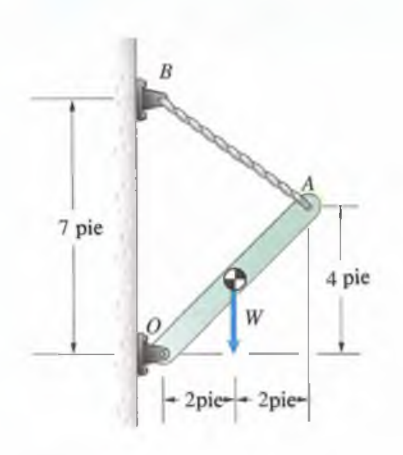


Figura 4.6

El peso de la barra OA de la figura 4.6 es $W = 300$ lb. La suma de los momentos respecto a O del peso W y de la fuerza que ejerce el cable AB sobre la barra OA es igual a cero. ¿Cuál es la tensión en el cable?

ESTRATEGIA

Sea T la tensión en el cable AB. Usando las dimensiones dadas podemos expresar las componentes horizontal y vertical de la fuerza ejercida sobre la barra por el cable en función de T. Luego, haciendo la suma de los momentos respecto a O debidos al peso de la barra y de la fuerza ejercida por el cable igual a cero, podemos obtener una ecuación para T.

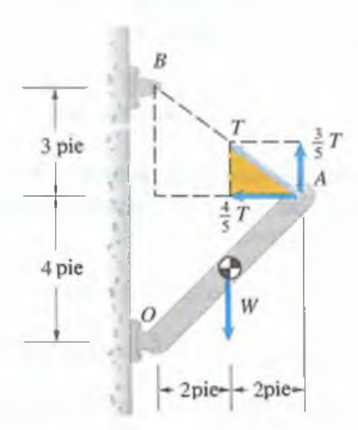
SOLUCIÓN

Usando triángulos semejantes, descomponemos la fuerza ejercida sobre la barra por el cable en componentes horizontal y vertical (Fig. a). La suma de los momentos respecto a O debidos al peso de la barra y a la fuerza ejercida por el cable AB es

$$\Sigma M_0 = (4)\left(\frac{4}{5}T\right) + (4)\left(\frac{3}{5}T\right) - (2)W = 0.$$

Despejando T se obtiene

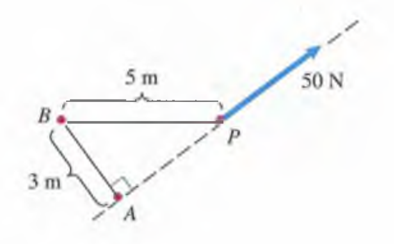
$$T = 0.357W = 107.1 \text{ lb}.$$



(a) Descomposición de la fuerza ejercida por el cable en sus componentes horizontal y vertical.

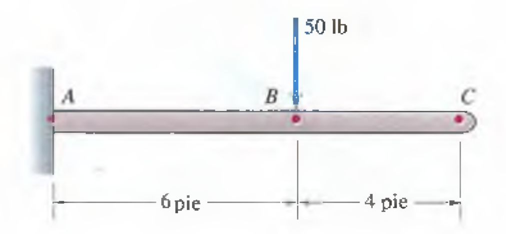
Problemas

4.1 Determine el momento de la fuerza de 50 N respecto (a) al punto A y (b) al punto B de la figura.



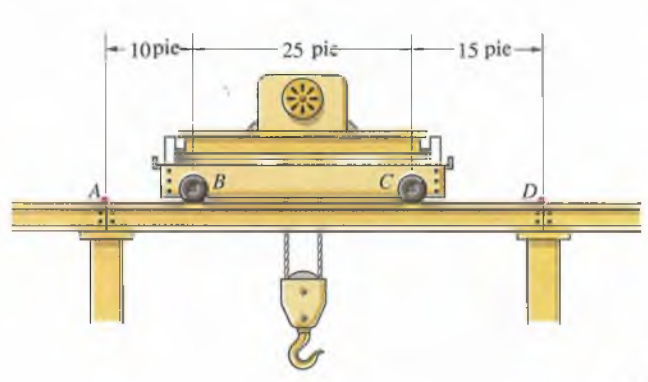
P4.1

4.2 Determine el momento de la fuerza de 50 lb respecto (a) al punto A, (b) al punto B y (c) al punto C de la figura.

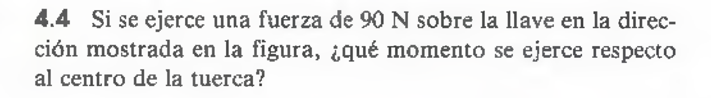


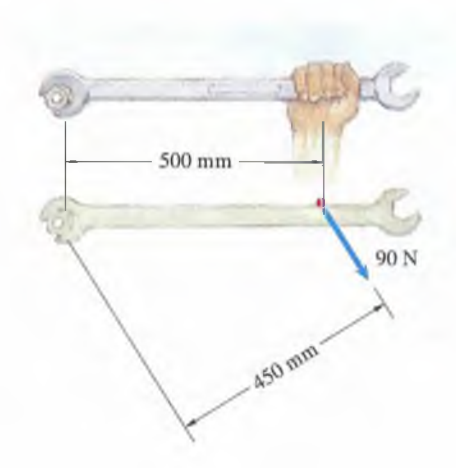
P4.2

4.3 Las ruedas de la grúa aérea ejercen fuerzas de 40 klb sobre la viga I en B y C. Determine la suma de los momentos de las fuerzas de 40 klb (a) respecto a A y (b) respecto a D.



P4.3


4.4 Si se ejerce una fuerza de 90 N sobre la llave en la dirección mostrada en la figura, ¿qué momento se ejerce respecto al centro de la tuerca?



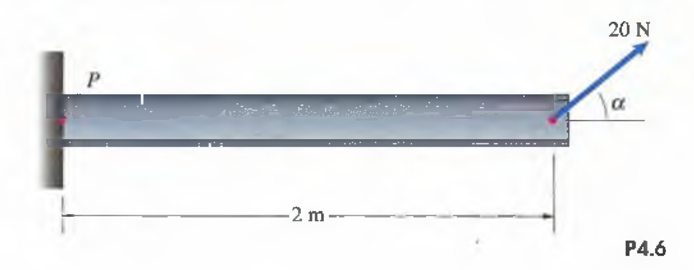
P4.4

4.5 Si se ejerce una fuerza F sobre la llave en la dirección mostrada y se requiere un momento de 50 N-m para aflojar la tuerca, ¿qué fuerza F se debe aplicar?

Tuerca
265 mm
300 mm
F

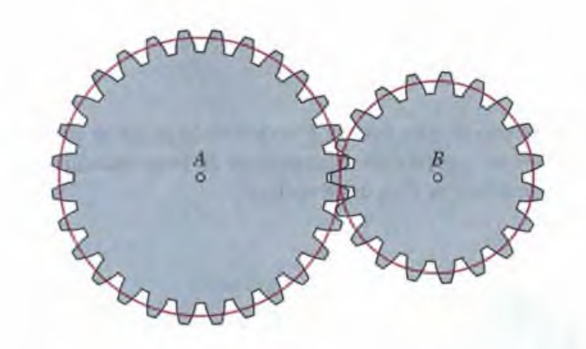
P4.5

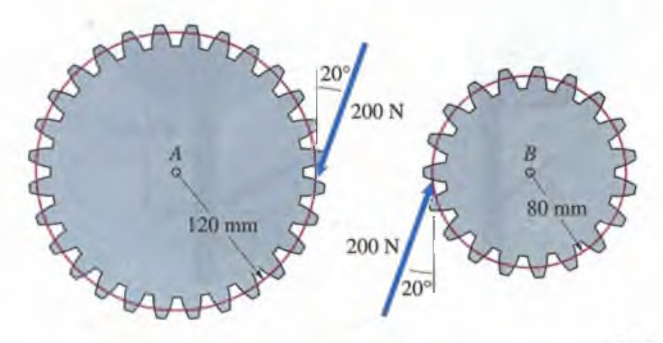
4.6 En la figura P4.6, la fuerza de 20 N ejerce un momento antihorario de 20 N-m respecto a P.
(a) ¿Cuál es la distancia perpendicular de P a la línea de acción de la fuerza?
(b) ¿Qué valor tiene el ángulo α?



P4.6

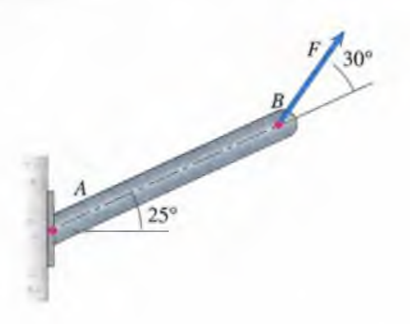
4.7 Los engranes mostrados ejercen fuerzas de 200 N entre sí en sus puntos de contacto.
(a) Determine el momento respecto a A debido a la fuerza ejercida sobre el engrane izquierdo.
(b) Determine el momento respecto a B debido a la fuerza ejercida sobre el engrane derecho.





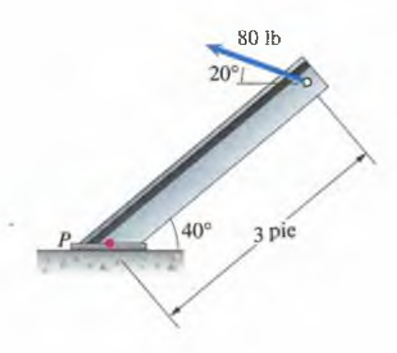
P4.7

4.8 En la figura P4.8, la viga AB de 5 pies de longitud fallará en A si el momento de la fuerza F respecto a A excede de 10 pie-klb. Con base en este criterio, ¿qué magnitud puede tener la fuerza F?



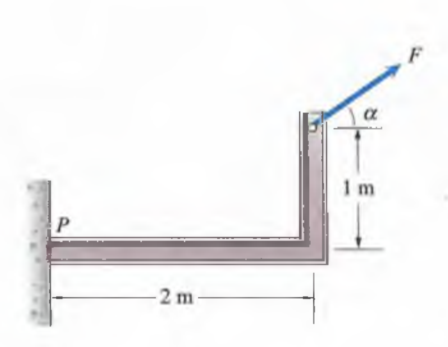
P4.8

4.9 Con base en la figura P4.9, determine el momento de la fuerza de 80 lb respecto al punto P.



P4.9

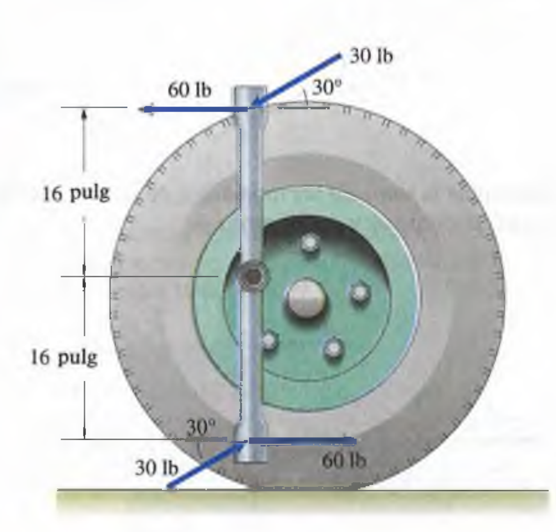
4.10 La fuerza F de 20 N mostrada ejerce un momento antihorario de 20 N-m respecto al punto P.
(a) Cuál es la distancia perpendicular de P a la línea de acción de F?
(b) ¿Qué valor tiene el ángulo α?



P4.10

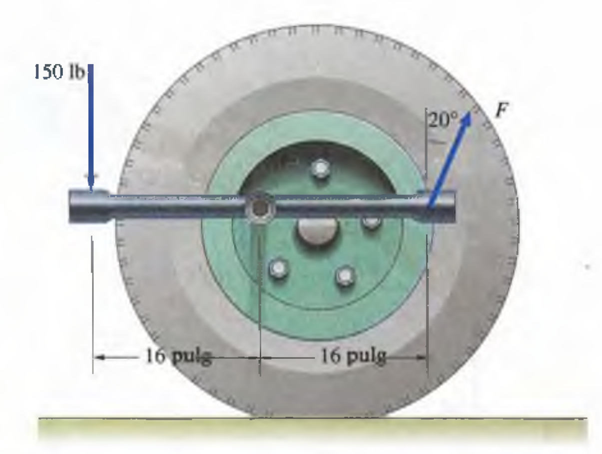
4.11 Considere la viga y la fuerza mostradas en el problema 4.10. Si F es la fuerza mínima que ejerce un momento antihorario de 20 N-m respecto al punto P, ¿qué valores tienen F y α?

4.12 Dos estudiantes intentan aflojar una tuerca con una llave. Uno de los estudiantes ejerce las dos fuerzas de 60 lb; el otro, teniendo que empujar alrededor de su amigo, sólo puede ejercer las dos fuerzas de 30 lb. ¿Qué par (momento) ejercen ellos sobre la tuerca?



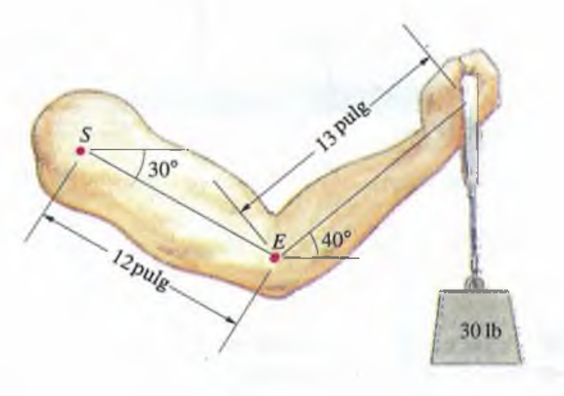
P4.12

4.13 Los dos estudiantes del problema 4.12 no pudieron aflojar la tuerca y van a usar otro procedimiento. Uno de ellos se para sobre la llave y ejerce una fuerza de 150 lb sobre ella. El otro jala la llave con una fuerza F. Si se requiere un par de 245 lb-pie para aflojar la tuerca, ¿qué fuerza F debe ejercer el estudiante?



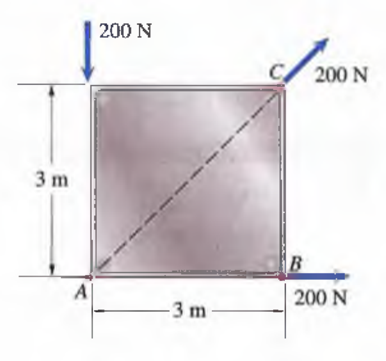
P4.13

4.14 Determine el momento ejercido por el peso de 30 lb (a) respecto a E y (b) respecto a S de la figura P4.14.



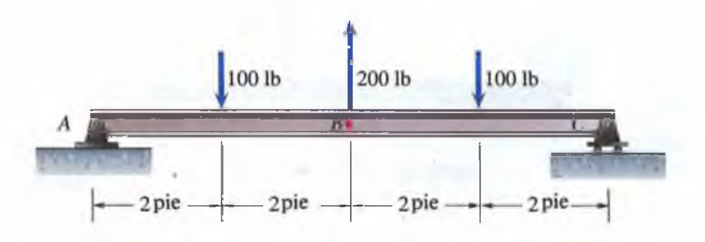
P4.14

4.15 Tres fuerzas actúan sobre una placa cuadrada. Determine la suma de los momentos de las fuerzas (a) respecto a A, (b) respecto a B y (c) respecto a C de la figura 4.15.



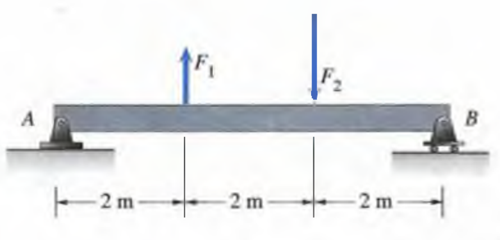
P4.15

4.16 Determine la suma de los momentos de las tres fuerzas mostradas (a) respecto al punto A, (b) respecto al punto B y (c) respecto al punto C.



P4.16

4.17 Se tienen las fuerzas $F_1 = 50$ N y $F_2 = 100$ N. Determine la suma de los momentos de las dos fuerzas (a) respecto a A y (b) respecto a B.



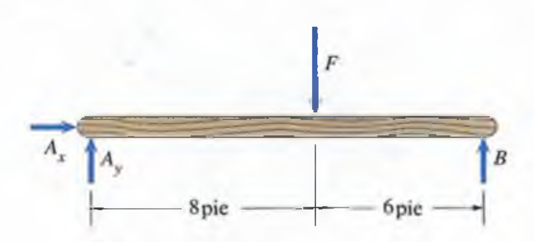
P4.17

4.18 Si las dos fuerzas ejercen un momento horario de 140 kN-m respecto a A y un momento horario de 20 kN-m respecto a B, ¿qué valores tienen F_1 y F_2? (Véase P4.17.)

4.19 Se tiene la fuerza $F = 140$ lb. La suma vectorial de las fuerzas que actúan sobre la viga mostrada es igual a cero, y la suma de los momentos respecto al extremo izquierdo de la viga es también igual a cero.

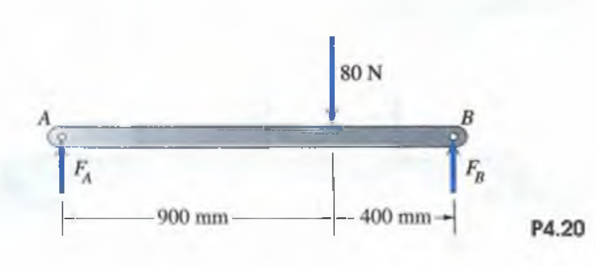
(a) ¿Qué valor tienen las fuerzas A_x, A_y y B?

(b) ¿Qué valor tiene la suma de los momentos respecto al extremo derecho de la viga?



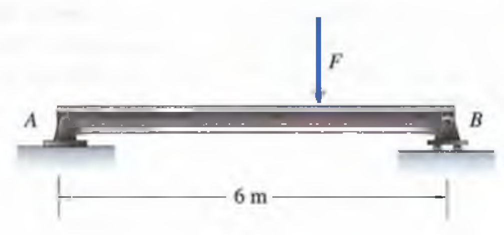
P4.19

4.20 La suma vectorial de la tres fuerzas es igual a cero, y la suma de los momentos de las tres fuerzas respecto a A es también igual a cero. (a) ¿Qué valores tienen F_A y F_B? (b) ¿Qué valor tiene la suma de los momentos de las tres fuerzas respecto a B?



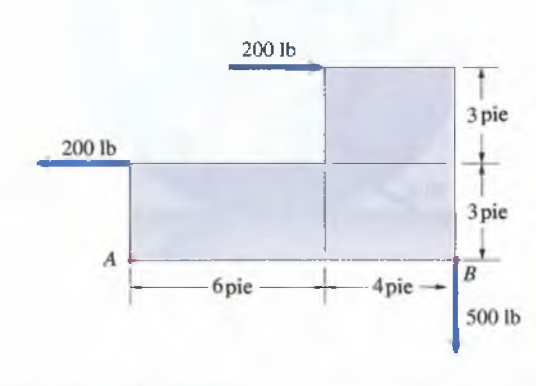
P4.20

4.21 La fuerza F mostrada ejerce un momento horario de 240 N-m respecto a A y un momento antihorario de 120 N-m respecto a B. Determine F y la distancia de A a su punto de aplicación.



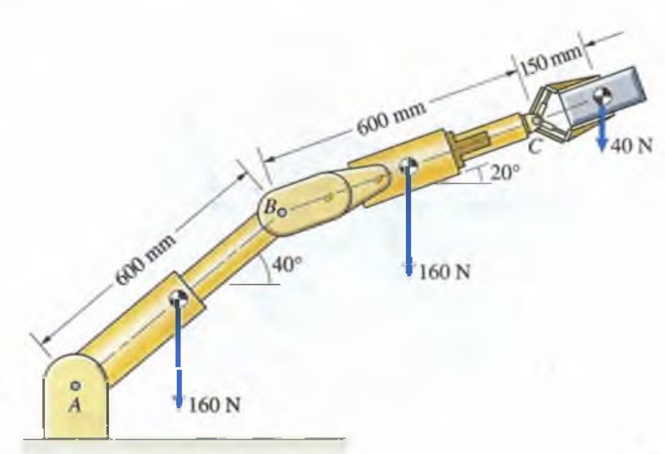
P4.21

4.22 Determine la suma de los momentos de las tres fuerzas respecto a (a) el punto A y (b) el punto B.



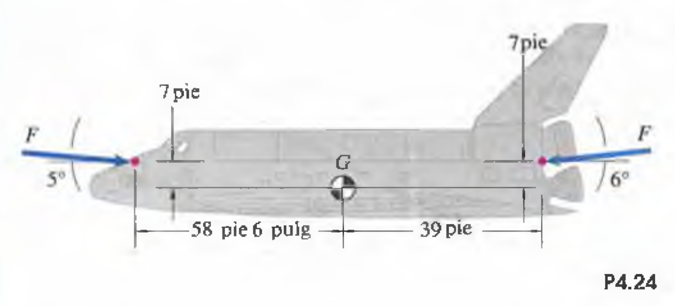
P4.22

4.23 Los pesos de 160 N de los brazos AB y BC del manipulador robótico mostrado actúan en sus puntos medios. Determine la suma de los momentos de los tres pesos respecto a A.



P4.23

4.24 Los impulsores de posición del transbordador espacial mostrado en la figura ejercen dos fuerzas de magnitud $F = 1740$ lb. ¿Qué momento ejercen los impulsores respecto a G?

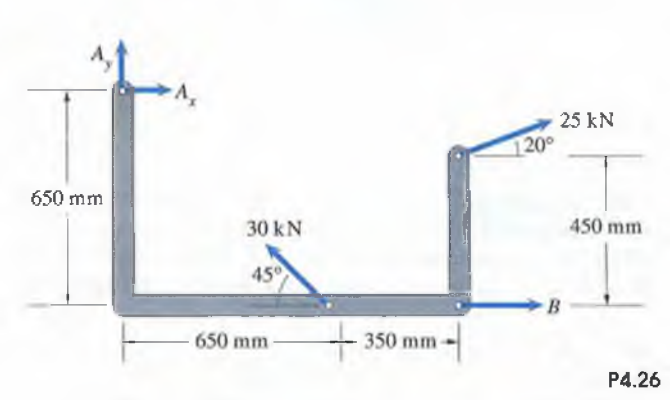


P4.24

4.25 La fuerza F ejerce un momento antihorario de 200 lb-pie respecto a A y un momento horario de 100 lb-pie respecto a B. ¿Qué valor tienen F y θ?

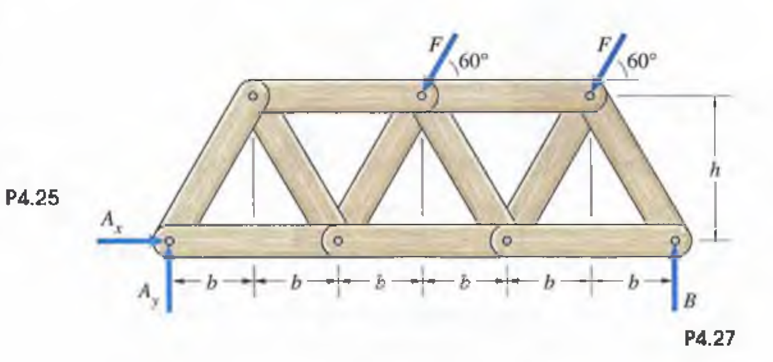
P4.25

4.26 Cinco fuerzas actúan sobre un eslabón en el mecanismo de cambio de velocidad de una segadora de césped. La suma vectorial de las cinco fuerzas sobre la barra es igual a cero. La suma de sus momentos respecto al punto en que actúan las fuerzas A_x y A_y es nula. (a) Determine las fuerzas A_x, A_y y B. (b) Determine la suma de los momentos de las fuerzas respecto al punto en que actúa la fuerza B.



P4.26

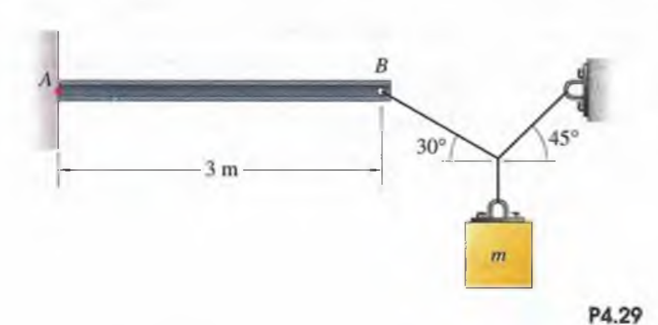
4.27 Cinco fuerzas actúan sobre el modelo de una armadura. Las dimensiones son $b = 300$ mm y $h = 400$ mm; $F = 100$ N. La suma de los momentos de las fuerzas respecto al punto en que actúan A_x y A_y es igual a cero. Si el peso de la armadura es despreciable, ¿qué valor tiene la fuerza B?



P4.27

4.28 Considere la armadura del problema 4.27. Las dimensiones son $b = 3$ pies y $h = 4$ pies; $F = 300$ lb. La suma vectorial de las fuerzas que actúan sobre la armadura es igual a cero, y la suma de los momentos de las fuerzas respecto al punto en que actúan A_x y A_y es nula. (a) Determine las fuerzas A_x, A_y y B. (b) Determine la suma de los momentos de las fuerzas respecto al punto en que actúa la fuerza B.

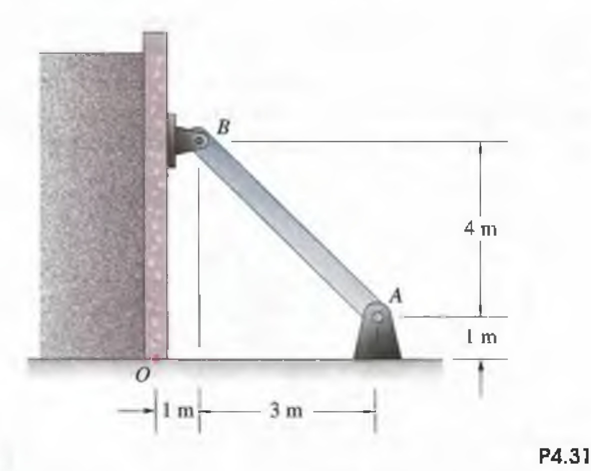
4.29 ¿Qué valor tiene el momento respecto a A debido a la fuerza ejercida sobre la viga en B por el cable? $m = 70$ kg.



P4.29

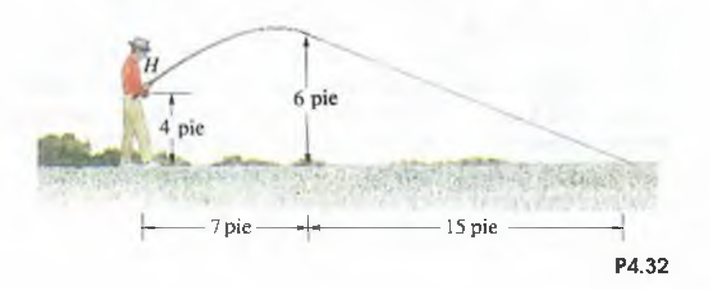
4.30 Considere el sistema mostrado en el problema 4.29. La viga fallará en A si la magnitud del momento respecto a A debido a la fuerza ejercida sobre la viga en B por el cable excede de 2 kN-m. ¿Cuál es la máxima masa m que puede colgarse?

4.31 La barra AB mostrada ejerce una fuerza en B que ayuda a soportar el muro vertical de retención. La fuerza es paralela a la barra. Se quiere que la barra ejerza un momento de 38 kN-m respecto a O. ¿Cuál es la magnitud de la fuerza que la barra debe ejercer?



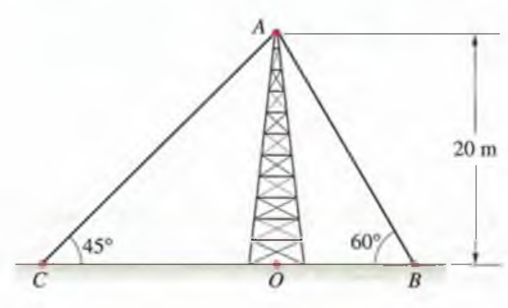
P4.31

4.32 A un participante en una competencia de lanzamiento de cebos artificiales se le engancha en el césped el hilo de la caña de pescar. Si la tensión en el hilo es de 5 lb, ¿qué momento ejerce la fuerza del hilo sobre la vara respecto al punto H?



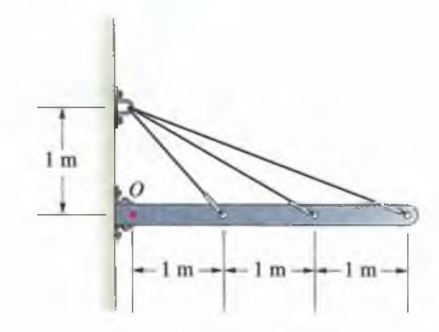
P4.32

4.33 Los cables AB y AC ayudan a sostener la torre mostrada. La tensión en el cable AB es de 5 kN. Los puntos, A, B, C y O están contenidos en el mismo plano vertical.
(a) ¿Cuál es el momento respecto a O debido a la fuerza ejercida sobre la torre por el cable AB?
(b) Si la suma de los momentos respecto a O debidos a las fuerzas ejercidas sobre la torre por los dos cables es igual a cero, ¿cuál es la tensión en el cable AC?



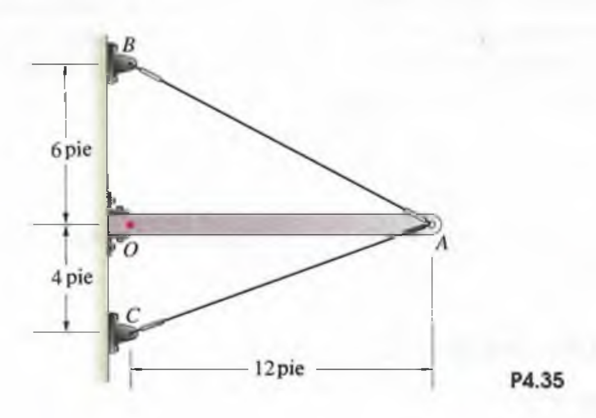
P4.33

4.34 En la figura P4.34, la tensión en cada cable es la misma. Las fuerzas ejercidas sobre la viga por los tres cables origina un momento antihorario de 1.2 kN-m respecto a O. ¿Cuál es la tensión en los cables?



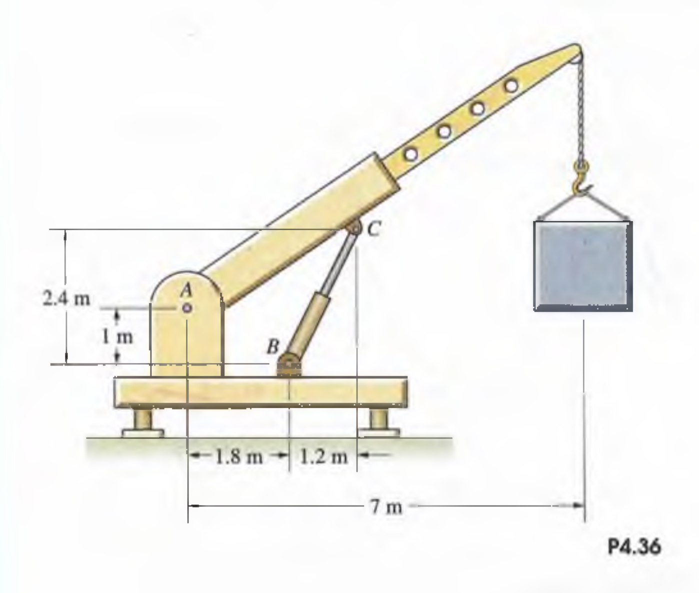
P4.34

4.35 En la figura P4.35, la tensión en el cable AB es de 300 lb. La suma de los momentos respecto a O debido a las fuerzas ejercidas sobre la viga por los dos cables es igual a cero. ¿Cuál es la magnitud de la suma de las fuerzas ejercidas sobre la viga por los dos cables?



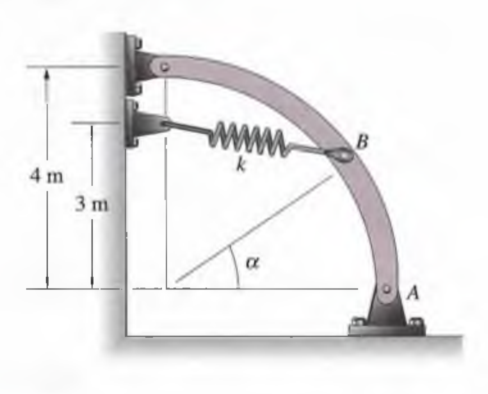
P4.35

4.36 El cilindro hidráulico BC mostrado ejerce una fuerza de 300 kN sobre el larguero de la grúa en C. La fuerza es paralela al cilindro. ¿Cuál es el momento de la fuerza respecto a A?



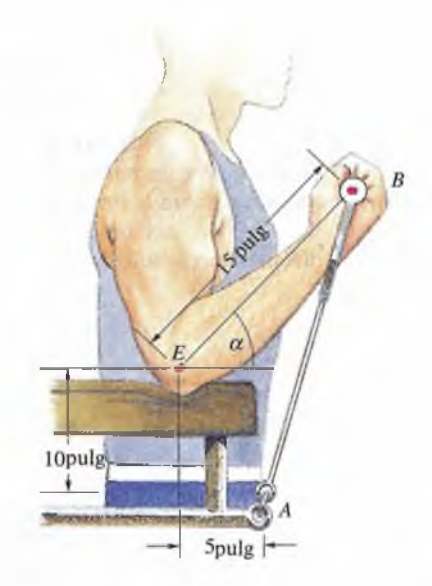
P4.36

4.37 La longitud del resorte sin estirar es de 1 m y la constante del resorte es $k = 20$ N/m. Si $\alpha = 30°$, ¿cuál es el momento respecto a A debido a la fuerza ejercida por el resorte sobre la barra circular en B?



P4.37

4.38 El equipo mostrado se usa para apoyar el codo sobre la almohadilla fija y girar el antebrazo para estirar la cuerda elástica AB. La cuerda se comporta como un resorte lineal. Su longitud sin estirar es de 1 pie y su constante de resorte es de 100 lb/pie. Si $\alpha = 45°$, ¿qué momento es ejercido, respecto al punto E del codo, por la fuerza que la cuerda elástica ejerce en B?



P4.38

4.2 Vector de momento

El momento de una fuerza respecto a un punto es un vector. Aquí definimos el momento y explicamos cómo se evalúa. Luego mostramos que al usar la descripción bidimensional del momento de la sección anterior, se especifican la magnitud y la dirección del vector de momento.

Consideremos un vector de fuerza **F** y un punto O (Fig. 4.7a). El **momento** de **F** respecto a O es el vector

$$\mathbf{M}_0 = \mathbf{r} \times \mathbf{F}, \qquad (4.2)$$

donde **r** es un vector de posición de O a *cualquier* punto sobre la línea de acción de **F** (Fig. 4.7b).

Magnitud del momento

La magnitud de $\mathbf{M}_0$ es

$$|\mathbf{M}_0| = |\mathbf{r}||\mathbf{F}| \operatorname{sen} \theta,$$

donde θ es el ángulo entre los vectores **r** y **F** cuando se colocan cola con cola. La distancia perpendicular de O a la línea de acción de **F** es $D = |\mathbf{r}| \operatorname{sen} \theta$ (Fig. 4.7c). Por consiguiente, la magnitud del momento $\mathbf{M}_0$ es igual al producto de la distancia perpendicular de O a la línea de acción de **F** y la magnitud de **F**:

$$|\mathbf{M}_0| = D|\mathbf{F}|. \qquad (4.3)$$

Observe que si se conocen los vectores $\mathbf{M}_0$ y **F**, con esta ecuación se puede encontrar la distancia perpendicular D.

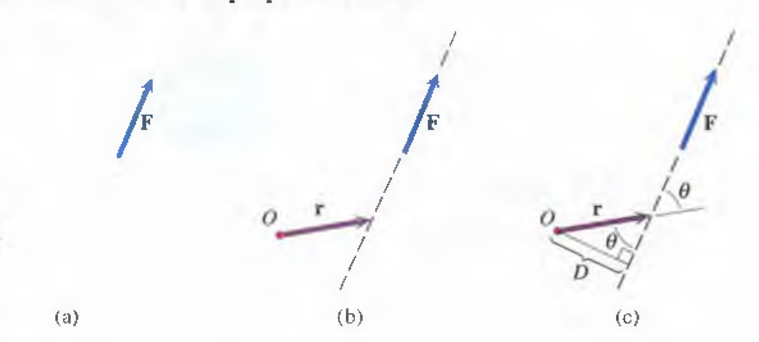
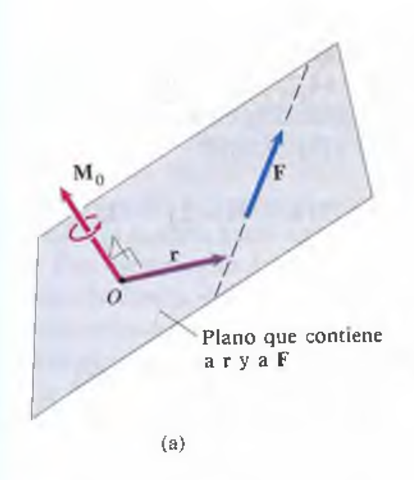


Figura 4.7
(a) La fuerza **F** y un punto O.
(b) Vector **r** de O a un punto sobre la línea de acción de **F**.
(c) El ángulo θ y la distancia perpendicular D.

Sentido del momento

Sabemos, por la definición del producto cruz, que $\mathbf{M}_0$ es perpendicular a **r** y a **F**. Esto significa que $\mathbf{M}_0$ es perpendicular al plano que contiene a O y a **F** (Fig. 4.8a). Observe en esta figura que un momento se denota con una flecha circular alrededor del vector.

La dirección de $\mathbf{M}_0$ también indica el sentido del momento: si el pulgar de su mano derecha apunta hacia $\mathbf{M}_0$, el "arco" de sus dedos indica el sentido del giro que **F** tiende a generar alrededor de O (Fig. 4.8b).



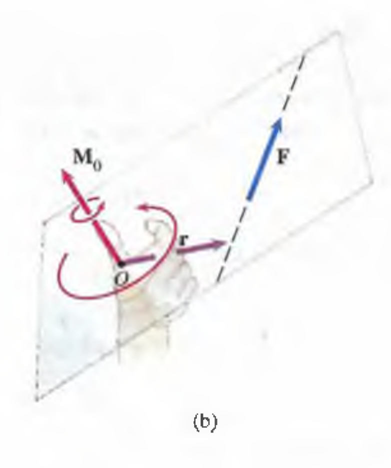


Figura 4.8
(a) $\mathbf{M}_0$ es perpendicular al plano que contiene a O y a $\mathbf{F}$.
(b) La dirección de $\mathbf{M}_0$ indica el sentido del momento.

El resultado que se obtiene con la ecuación (4.2) no depende de dónde interseca el vector $\mathbf{r}$ la línea de acción de $\mathbf{F}$. En vez del vector $\mathbf{r}$ de la figura 4.9(a), podríamos usar el vector $\mathbf{r}'$ de la figura 4.9(b). Se tiene el vector $\mathbf{r} = \mathbf{r}' + \mathbf{u}$, donde $\mathbf{u}$ es paralelo a F (Fig. 4.9c). Por tanto,

$$\mathbf{r} \times \mathbf{F} = (\mathbf{r}' + \mathbf{u}) \times \mathbf{F} = \mathbf{r}' \times \mathbf{F},$$

porque el producto cruz de los vectores paralelos $\mathbf{u}$ y $\mathbf{F}$ es nulo.

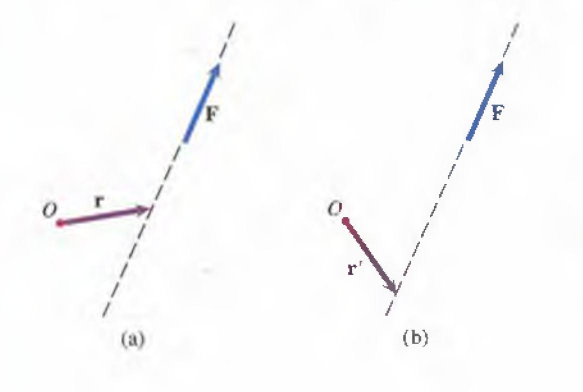


Figura 4.9
(a) Vector $\mathbf{r}$ de O a la línea de acción de $\mathbf{F}$.
(b) Vector $\mathbf{r}'$ diferente.
(c) $\mathbf{r} = \mathbf{r}' + \mathbf{u}$.

En resumen, el momento de una fuerza $\mathbf{F}$ respecto a un punto O tiene tres propiedades:

1. La magnitud de $\mathbf{M}_0$ es igual al producto de la magnitud de $\mathbf{F}$ y la distancia perpendicular de O a la línea de acción de $\mathbf{F}$. Si la línea de acción de $\mathbf{F}$ pasa por O, $\mathbf{M}_0 = \mathbf{0}$.
2. $\mathbf{M}_0$ es perpendicular al plano que contiene a O y a $\mathbf{F}$.
3. La dirección de $\mathbf{M}_0$ indica el sentido del momento dado por la regla de la mano derecha (Fig. 4.8b). Como el producto cruz no es conmutativo, se debe tener cuidado con la secuencia correcta de los vectores en la ecuación $\mathbf{M}_0 = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$.

Determinemos el momento de la fuerza **F** en la figura 4.10(a) respecto al punto P. Como el vector **r** de la ecuación (4.2) puede ser un vector de posición de cualquier punto sobre la línea de acción de **F**, podemos usar un vector de P al punto de aplicación de **F** (Fig. 4.10b):

$$\mathbf{r} = (12-3)\,\mathbf{i} + (6-4)\,\mathbf{j} + (-5-1)\,\mathbf{k} = 9\,\mathbf{i} + 2\,\mathbf{j} - 6\,\mathbf{k} \text{ (pies).}$$

El momento es

$$\mathbf{M}_P = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 9 & 2 & -6 \\ 4 & 4 & 7 \end{vmatrix} = 38\,\mathbf{i} - 87\,\mathbf{j} + 28\,\mathbf{k} \text{ (lb-pie).}$$

La magnitud de $\mathbf{M}_P$,

$$|\mathbf{M}_P| = \sqrt{(38)^2 + (-87)^2 + (28)^2} = 99.0 \text{ lb-pie,}$$

es igual al producto de la magnitud de **F** y la distancia perpendicular D del punto P a la línea de acción de **F**. Por tanto,

$$D = \frac{|\mathbf{M}_P|}{|\mathbf{F}|} = \frac{99.0 \text{ lb-pie}}{9 \text{ lb}} = 11.0 \text{ pie.}$$

La dirección de $\mathbf{M}_P$ nos da la orientación del plano que contiene a P y a **F**, así como el sentido del momento. (Fig. 4.10c.)

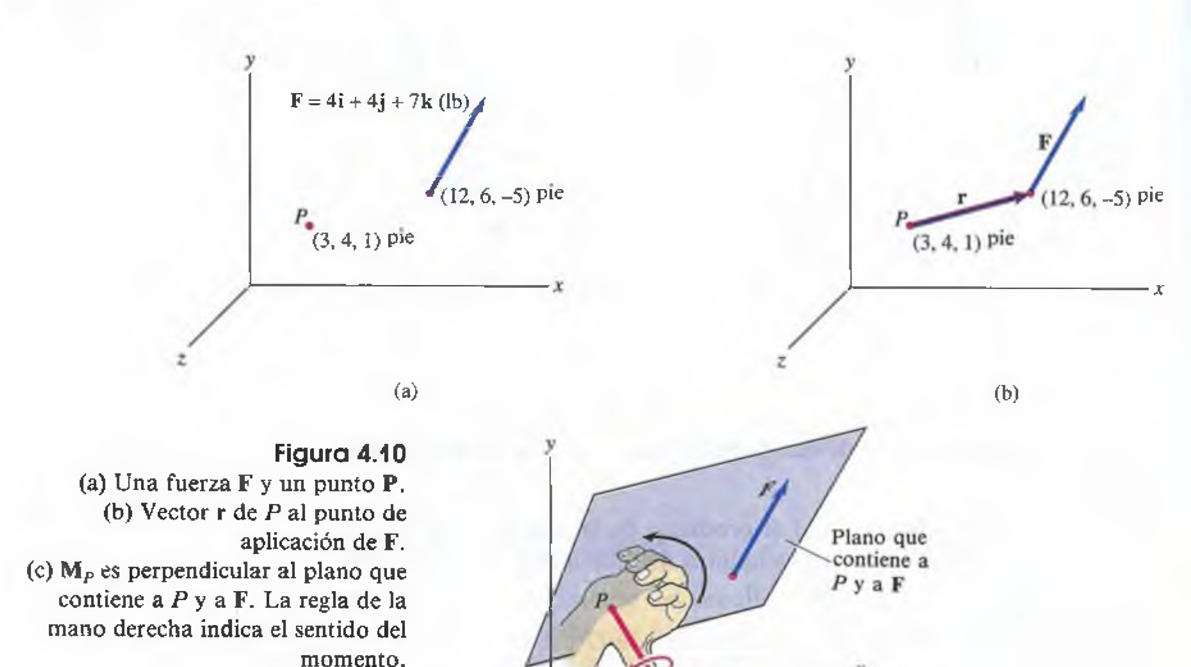


Figura 4.10
(a) Una fuerza **F** y un punto **P**.
(b) Vector **r** de P al punto de aplicación de **F**.
(c) $\mathbf{M}_P$ es perpendicular al plano que contiene a P y a **F**. La regla de la mano derecha indica el sentido del momento.

Relación con la descripción bidimensional

Si nuestra visual es perpendicular al plano que contiene al punto O y a la fuerza **F**, la descripción bidimensional del momento que usamos en la sección 4.1 especifica tanto la magnitud como la dirección de $\mathbf{M}_0$. En este caso, $\mathbf{M}_0$ es perpendicular a la página, y la regla de la mano derecha indica si apunta hacia afuera o hacia adentro de la página.

Por ejemplo, en la figura 4.11(a) la visual es perpendicular al plano x-y y la fuerza de 10 N está contenida en el plano x-y. Supongamos que queremos determinar el momento de la fuerza respecto al origen O. La distancia perpendicular de O a la línea de acción de la fuerza es de 4 m. La descripción bidimensional del momento de la fuerza respecto a O es que su magnitud es (4 m)(10 N) = 40 N-m y su sentido es antihorario, o

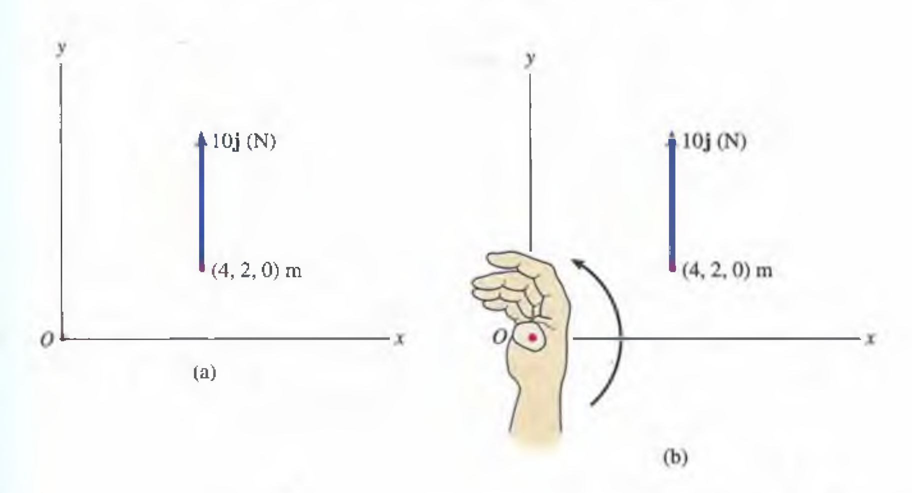
$$M_O = 40 \text{ N-m}.$$

O sea, la magnitud del vector $\mathbf{M}_0$ es de 40 N-m; por la regla de la mano derecha (Fig. 4.11b), éste apunta hacia el exterior de la página. Por tanto,

$$\mathbf{M}_0 = 40\,\mathbf{k} \text{ (N-m)}.$$

Podemos confirmar este resultado usando la ecuación (4.2). Si **r** es el vector de O al punto de aplicación de la fuerza (Fig. 4.11c),

$$\mathbf{M}_0 = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = (4\mathbf{i} + 2\mathbf{j}) \times (10\mathbf{j}) = 40\mathbf{k} \text{ (N-m)}.$$



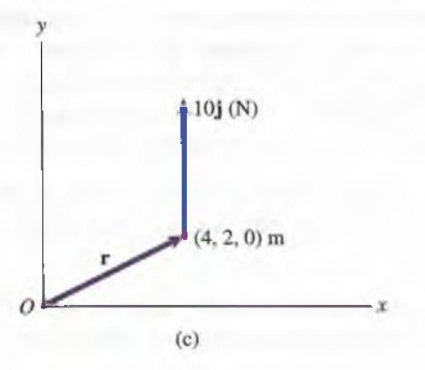


Figura 4.11
(a) La fuerza está contenida en el plano x-y.
(b) El sentido del momento indica que $\mathbf{M}_0$ apunta hacia el exterior de la página.
(c) Vector **r** de O al punto de aplicación de **F**.

Esto ilustra que la descripción bidimensional del momento determina $\mathbf{M}_0$. La proposición opuesta también es verdadera. La magnitud de $\mathbf{M}_0$ es igual al producto de la magnitud de la fuerza y la distancia perpendicular de O a la línea de acción de la fuerza, 40 N-m, y la dirección de $\mathbf{M}_0$ indica que el sentido del momento es antihorario (Fig. 4.11b).

Teorema de Varignon

Sea $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$,..., $\mathbf{F}_N$ un sistema concurrente de fuerzas cuyas líneas de acción se cortan en P. El momento del sistema respecto al punto O es

$$\mathbf{r}_{OP} \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{r}_{OP} \times \mathbf{F}_2 + \cdots + \mathbf{r}_{OP} \times \mathbf{F}_N = \mathbf{r}_{OP} \times (\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \cdots + \mathbf{F}_N),$$

donde $\mathbf{r}_{OP}$ es el vector de O a P. Este resultado, el **teorema de Varignon,** se deriva de la propiedad distributiva del producto cruz (Ec. 2.31) y confirma que el momento de una fuerza respecto a un punto O es igual a la suma de los momentos de sus componentes respecto a O.

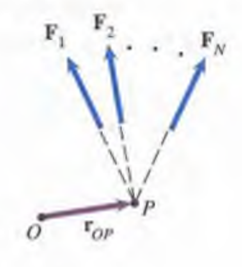


Figura 4.12
Un sistema de fuerzas concurrentes y un punto O.

Los ejemplos siguientes demuestran cómo se determinan los momentos de fuerzas respecto a puntos. Cuando la descripción bidimensional es aplicable, la comparamos con la expresión vectorial para el momento. También incluimos ejemplos en los que se debe usar la ecuación $\mathbf{M}_0 = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$ ***para determinar el momento. Esto requiere dos pasos:***

1. Elegir el vector $\mathbf{r}$. *Se debe elegir un vector de posición de O a cualquier punto sobre la línea de acción de* $\mathbf{F}$ *y determinar sus componentes.*

2. Evaluar $\mathbf{r} \times \mathbf{F}$. *Determine las componentes de* $\mathbf{F}$ *en caso necesario y evalúe el producto cruz para obtener el momento.*

Ejemplo 4.4

Determine el momento de la fuerza de 400 N de la figura 4.13 respecto a O.
(a) ¿Cuál es la descripción bidimensional del momento?
(b) Exprese el momento como un vector sin usar la ecuación (4.2).
(c) Use la ecuación (4.2) para determinar el momento.

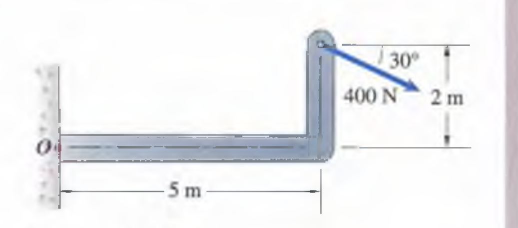


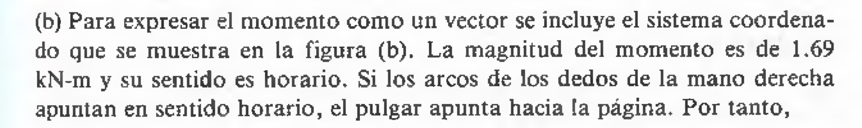
Figura 4.13

SOLUCIÓN

(a) Al descomponer la fuerza en sus componentes horizontal y vertical (Fig. a), la descripción bidimensional del momento es

$$M_O = -(2\text{ m})(400\cos 30^\circ\text{ N}) - (5\text{ m})(400\,\text{sen}30^\circ\text{ N})$$

$$= -1.69\text{ kN-m}.$$



(b) Para expresar el momento como un vector se incluye el sistema coordenado que se muestra en la figura (b). La magnitud del momento es de 1.69 kN-m y su sentido es horario. Si los arcos de los dedos de la mano derecha apuntan en sentido horario, el pulgar apunta hacia la página. Por tanto,

$$\mathbf{M}_0 = -1.69\,\mathbf{k}\quad(\text{kN-m}).$$

(c) Aplicamos la ecuación (4.2).

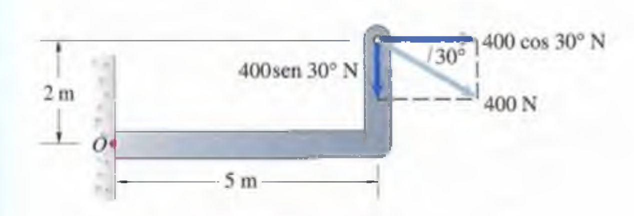
Selección del vector r Sea $\mathbf{r}$ el vector de O al punto de aplicación de la fuerza (Fig. c):

$$\mathbf{r} = 5\,\mathbf{i} + 2\,\mathbf{j}\quad(\text{m}).$$

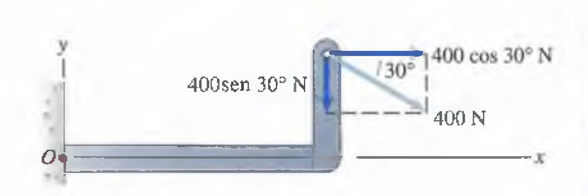
Evaluación de r × F El momento es

$$\mathbf{M}_0 = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = (5\mathbf{i} + 2\mathbf{j}) \times (400\cos 30^\circ\,\mathbf{i} - 400\,\text{sen}\,30^\circ\,\mathbf{j})$$

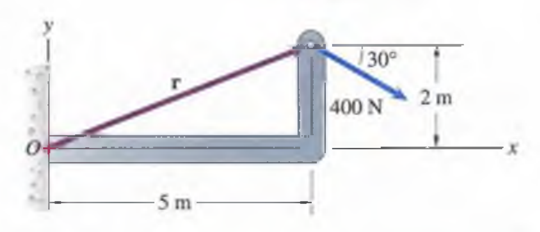
$$= -1.69\mathbf{k}\ (\text{kN-m}).$$



(a) Descomposición de la fuerza en sus componentes.



(b) Introducción de un sistema coordenado.



(c) Vector $\mathbf{r}$ de O al punto de aplicación de la fuerza.

Ejemplo 4.5

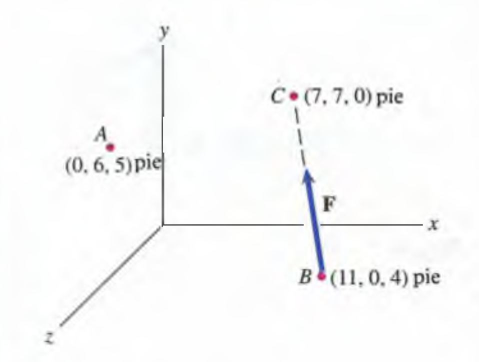


Figura 4.14

La línea de acción de la fuerza **F** de 90 lb pasa por los puntos B y C.
(a) ¿Cuál es el momento de **F** respecto al punto A?
(b) ¿Qué valor tiene la distancia perpendicular del punto A a la línea de acción de **F**?

ESTRATEGIA

(a) Usamos la ecuación (4.2) para determinar el momento. Como **r** es un vector de A a cualquier punto sobre la línea de acción de **F**, podemos usar ya sea el vector de A a B o bien el vector de A a C. Para demostrar que se obtiene el mismo resultado, determinaremos el momento usando ambos vectores.
(b) Como la magnitud del momento es igual al producto de la magnitud de **F** y la distancia perpendicular de A a la línea de acción de **F**, podemos usar el resultado de la parte (a) para determinar la distancia perpendicular.

SOLUCIÓN

(a) Para evaluar el producto cruz en la ecuación (4.2), necesitamos las componentes de **F**. El vector de B a C es

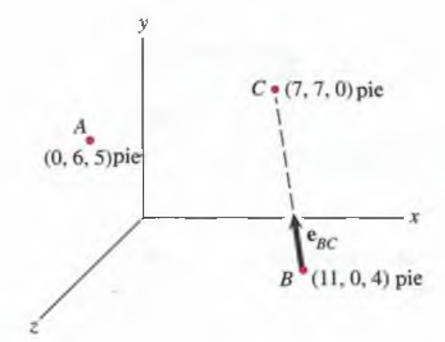
$$(7-11)\,\mathbf{i}+(7-0)\,\mathbf{j}+(0-4)\,\mathbf{k}=-4\,\mathbf{i}+7\,\mathbf{j}-4\,\mathbf{k}\ \ \text{(pies)}.$$

Dividiendo este vector entre su magnitud, obtenemos un vector unitario $\mathbf{e}_{BC}$ que tiene la misma dirección que **F** (Fig. a):

$$\mathbf{e}_{BC}=-\frac{4}{9}\,\mathbf{i}+\frac{7}{9}\,\mathbf{j}-\frac{4}{9}\,\mathbf{k}.$$

Ahora expresamos **F** como el producto de su magnitud y $\mathbf{e}_{BC}$:

$$\mathbf{F}=90\,\mathbf{e}_{BC}=-40\,\mathbf{i}+70\,\mathbf{j}-40\,\mathbf{k}\ \ \text{(lb)}.$$



(a) Vector unitario $\mathbf{e}_{BC}$.

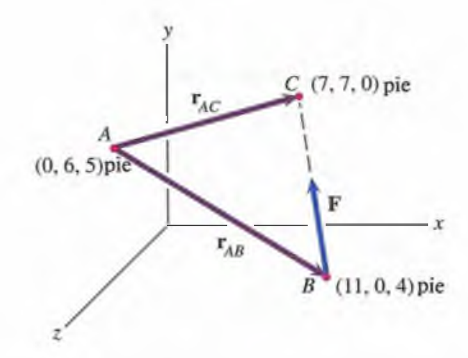
Selección del vector r El vector de posición de A a B (Fig. b) es

$$\mathbf{r}_{AB} = (11 - 0)\mathbf{i} + (0 - 6)\mathbf{j} + (4 - 5)\mathbf{k} = 11\mathbf{i} - 6\mathbf{j} - \mathbf{k} \text{ (pie).}$$

Evaluación de r × F El momento de **F** respecto a A es

$$\mathbf{M}_A = \mathbf{r}_{AB} \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 11 & -6 & -1 \\ -40 & 70 & -40 \end{vmatrix}$$

$$= 310\mathbf{i} + 480\mathbf{j} + 530\mathbf{k} \text{ (lb-pie).}$$



(b) El momento se puede determinar usando $\mathbf{r}_{AB}$ o bien $\mathbf{r}_{AC}$.

Selección alternativa del vector de posición Si usamos el vector de A a C,

$$\mathbf{r}_{AC} = (7 - 0)\mathbf{i} + (7 - 6)\mathbf{j} + (0 - 5)\mathbf{k} = 7\mathbf{i} + \mathbf{j} - 5\mathbf{k} \text{ (pie),}$$

obtenemos el mismo resultado:

$$\mathbf{M}_A = \mathbf{r}_{AC} \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 7 & 1 & -5 \\ -40 & 70 & -40 \end{vmatrix}$$

$$= 310\mathbf{i} + 480\mathbf{j} + 530\mathbf{k} \text{ (lb-pie).}$$

(b) La distancia perpendicular es

$$\frac{|\mathbf{M}_A|}{|\mathbf{F}|} = \frac{\sqrt{(310)^2 + (480)^2 + (530)^2}}{90} = 8.66 \text{ pie.}$$

Ejemplo 4.6

Figura 4.15

En la figura 4.15, los cables AB y AC se extienden del punto A sobre el piso a los puntos B y C en las paredes. La tensión en el cable AB es de 10 kN y la tensión en el cable AC es de 20 kN. ¿Qué valor tiene la suma de los momentos respecto a O debidos a las fuerzas ejercidas sobre A por los dos cables?

SOLUCIÓN

Sean $\mathbf{F}_{AB}$ y $\mathbf{F}_{AC}$ las fuerzas ejercidas por los dos cables sobre el punto A de conexión (Fig. a). Para expresar $\mathbf{F}_{AB}$ en función de sus componentes, determinamos el vector de posición de A a B,

$$(0-4)\,\mathbf{i}+(4-0)\,\mathbf{j}+(8-6)\,\mathbf{k}=-4\,\mathbf{i}+4\,\mathbf{j}+2\,\mathbf{k}\ \ (\text{m}),$$

y lo dividimos entre su magnitud para obtener un vector unitario $\mathbf{e}_{AB}$ con la misma dirección que $\mathbf{F}_{AB}$ (Fig. b):

$$\mathbf{e}_{AB}=\frac{-4\,\mathbf{i}+4\,\mathbf{j}+2\,\mathbf{k}}{6}=-\frac{2}{3}\,\mathbf{i}+\frac{2}{3}\,\mathbf{j}+\frac{1}{3}\,\mathbf{k}.$$

Ahora escribimos $\mathbf{F}_{AB}$ como

$$\mathbf{F}_{AB}=10\,\mathbf{e}_{AB}=-6.67\,\mathbf{i}+6.67\,\mathbf{j}+3.33\,\mathbf{k}\ \ (\text{kN}).$$

Expresamos de la misma manera la fuerza $\mathbf{F}_{AC}$ en función de sus componentes:

$$\mathbf{F}_{AC}=5.71\,\mathbf{i}+8.57\,\mathbf{j}-17.14\,\mathbf{k}\ \ (\text{kN}).$$

Selección del vector r Como las líneas de acción de ambas fuerzas pasan por el punto A, podemos usar el vector de O a A para determinar los momentos de ambas fuerzas respecto al punto O (Fig. a):

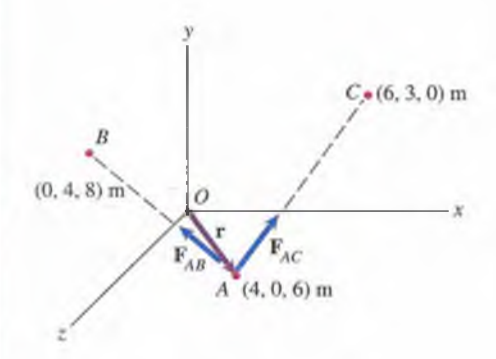
$$\mathbf{r}=4\,\mathbf{i}+6\,\mathbf{k}\ \ (\text{m}).$$

Evaluación de r × F La suma de los momentos es

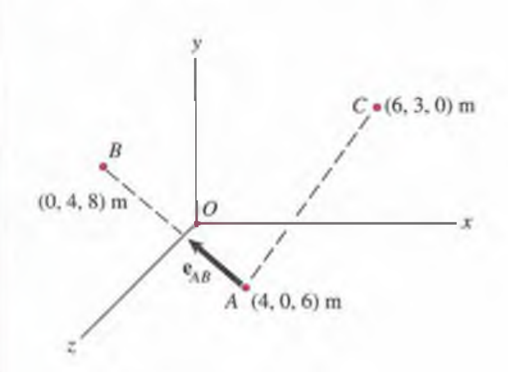
$$\Sigma\mathbf{M}_0=(\mathbf{r}\times\mathbf{F}_{AB})+(\mathbf{r}\times\mathbf{F}_{AC})$$

$$=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\4&0&6\\-6.67&6.67&3.33\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\4&0&6\\5.71&8.57&-17.14\end{vmatrix}$$

$$=-91.4\,\mathbf{i}+49.5\,\mathbf{j}+61.0\,\mathbf{k}\ \ (\text{kN-m}).$$



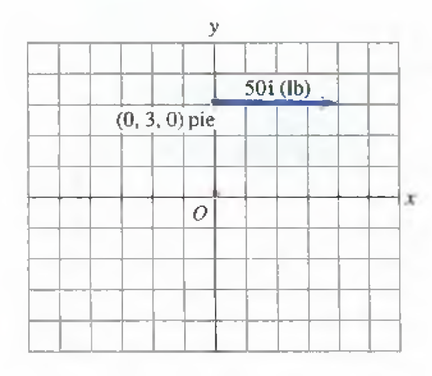
(a) Las fuerzas $\mathbf{F}_{AB}$ y $\mathbf{F}_{AC}$ ejercidas en A por los cables.



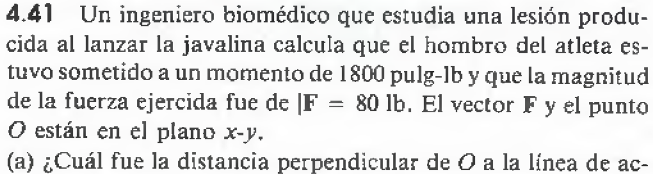
(b) El vector unitario $\mathbf{e}_{AB}$ tiene la misma dirección que $\mathbf{F}_{AB}$.

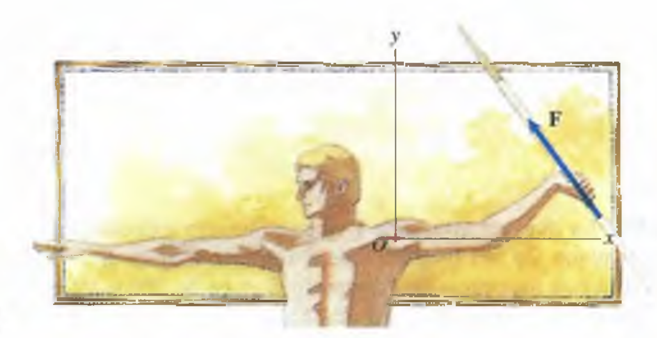
Problemas

4.39 En la figura P4.39 determine el momento de la fuerza de 50 lb respecto al origen O.
(a) ¿Cuál es la descripción bidimensional del momento?
(b) Exprese el momento como un vector sin usar el producto cruz.
(c) Use el producto cruz para determinar el momento.



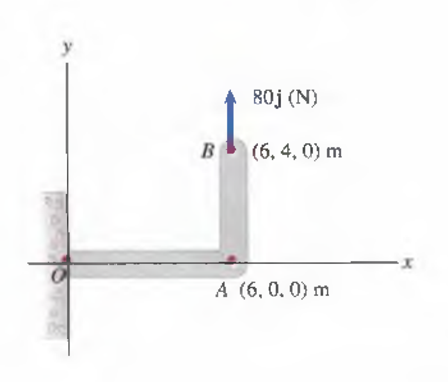
P4.39


4.41 Un ingeniero biomédico que estudia una lesión producida al lanzar la javalina calcula que el hombro del atleta estuvo sometido a un momento de 1800 pulg-lb y que la magnitud de la fuerza ejercida fue de |**F** = 80 lb. El vector **F** y el punto O están en el plano x-y.
(a) ¿Cuál fue la distancia perpendicular de O a la línea de acción de **F**?
(b) Exprese el momento de **F** respecto a O como un vector.



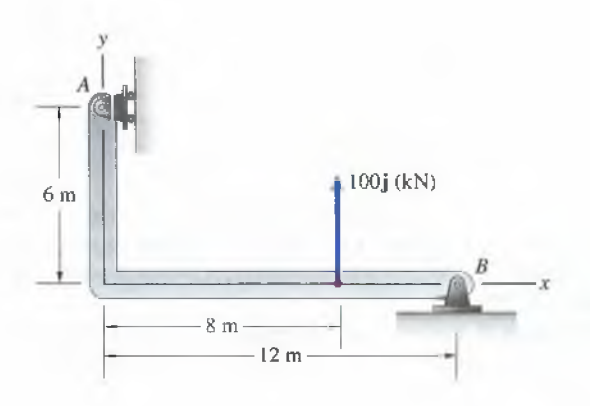
P4.41

4.40 En la figura P4.40 determine el momento de la fuerza de 80 N respecto al origen O.
(a) ¿Cuál es la descripción bidimensional del momento?
(b) Exprese el momento como un vector sin usar el producto cruz.
(c) Use el producto cruz para determinar el momento, considerando que **r** es el vector de O a A.
(d) Use el producto cruz para determinar el momento, considerando que **r** es el vector de O a B.



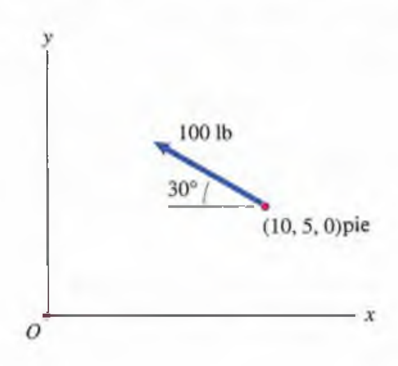
P4.40

4.42 Use el producto cruz para determinar el momento de la fuerza de 100 kN de la figura P4.42 (a) respecto a A y (b) respecto a B.



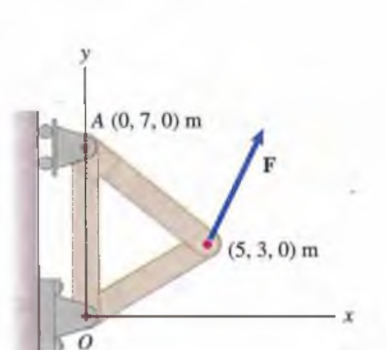
P4.42

4.43 En la figura P4.43, la línea de acción de la fuerza de 100 lb está contenida en el plano x-y.
(a) Use el producto cruz para determinar el momento de la fuerza respecto al origen O.
(b) Use el resultado de la parte (a) para determinar la distancia perpendicular de O a la línea de acción de la fuerza.



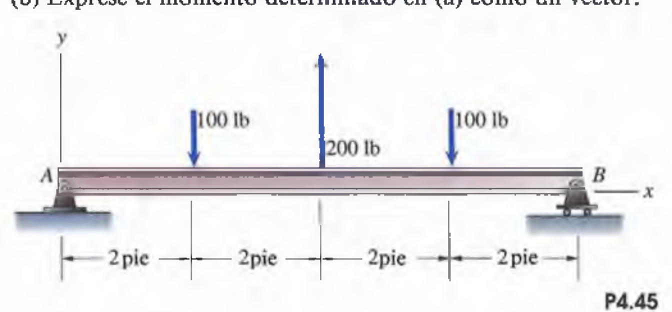
P4.43

4.44 La línea de acción de **F** que se muestra está contenida en el plano x-y. El momento de **F** respecto a O es de 140 **k** (N-m), y el momento de **F** respecto a A es de 280 **k** (N-m). ¿Cuáles son las componentes de **F**?



P4.44

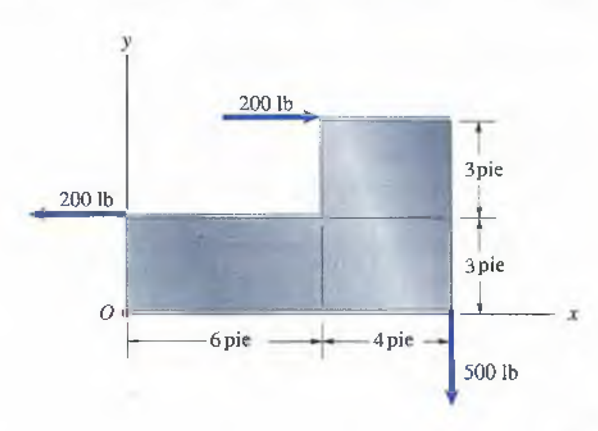
4.45 Para probar la rigidez a la flexión de una viga compuesta ligera, se somete a las fuerzas verticales mostradas.
(a) ¿Cuál es la descripción bidimensional del momento de la fuerza de 200 lb respecto a A?
(b) Exprese el momento determinado en (a) como un vector.



P4.45

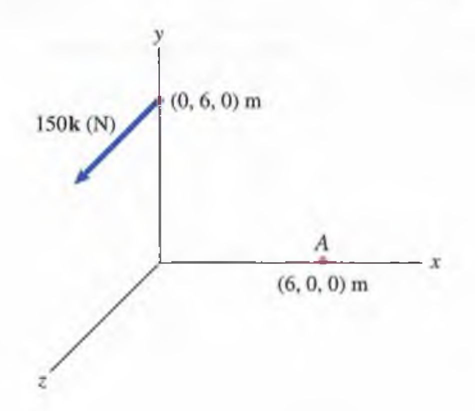
4.46 Considere la viga y las fuerzas mostradas en el problema 4.45. Use el producto cruz para determinar la suma de los momentos de las tres fuerzas (a) respecto a A y (b) respecto a B.

4.47 Las tres fuerzas mostradas se aplican a la placa. Use el producto cruz para determinar la suma de los momentos de las tres fuerzas respecto al origen O.



P4.47

4.48 (a) Determine la magnitud del momento de la fuerza de 150 N de la figura P4.48 respecto a A calculando la distancia perpendicular de A a la línea de acción de la fuerza.
(b) Use el producto cruz para determinar el momento de la fuerza de 150 N respecto a A.
(c) Use el resultado de la parte (b) para determinar la magnitud del momento.



P4.48

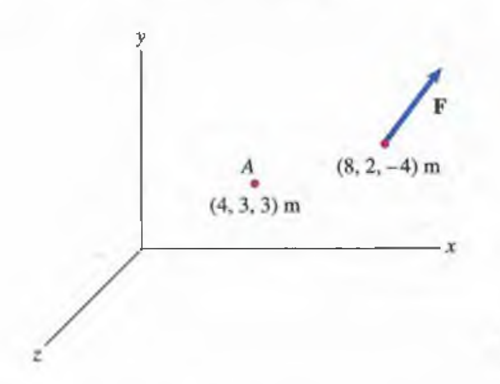
4.49 $\mathbf{F} = 4\mathbf{i} + 6\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ (kN) se aplica en el punto (8, 4, 4) m. ¿Cuál es el momento de **F** respecto al punto (2, 2, 2) m?

4.50 Una fuerza $\mathbf{F} = 20\mathbf{i} - 30\mathbf{j} + 60\mathbf{k}$ (lb) se aplica en el punto (2, 3, 6) pies. ¿Cuál es el momento de **F** respecto al punto (−2, −1, −1) pies?

4.51 $\mathbf{F} = 20\mathbf{i} - 30\mathbf{j} + 60\mathbf{k}$ (lb). El momento de **F** respecto a un punto P es $\mathbf{M}_P = 450\mathbf{i} - 100\mathbf{j} - 200\mathbf{k}$ (lb-pie). ¿Cuál es la distancia perpendicular del punto P a la línea de acción de **F**?

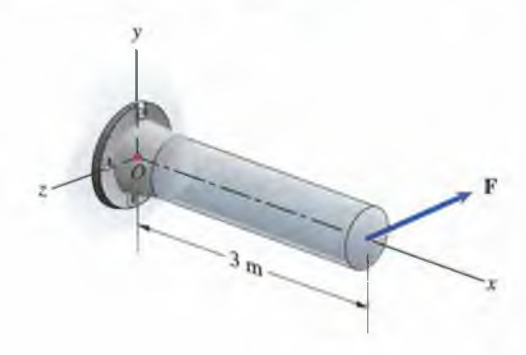
4.52 Una fuerza **F** se aplica en el punto (8, 6, 13) m. Su magnitud es $|\mathbf{F}| = 90$ N, y el momento de **F** respecto al punto (4, 2, 6) es igual a cero. ¿Cuáles son las componentes de **F**?

4.53 Se tiene la fuerza $\mathbf{F} = 30\mathbf{i} + 20\mathbf{j} + 10\mathbf{k}$ (N).
(a) Determine el momento de **F** respecto a A.
(b) ¿Cuál es el producto de la magnitud de **F** y la distancia perpendicular del punto A a la línea de acción de **F**?



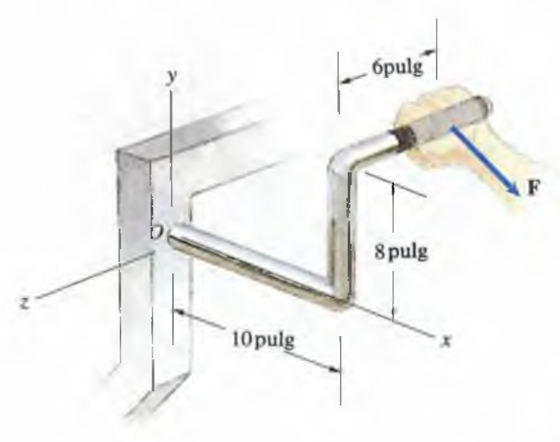
P4.53

4.54 En la figura P4.54, los cosenos directores de la fuerza **F** son $\cos\theta_x = 0.818$, $\cos\theta_y = 0.182$, y $\cos\theta_z = -0.545$. El soporte de la viga en O fallará si la magnitud del momento de **F** respecto a O excede de 100 kN-m. Determine la magnitud de la máxima fuerza **F** que se puede aplicar con seguridad a la viga.



P4.54

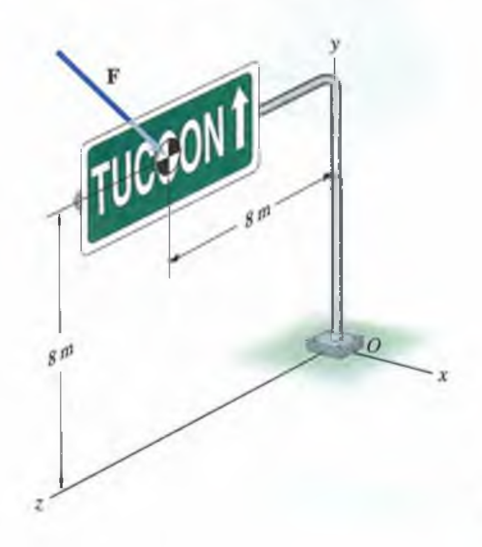
4.55 La fuerza **F** ejercida sobre el mango de un aparato de gimnasia apunta hacia el vector unitario $\mathbf{e} = \frac{2}{3}\mathbf{i} - \frac{2}{3}\mathbf{j} - \frac{1}{3}\mathbf{k}$, y su magnitud es de 30 lb.
(a) ¿Qué valor tiene el momento de **F** respecto al origen O?
(b) ¿Qué valor tiene el producto de la magnitud de **F** y la distancia perpendicular de O a la línea de acción de **F**?



P4.55

4.56 En el problema 4.55, la fuerza **F** apunta hacia el vector unitario $\mathbf{e} = \frac{2}{3}\mathbf{i} - \frac{2}{3}\mathbf{j} - \frac{1}{3}\mathbf{k}$. El soporte en O resiste con seguridad un momento de 5000 pulg-lb. Con base en este criterio, ¿cuál es la máxima magnitud segura de **F**?

4.57 Un ingeniero calcula que en las condiciones de tiempo más adversas, la fuerza total sobre una señal de tránsito en una carretera será de $\mathbf{F} = \pm 1.4\mathbf{i} - 2.0\mathbf{j}$ kN. ¿Qué momento ejerce esta fuerza respecto a la base O?



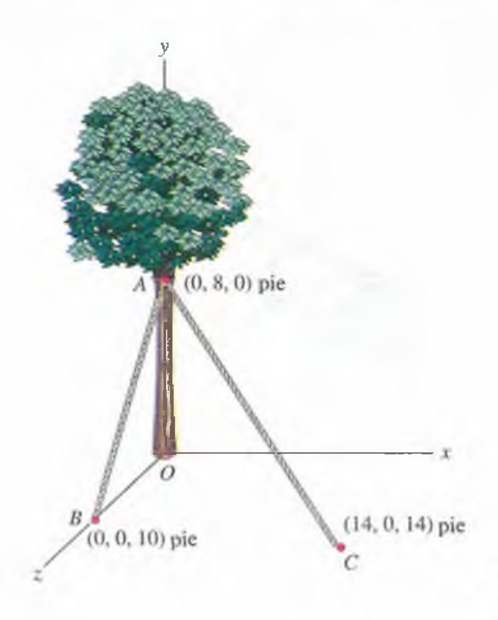
P4.57

4.58 Después de anotar una canasta, un jugador de baloncesto se cuelga del borde del aro, ejerciendo la fuerza mostrada. Determine el momento que ejerce respecto al origen O en función de las dimensiones h y r y del ángulo α.



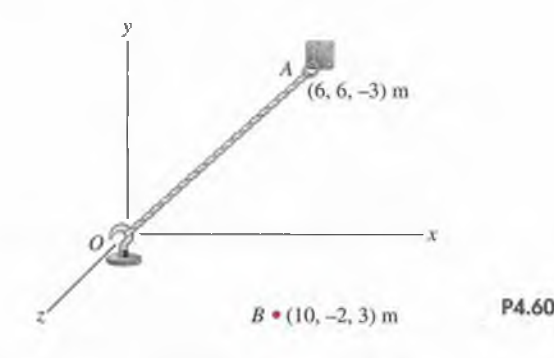
P4.58

4.59 La tensión en el cable AC mostrado es de 100 lb. Determine el momento respecto al origen O debido a la fuerza ejercida en A por el cable AC. Use el producto cruz, considerando que **r** es el vector (a) de O a A y (b) de O a C.



P4.59

4.60 La tensión en el cable OA mostrado es de 500 N. Determine el momento respecto a B de la fuerza ejercida por el cable (a) sobre el punto O, (b) sobre el punto A. (c) Determine la distancia perpendicular de B al cable OA.

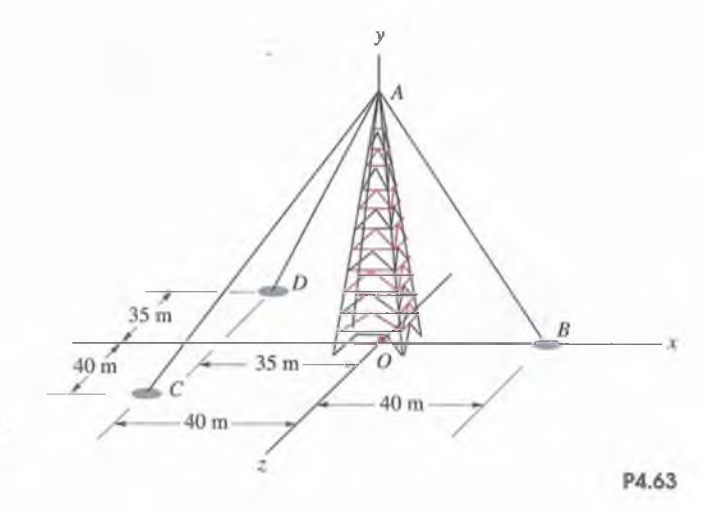


P4.60

4.61 Sea el sistema mostrado en el problema 4.59. La tensión en el cable AB es de 100 lb y la tensión en el cable AC es de 140 lb. Determine la magnitud de la suma de los momentos respecto a O debidos a las fuerzas ejercidas en A por los dos cables.

4.62 Considere el sistema del problema 4.59. Los cables AB y AC tienen la misma tensión T. El árbol fallará en O si la magnitud del momento respecto a O de las fuerzas ejercidas sobre él por los cables excede de 5000 lb-pie. Con base en este criterio, ¿cuál es el valor máximo admisible de T?

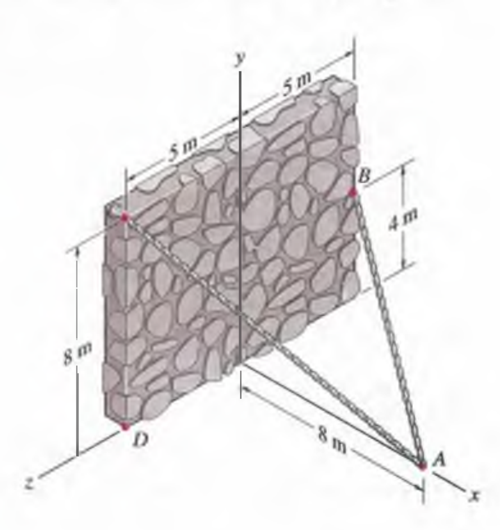
4.63 La torre tiene 70 m de altura. Las tensiones en los cables AB, AC y AD son de 4 kN, 2 kN y 2 kN respectivamente. Determine la suma de los momentos respecto al origen O debidos a las fuerzas ejercidas por los cables en el punto A.



P4.63

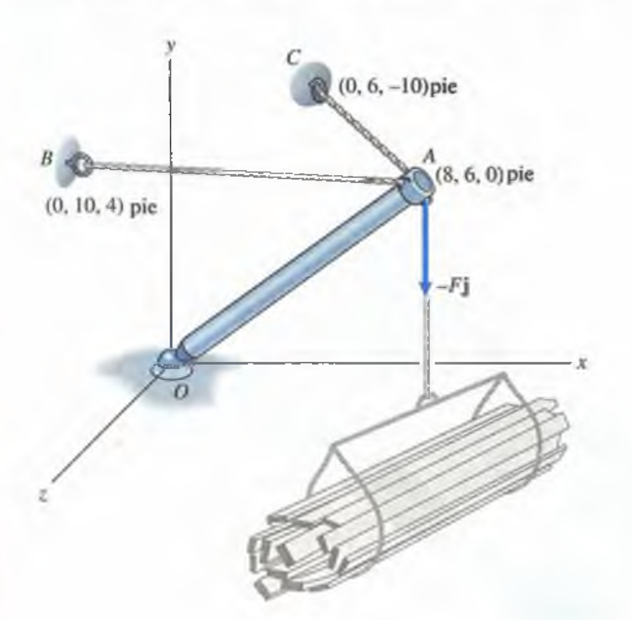
4.64 Considere la torre de 70 m de altura del problema 4.63. Suponga que la tensión en el cable AB es de 4 kN, y que las tensiones en los cables AC y AD se quieren ajustar para que la suma de los momentos respecto al origen O debidos a las fuerzas ejercidas por los cables en el punto A sea igual a cero. Determine las tensiones.

4.65 La tensión en el cable AB es de 150 N, y en AC es 100 N. Determine la suma de los momentos respecto a D debidos a las fuerzas ejercidas sobre la pared por los cables.



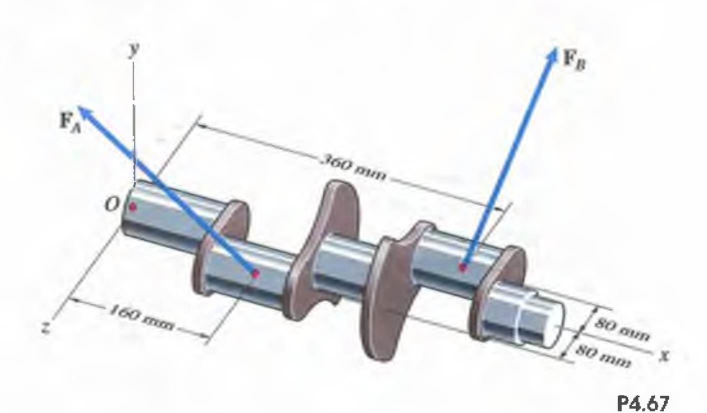
P4.65

4.66 La suma de los momentos respecto a O debidos a la fuerza **F** y a las fuerzas en A por los cables AB y AC es igual a cero. Si $F = 800$ lb, ¿cuáles son las tensiones en los cables?



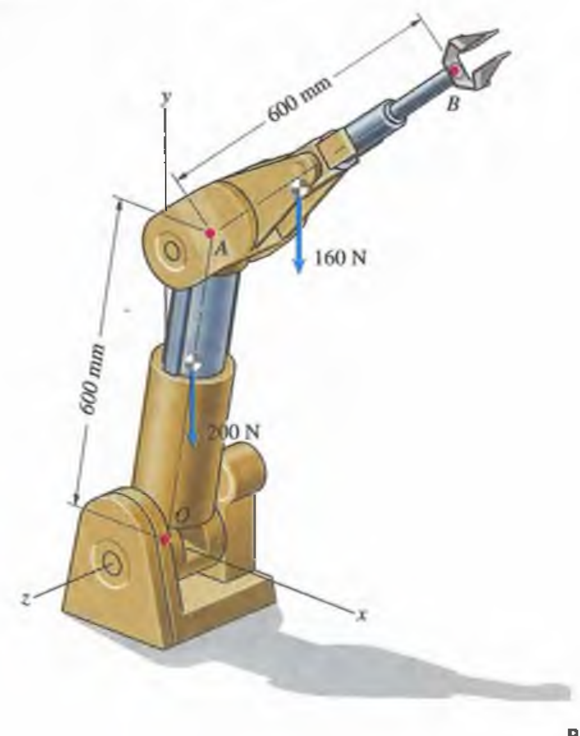
P4.66

4.67 Las bielas ejercen dos fuerzas sobre el cigüeñal. Los cosenos directores de $\mathbf{F}_A$ son $\cos\theta_x = -0.182$, $\cos\theta_y = 0.818$ y $\cos\theta_z = 0.545$, y su magnitud es de 4 kN. Los cosenos directores de $\mathbf{F}_B$ son $\cos\theta_x = 0.182$, $\cos\theta_y = 0.818$ y $\cos\theta_z = -0.545$, y su magnitud es de 2 kN. ¿Qué valor tiene la suma de los momentos respecto a O debidos a las dos fuerzas?



P4.67

4.68 Los pesos de los brazos OA y AB actúan en sus puntos medios. Los cosenos directores de la línea central del brazo OA son $\cos\theta_x = 0.500$, $\cos\theta_y = 0.866$ y $\cos\theta_z = 0$, mientras que los del brazo AB son $\cos\theta_x = 0.707$, $\cos\theta_y = 0.619$ y $\cos\theta_z = -0.342$. ¿Qué valor tiene la suma de los momentos respecto a O debidos a las dos fuerzas?

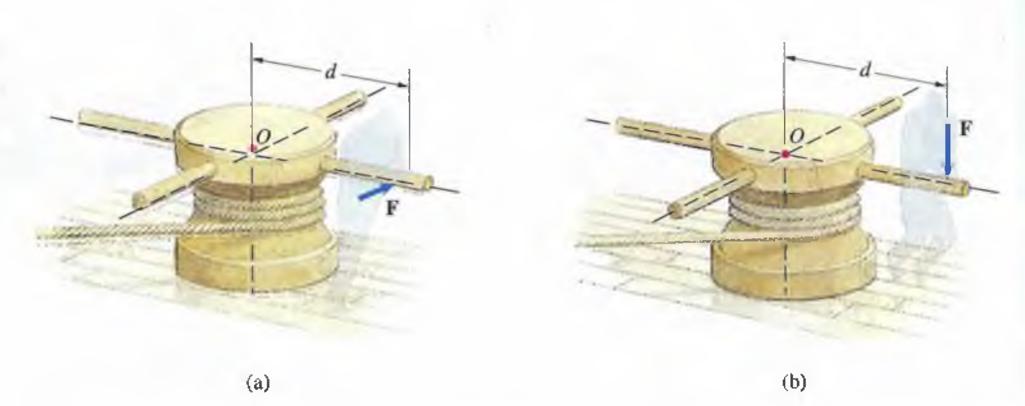


P4.68

4.3 *Momento de una fuerza respecto a una línea*

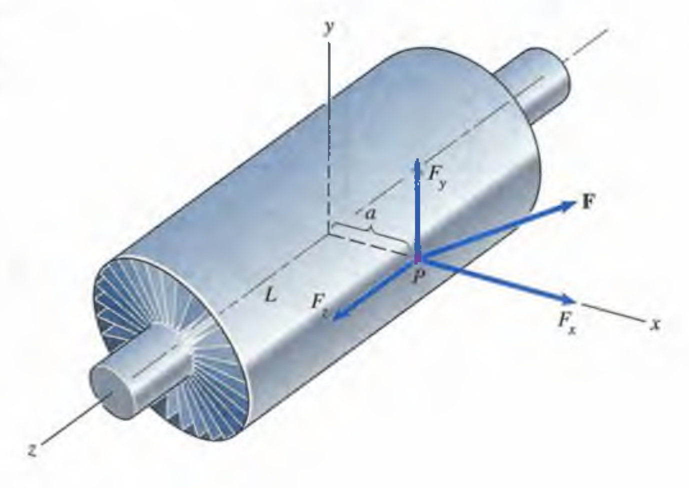
El dispositivo mostrado, llamado *cabrestante*, se usó en los barcos de vela. Lo hacían girar con las manijas (Fig. 4.16a) para generar energía y levar las anclas e izar las velas. Se sabe que una fuerza vertical aplicada a una de las manijas (Fig. 4.16b), no hace girar al cabrestante aun cuando la magnitud del momento respecto al punto O sea $d|\mathbf{F}|$ en ambos casos.

Figura 4.16
(a) Cabrestante girando.
(b) Una fuerza vertical no hace girar el cabrestante.



La medida de la tendencia de una fuerza a causar un giro alrededor de una línea o eje se denomina momento de la fuerza respecto a la línea. Suponga que una fuerza **F** actúa sobre un cuerpo, digamos una turbina que gira alrededor de un eje L, y que descomponemos F en componentes con base en el sistema coordenado de la figura 4.17. Las componentes $\mathbf{F}_x$ y $\mathbf{F}_z$ no hacen girar la turbina, así como tampoco la fuerza paralela al eje del cabrestante lo hacía girar. Es la componente F_y la que tiende a causar giros al ejercer un momento de magnitud aF_y respecto al eje de la turbina. En este ejemplo podemos determinar el momento de **F** respecto a L porque el sistema coordenado está convenientemente situado. Planteamos ahora una expresión que se puede usar para determinar el momento de una fuerza respecto a cualquier línea.

Figura 4.17
Aplicación de una fuerza a una turbina con eje de giro L.



Definición

Consideremos una línea L y una fuerza $\mathbf{F}$ (Fig. 4.18a). Sea $\mathbf{M}_0$ el momento de $\mathbf{F}$ respecto a un punto arbitrario O sobre L (Fig. 4.18b). El momento de $\mathbf{F}$ respecto a L es la componente de $\mathbf{M}_0$ paralela a L, que denotamos con $\mathbf{M}_L$ (Fig. 4.18c). La magnitud del momento de $\mathbf{F}$ respecto a L es $|\mathbf{M}_L|$, y cuando el pulgar de la mano derecha apunta hacia $\mathbf{M}_L$, el arco de los dedos indica el sentido del momento respecto a L.

En función de un vector unitario $\mathbf{e}$ a lo largo de L (Fig. 4.18d), $\mathbf{M}_L$ está dado por

$$\boxed{\mathbf{M}_L = (\mathbf{e} \cdot \mathbf{M}_0)\mathbf{e}.} \tag{4.4}$$

(El vector unitario $\mathbf{e}$ puede apuntar en cualquier dirección. Véase el análisis de las componentes vectoriales en Sec. 2.5.) El momento $\mathbf{M}_0 = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$, por lo que podemos también expresar $\mathbf{M}_L$ como

$$\boxed{\mathbf{M}_L = [\mathbf{e} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{F})]\,\mathbf{e}.} \tag{4.5}$$

El producto triple mixto en esta expresión está dado en función de las componentes de los tres vectores por

$$\mathbf{e} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{F}) = \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}. \tag{4.6}$$

Observe que el valor del escalar $\mathbf{e} \cdot \mathbf{M}_0 = \mathbf{e} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{F})$ nos da la magnitud y la dirección de $\mathbf{M}_L$. El valor absoluto de $\mathbf{e} \cdot \mathbf{M}_0$ es la magnitud de $\mathbf{M}_L$. Si $\mathbf{e} \cdot \mathbf{M}_0$ es positivo, $\mathbf{M}_L$ apunta hacia $\mathbf{e}$, y si $\mathbf{e} \cdot \mathbf{M}_0$ es negativo, $\mathbf{M}_L$ apunta en la dirección opuesta a $\mathbf{e}$.

El resultado de la Ec. (4.4) o (4.5) no depende del punto sobre L elegido para determinar $\mathbf{M}_0 = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$. Si usamos el punto O de la figura 4.19 para determinar el momento de $\mathbf{F}$ respecto a L, obtenemos el resultado por la Ec. (4.5). Y con el punto O' obtenemos lo mismo,

$$\begin{aligned}[\mathbf{e} \cdot (\mathbf{r}' \times \mathbf{F})]\,\mathbf{e} &= \{\mathbf{e} \cdot [(\mathbf{r} + \mathbf{u}) \times \mathbf{F}]\}\,\mathbf{e} \\ &= [\mathbf{e} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{F}) + \mathbf{e} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{F})]\,\mathbf{e} \\ &= [\mathbf{e} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{F})]\,\mathbf{e},\end{aligned}$$

porque $\mathbf{u} \times \mathbf{F}$ es perpendicular a $\mathbf{e}$.

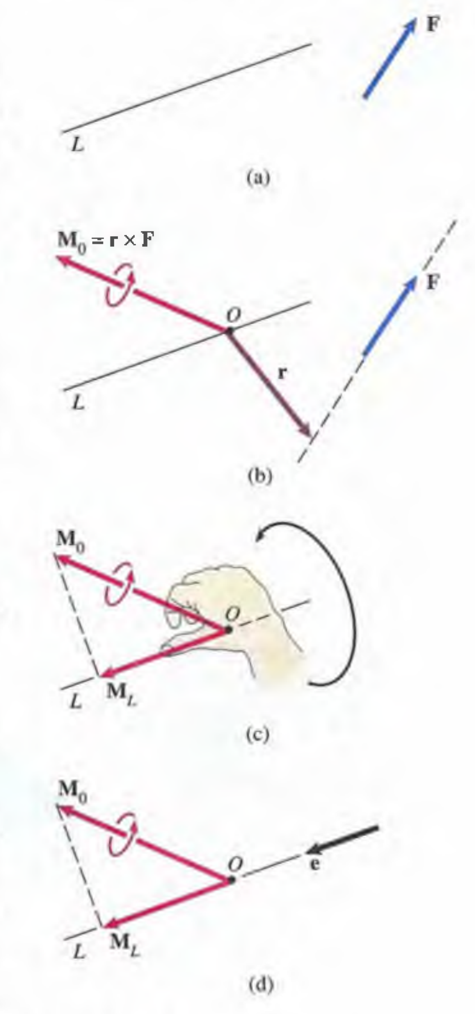


Figura 4.18
(a) La línea L y la fuerza $\mathbf{F}$.
(b) $\mathbf{M}_0$ es el momento de $\mathbf{F}$ respecto a cualquier punto O sobre L.
(c) La componente $\mathbf{M}_L$ es el momento de $\mathbf{F}$ respecto a L.
(d) Vector unitario $\mathbf{e}$ a lo largo de L.

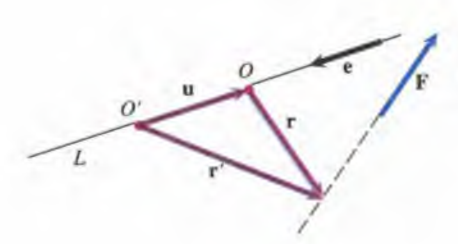


Figura 4.19
Uso de diferentes puntos O y O' para determinar el momento de $\mathbf{F}$ respecto a L.

Aplicación de la definición

Para demostrar que $\mathbf{M}_L$ es la medida de la tendencia de **F** a ocasionar giros alrededor de L, volvemos a la turbina de la figura 4.17. Sea Q un punto sobre L a una distancia arbitraria b del origen (Fig. 4.20a). El vector **r** de Q a P es $\mathbf{r} = a\mathbf{i} - b\mathbf{k}$, por lo que el momento de **F** respecto a Q es

$$\mathbf{M}_Q = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a & 0 & -b \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = bF_y\,\mathbf{i} - (aF_z + bF_x)\,\mathbf{j} + aF_y\,\mathbf{k}.$$

Como el eje z coincide con L, el vector unitario **k** está dirigido a lo largo de L. Por tanto, el momento de **F** respecto a L es

$$\mathbf{M}_L = (\mathbf{k} \cdot \mathbf{M}_Q)\,\mathbf{k} = aF_y\,\mathbf{k}.$$

Las componentes F_x y F_z no ejercen momento respecto a L. Si suponemos que F_y es positiva. ésta ejerce un momento de magnitud aF_y respecto al eje de la turbina en la dirección mostrada en la figura 4.20(b).

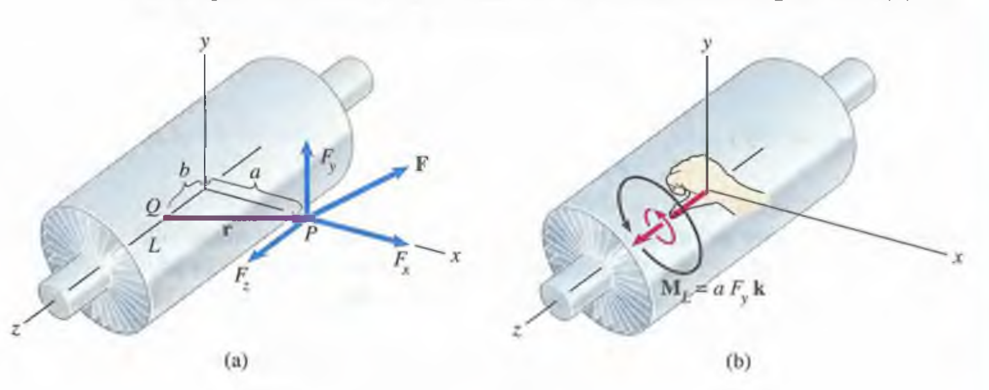


Figura 4.20
(a) Un punto Q cualquiera sobre L y el vector **r** de Q a P.
(b) $\mathbf{M}_L$ y el sentido del momento respecto a L.

Determinemos el momento de una fuerza respecto a una línea arbitraria L (Fig. 4.21a). Primero elegimos un punto sobre la línea. Si escogemos A (Fig. 4.21b), el vector **r** de A al punto de aplicación de **F** es

$$\mathbf{r} = (8-2)\,\mathbf{i} + (6-0)\,\mathbf{j} + (4-4)\,\mathbf{k} = 6\,\mathbf{i} + 6\,\mathbf{j}\ \ (\text{m}).$$

El momento de **F** respecto a A es

$$\mathbf{M}_A = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 6 & 6 & 0 \\ 10 & 60 & -20 \end{vmatrix}$$

$$= -120\,\mathbf{i} + 120\,\mathbf{j} + 300\,\mathbf{k}\ \ (\text{N-m}).$$

El siguiente paso es determinar un vector unitario a lo largo de L. El vector de A a B es

$$(-7-2)\,\mathbf{i} + (6-0)\,\mathbf{j} + (2-4)\,\mathbf{k} = -9\,\mathbf{i} + 6\,\mathbf{j} - 2\,\mathbf{k}\ \ (\text{m}).$$

Dividiéndolo entre su magnitud, obtenemos un vector unitario $\mathbf{e}_{AB}$ que apunta de A a B (Fig. 4.21c):

$$\mathbf{e}_{AB} = -\frac{9}{11}\mathbf{i} + \frac{6}{11}\mathbf{j} - \frac{2}{11}\mathbf{k}.$$

El momento de $\mathbf{F}$ respecto a L es

$$\begin{aligned}\mathbf{M}_L &= (\mathbf{e}_{AB} \cdot \mathbf{M}_A)\mathbf{e}_{AB} \\ &= \left[\left(-\frac{9}{11}\right)(-120) + \left(\frac{6}{11}\right)(120) + \left(-\frac{2}{11}\right)(300)\right]\mathbf{e}_{AB} \\ &= 109.1\,\mathbf{e}_{AB} \quad \text{(N-m)}.\end{aligned}$$

La magnitud de $\mathbf{M}_L$ es 109.1 N-m; la dirección se indica apuntando el pulgar de la mano derecha hacia $\mathbf{e}_{AB}$.

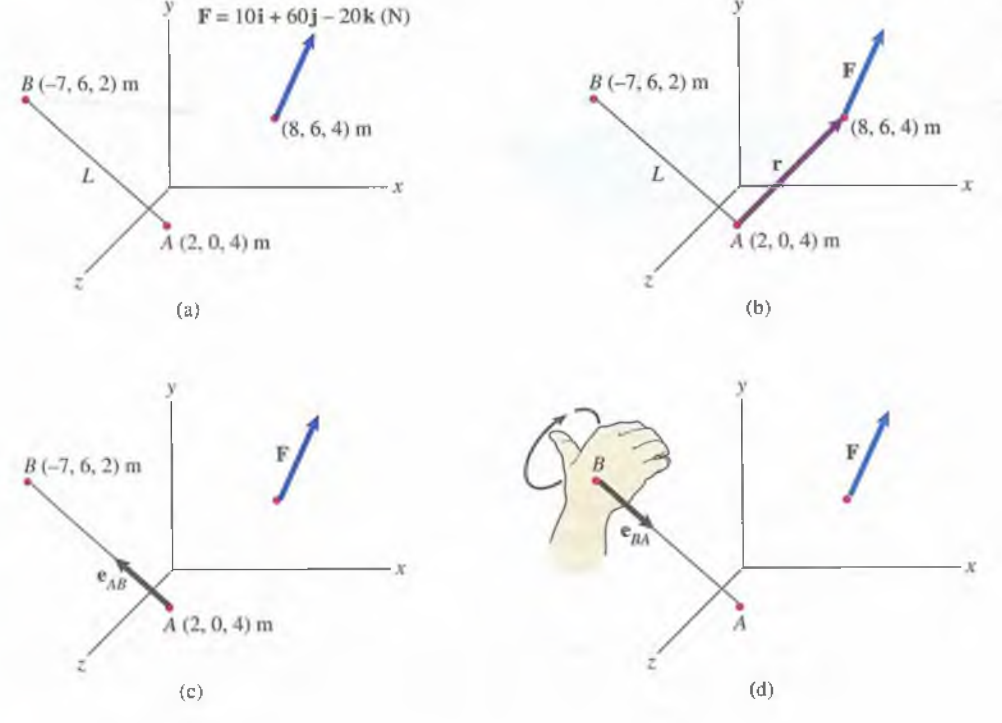


Figura 4.21
(a) Una fuerza $\mathbf{F}$ y una línea L.
(b) Vector $\mathbf{r}$ de A al punto de aplicación de $\mathbf{F}$.
(c) $\mathbf{e}_{AB}$ apunta de A a B.
(d) La regla de la mano derecha indica el sentido del momento.

Si calculamos $\mathbf{M}_L$ usando el vector unitario $\mathbf{e}_{BA}$ que apunta de B a A, obtenemos

$$\mathbf{M}_L = -109.1\,\mathbf{e}_{BA} \quad \text{(N-m)}.$$

Obtenemos la misma magnitud, y el signo menos indica que $\mathbf{M}_L$ apunta en la dirección opuesta a $\mathbf{e}_{BA}$, por lo que la dirección es la misma. Por ende, la regla de la mano derecha indica el mismo sentido (Fig. 4.21d).

Casos especiales

En los ejemplos precedentes se demostraron tres resultados importantes que podemos formular en términos más generales:

1. Si la línea de acción de F es perpendicular a un plano que contenga a L (Fig. 4.22a), la magnitud del momento de **F** respecto a L es igual al producto de la magnitud de **F** y la distancia D perpendicular de L al punto donde la línea de acción corta el plano: $|\mathbf{M}_L| = |\mathbf{F}|D$.
2. Cuando la línea de acción de **F** es paralela a L (Fig. 4.22b), el momento de **F** respecto a L es nulo: $\mathbf{M}_L = \mathbf{0}$. Como $\mathbf{M}_0 = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$ es perpendicular a **F**, $\mathbf{M}_0$ es perpendicular a L y la componente vectorial de $\mathbf{M}_0$ paralela a L es nula.
3. Cuando la línea de acción de **F** corta a L (Fig. 4.22c), el momento de **F** respecto a L es nulo. Como es posible elegir cualquier punto sobre L para evaluar $\mathbf{M}_0$, podemos usar el punto donde la línea de acción de **F** corta a L. El momento $\mathbf{M}_0$ respecto a ese punto es cero, por lo que su componente vectorial paralela a L es nula.

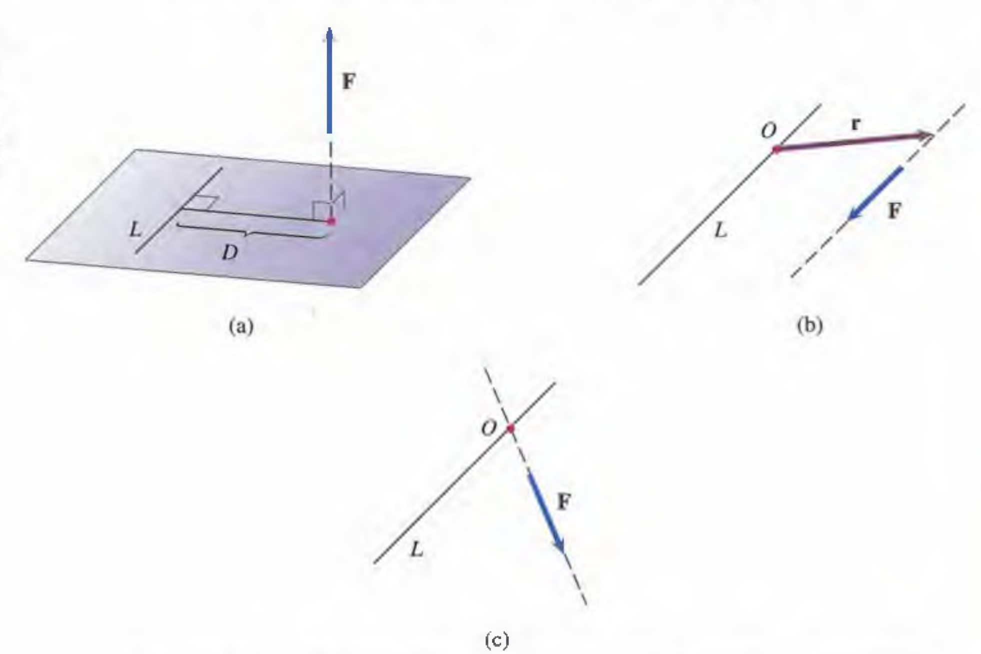


Figura 4.22
(a) **F** es perpendicular a un plano que contiene a L.
(b) **F** es paralela a L.
(c) La línea de acción de **F** interseca a L en O.

Los siguientes ejemplos demuestran cómo se determina el momento de una fuerza respecto a una línea. El uso de las ecuaciones (4.4)-(4.6) requiere tres pasos:

1. Determinar un vector **r**. *Elija cualquier punto O sobre L y determine las componentes de un vector* **r** *de O a cualquier punto sobre la línea de acción de* **F**.
2. Determinar un vector **e**. *Determine las componentes de un vector unitario a lo largo de L. No importa en que dirección apunte a lo largo de L.*
3. Evaluar $\mathbf{M}_L$. *Se puede calcular* $\mathbf{M}_0 = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$ *y determinar* $\mathbf{M}_L$ *usando la ecuación (4.4), o se puede usar la ecuación (4.6) para evaluar el producto triple mixto y sustituir el resultado en la ecuación (4.5).*

Ejemplo 4.7

¿Qué valor tiene el momento de la fuerza de 50 lb respecto al eje x?

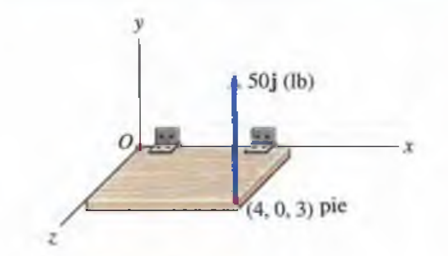


Figura 4.23

ESTRATEGIA

Es posible determinar el momento de dos maneras:

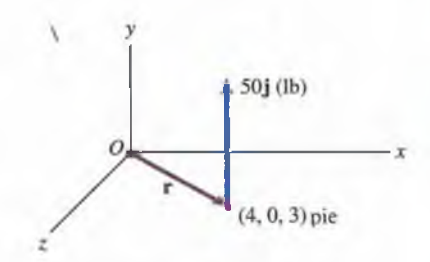
Primer método Podemos usar las Ecs. (4.5) y (4.6). Como **r** se puede extender desde cualquier punto sobre el eje x a la línea de acción de la fuerza, podemos usar el vector de O al punto de aplicación de la fuerza. El vector **e** debe ser un vector unitario a lo largo del eje x; podemos usar **i** o −**i**.

Segundo método Éste es el primer caso especial que tenemos, pues la fuerza de 50 lb es perpendicular al plano x-z. La magnitud y la dirección del momento se pueden determinar directamente de la información dada.

SOLUCIÓN

Primer método *Determinar un vector* **r**. El vector de O al punto de aplicación de la fuerza es (Fig. a)

$$\mathbf{r} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{k} \text{ (pies)}.$$



(a) Vector **r** de O al punto de aplicación de la fuerza.

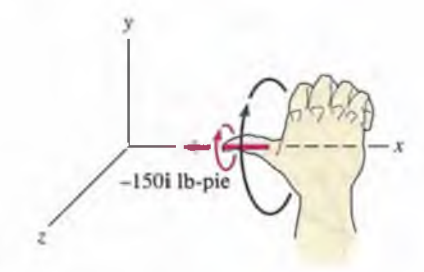
Determinar un vector **e**. Podemos usar el vector unitario **i**.
Evaluar $\mathbf{M}_L$. De acuerdo con la ecuación (4.6), el producto triple mixto es

$$\mathbf{i} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{F}) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 3 \\ 0 & 50 & 0 \end{vmatrix} = -150 \text{ lb-pie}.$$

De la ecuación (4.5), el momento de la fuerza respecto al eje x es

$$\mathbf{M}_{(\text{eje } x)} = [\mathbf{i} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{F})]\mathbf{i} = -150\mathbf{i} \text{ (lb-pie)}.$$

La magnitud del momento es de 150 lb-pie y su sentido es como se muestra en la figura (b).



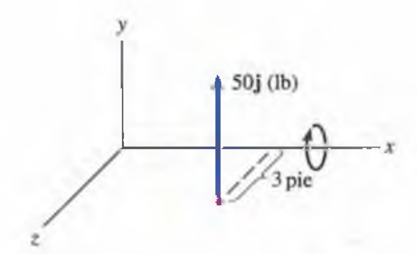
(b) Sentido del momento.

Segundo método Como la fuerza de 50 lb es perpendicular a un plano (el plano x-z) que contiene al eje x, la magnitud del momento respecto al eje x es igual a la distancia perpendicular del eje x al punto en que la línea de acción de la fuerza corta el plano x-z (Fig. c).

$$|\mathbf{M}_{(\text{eje } x)}| = (3 \text{ pie})(50 \text{ lb}) = 150 \text{ lb-pie}.$$

Apuntando con el arco de los dedos en la dirección del sentido del momento respecto al eje x (Fig. c), la regla de la mano derecha indica que $\mathbf{M}_{(\text{eje } x)}$ apunta en la dirección negativa del eje x. Por tanto,

$$\mathbf{M}_{(\text{eje } x)} = -150\mathbf{i} \text{ (lb-pie)}.$$

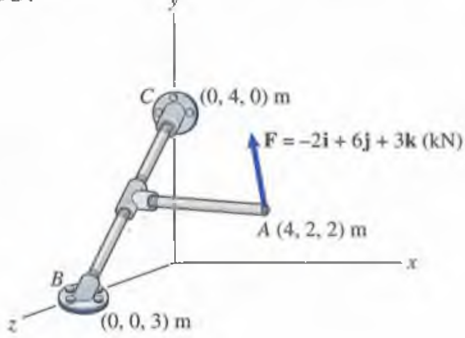


(c) La distancia del eje x al punto donde la línea de acción de la fuerza interseca al plano x-z es igual a 3 pies. La flecha indica el sentido del momento respecto al eje x.

Ejemplo 4.8

¿Qué valor tiene el momento de la fuerza **F** mostrada en la figura 4.24 respecto a la barra BC?

Figura 4.24



ESTRATEGIA

Podemos usar las ecuaciones (4.5) y (4.6) para determinar el momento. Como conocemos las coordenadas de los puntos B y C, podemos determinar las componentes de un vector **r** que se extienda de B al punto de aplicación de la fuerza o de C al punto de aplicación. También podemos usar las coordenadas de los puntos B y C para determinar un vector unitario a lo largo de la línea BC.

SOLUCIÓN

Determinar un vector r Necesitamos un vector de cualquier punto sobre la línea BC a cualquier punto sobre la línea de acción de la fuerza. Sea **r** el vector de B al punto de aplicación de **F** (Fig. a),

$$\mathbf{r} = (4-0)\,\mathbf{i} + (2-0)\,\mathbf{j} + (2-3)\,\mathbf{k} = 4\,\mathbf{i} + 2\,\mathbf{j} - \mathbf{k} \quad \text{(m)}.$$

Determinar un vector e Para obtener un vector unitario a lo largo de la barra BC, determinamos el vector de B a C,

$$(0-0)\,\mathbf{i} + (4-0)\,\mathbf{j} + (0-3)\,\mathbf{k} = 4\,\mathbf{j} - 3\,\mathbf{k} \quad \text{(m)},$$

y lo dividimos entre su magnitud (Fig. a):

$$\mathbf{e}_{BC} = \frac{4\,\mathbf{j} - 3\,\mathbf{k}}{5} = 0.8\,\mathbf{j} - 0.6\,\mathbf{k}.$$

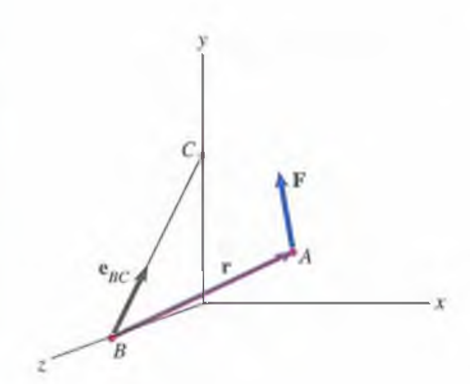
Evaluar M_L Según la ecuación (4.6), el producto triple mixto es

$$\mathbf{e}_{BC} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{F}) = \begin{vmatrix} 0 & 0.8 & -0.6 \\ 4 & 2 & -1 \\ -2 & 6 & 3 \end{vmatrix} = -24.8 \ \text{kN-m}.$$

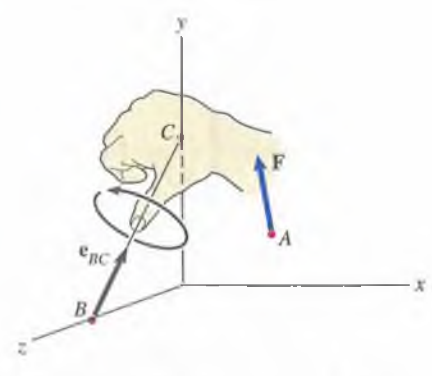
Sustituyendo esto en Ec. (4.5), el momento de **F** respecto a la barra BC es

$$\mathbf{M}_{BC} = [\mathbf{e}_{BC} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{F})]\,\mathbf{e}_{BC} = -24.8\,\mathbf{e}_{BC} \quad \text{(kN-m)}.$$

La magnitud de $\mathbf{M}_{BC}$ es de 24.8 kN-m y su dirección es opuesta a la del vector $\mathbf{e}_{BC}$. El sentido del momento se muestra en la figura (b).



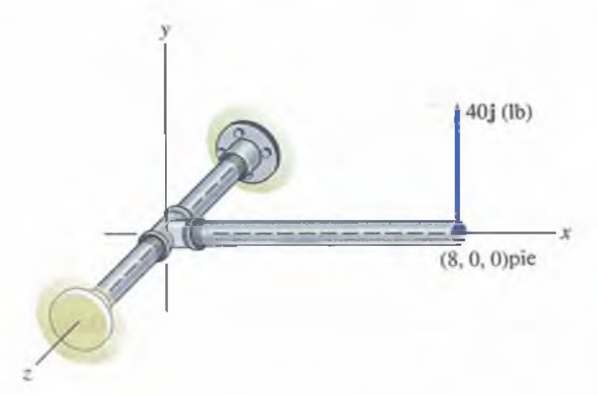
(a) Vectores **r** y $\mathbf{e}_{BC}$.



(b) La regla de la mano derecha indica el sentido del momento respecto a BC.

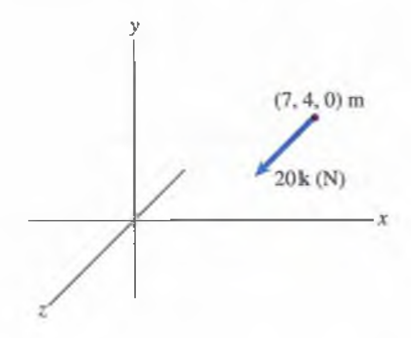
Problemas

4.69 Determine el momento de la fuerza de 40 lb mostrada respecto al eje z, (a) sin usar las ecuaciones (4.4) a (4.6), (b) usando las ecuaciones (4.5) y (4.6). (Véase el Ej. 4.7.)



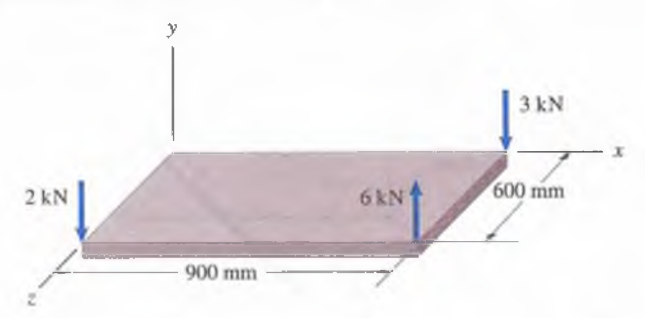
P4.69

4.70 Determine el momento de la fuerza de 20 N mostrada respecto (a) al eje x, (b) al eje y y (c) al eje z.



P4.70

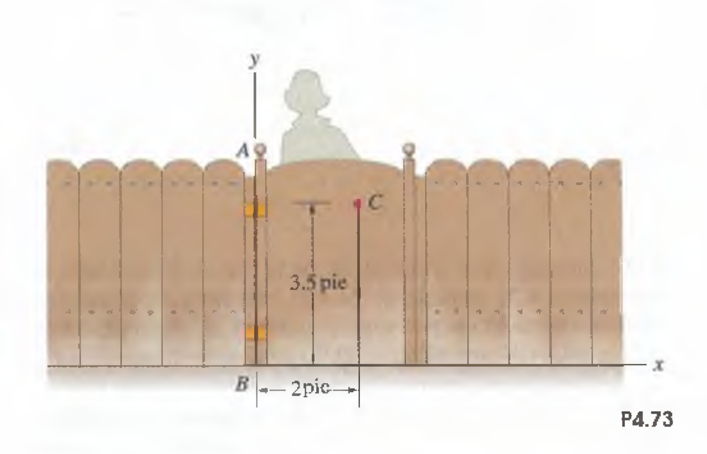
4.71 Tres fuerzas paralelas al eje y de la figura actúan sobre la placa rectangular. Determine la suma de los momentos de las fuerzas respecto al eje x, (a) sin usar las ecuaciones (4.4) a (4.6), (b) usando las ecuaciones (4.5) y (4.6).



P4.71

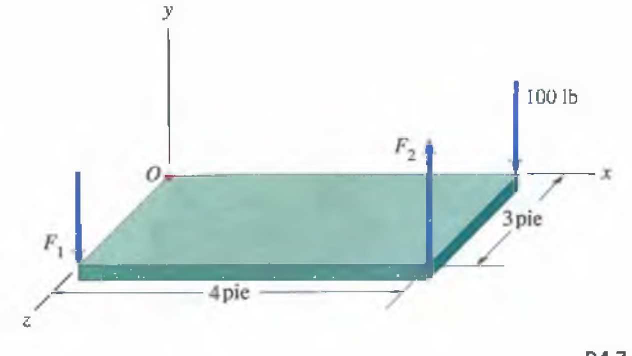
4.72 Considere la placa del problema 4.71. Las tres fuerzas son paralelas al eje y. Determine la suma de los momentos de las fuerzas (a) respecto al eje y y (b) respecto al eje z.

4.73 Una persona ejerce una fuerza $\mathbf{F} = -2\mathbf{i} - 4\mathbf{j} - 12\mathbf{k}$ (lb) sobre el punto C de la puerta mostrada. ¿Qué momento ejerce la fuerza respecto al eje AB de las bisagras?



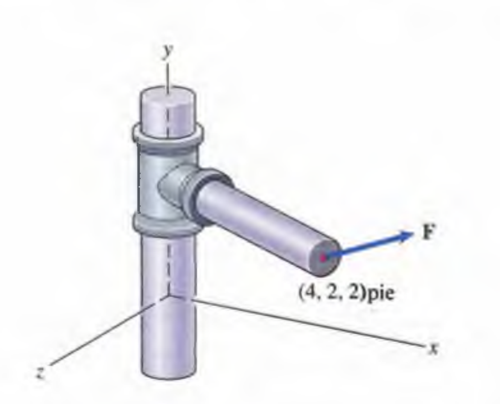
P4.73

4.74 Tres fuerzas paralelas al eje y mostrado actúan sobre la placa rectangular. La suma vectorial de las fuerzas es igual a cero, y la magnitud de la suma de los momentos de las fuerzas respecto a O es de 600 lb-pie. ¿Qué valor tiene la suma de los momentos de las tres fuerzas respecto al eje x?



P4.74

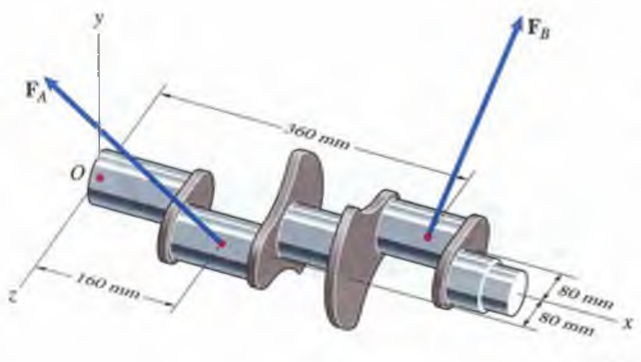
4.75 Se tiene una fuerza $\mathbf{F} = 100\mathbf{i} + 60\mathbf{j} - 40\mathbf{k}$ (lb). ¿Qué valor tiene el momento de **F** respecto al eje y de la figura? Dibuje un croquis para indicar el sentido del momento.



P4.75

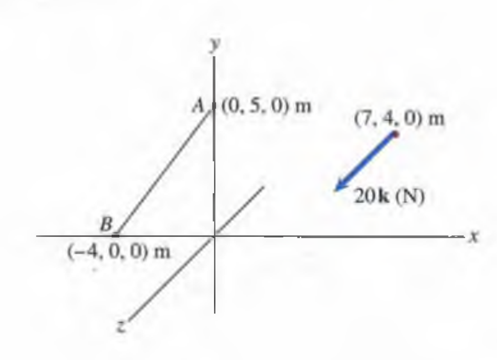
4.76 Suponga que el momento de la fuerza **F** mostrada en el problema 4.75 respecto al eje x es $-80\mathbf{i}$ (lb-pie), que el momento respecto al eje y es nulo y que el momento respecto al eje z es $160\mathbf{k}$ (lb-pie). Si $F_y = 80$ lb, ¿qué valor tienen F_x y F_z?

4.77 El cigüeñal que se muestra en la figura está sometido a dos fuerzas ejercidas por las barras de conexión. Los cosenos directores de $\mathbf{F}_A$ son $\cos\theta_x = -0.182$, eos $\theta_y = 0.818$ y eos $\theta_z = 0.545$, y su magnitud es 4 kN. Los cosenos directores de $\mathbf{F}_B$ son $\cos\theta_x = 0.182$, $\cos\theta_y = 0.818$ y $\cos\theta_z = -0.545$, y su magnitud es de 2 kN. ¿Qué valor tiene la suma de los momentos de las dos fuerzas respecto al eje x? (Éste es el momento que ocasiona que el cigüeñal gire.)



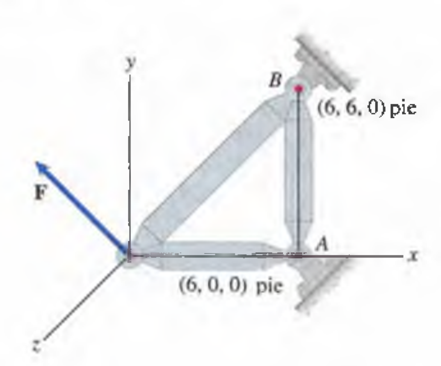
P4.77

4.78 Determine el momento de la fuerza de 20 N mostrada respecto a la línea AB. Dibuje un croquis para indicar el sentido del momento.



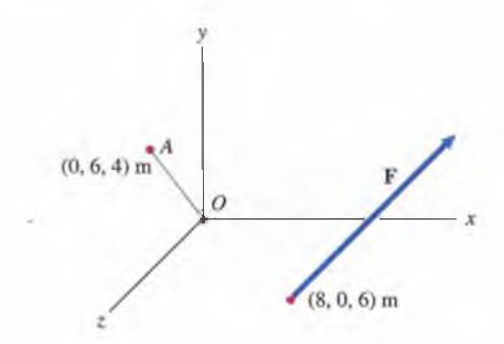
P4.78

4.79 Se tiene una fuerza $\mathbf{F} = -10\mathbf{i} + 5\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$ (klb). Determine el momento de **F** respecto a la línea AB mostrada. Dibuje un croquis para indicar el sentido del momento.



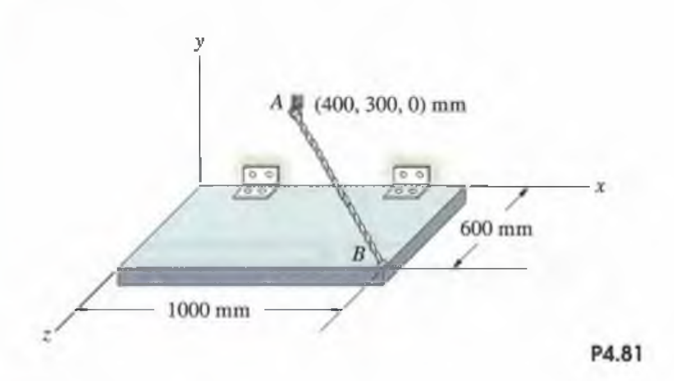
P4.79

4.80 Se tiene una fuerza $\mathbf{F} = 10\mathbf{i} + 12\mathbf{j} - 6\mathbf{k}$ (N). ¿Cuál es el momento de **F** respecto a la línea AO de la figura? Dibuje un croquis para indicar el sentido del momento.



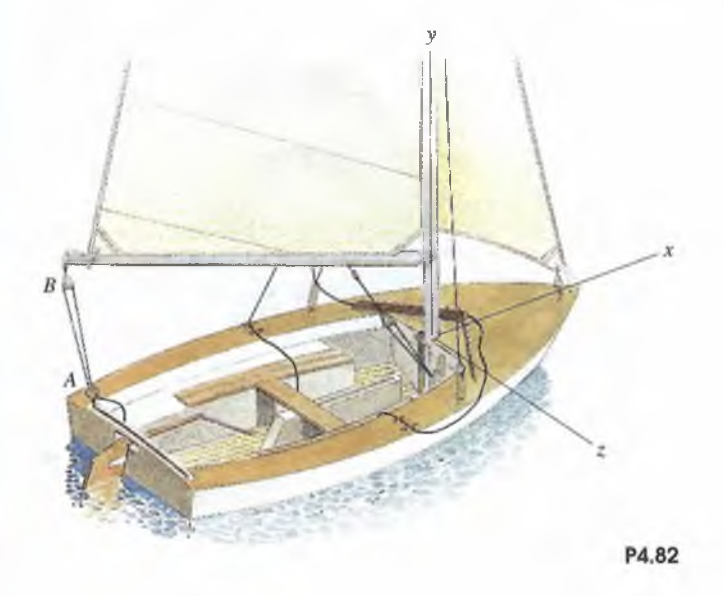
P4.80

4.81 La tensión en el cable AB mostrado es de 1 kN. Determine el momento respecto al eje x debido a la fuerza ejercida sobre la compuerta por el cable en el punto B. Dibuje un croquis para indicar el sentido del momento.



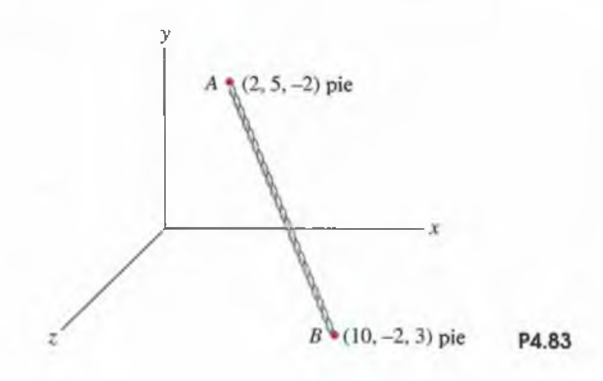
P4.81

4.82 Las coordenadas de A son (−2.4, 0, −0.6) m y las de B son (−2.2, 0.7, −1.2) m. La fuerza ejercida en B por la escota principal AB del bote de vela es de 130 N. Determine el momento de la fuerza respecto a la línea central del mástil (el eje y). Dibuje un croquis para indicar el sentido del momento.



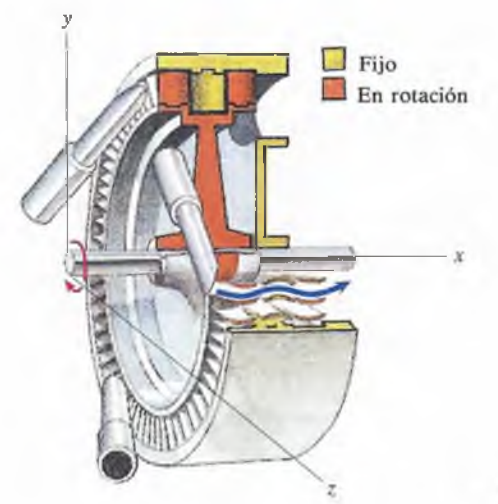
P4.82

4.83 La tensión en el cable AB mostrado es de 200 lb. Determine los momentos respecto a cada uno de los ejes coordenados debidos a la fuerza ejercida en B por el cable. Dibuje un croquis para indicar los sentidos de los momentos.



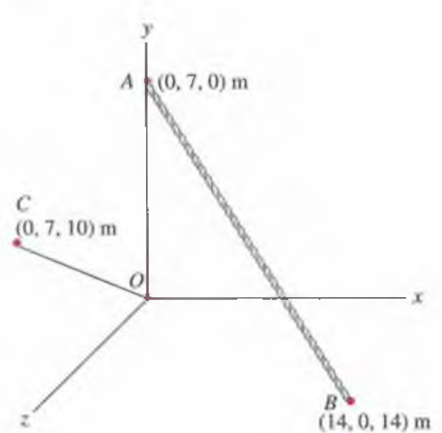
P4.83

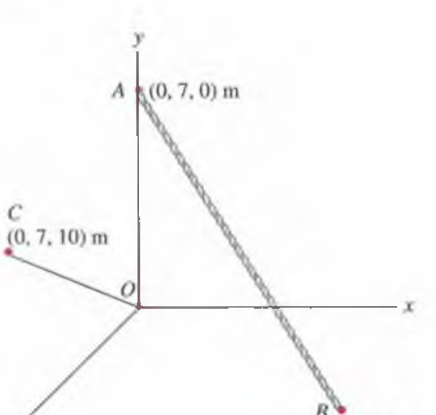
4.84 En la figura P4.84, la fuerza total ejercida por la tobera de vapor sobre los álabes de la turbina es $\mathbf{F} = 20\mathbf{i} - 120\mathbf{j} + 100\mathbf{k}$ (N); la fuerza actúa efectivamente en el punto (100, 80, 300) mm. ¿Qué momento se ejerce respecto al eje de la turbina (el eje x)?



P4.84

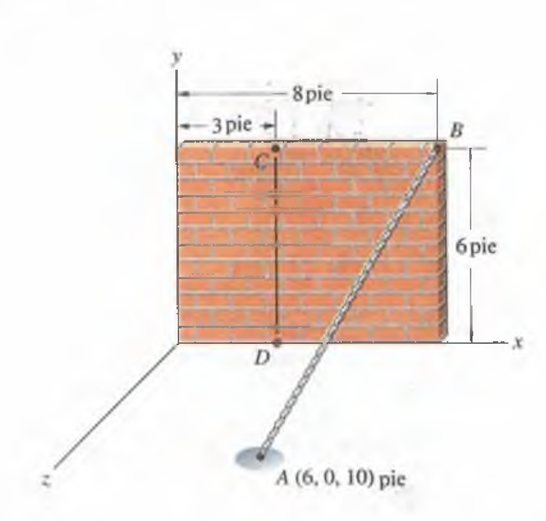
4.85 La tensión en el cable AB mostrado es de 50 N. Determine el momento respecto a la línea OC debido a la fuerza ejercida por el cable en B. Dibuje un croquis para indicar el sentido del momento.





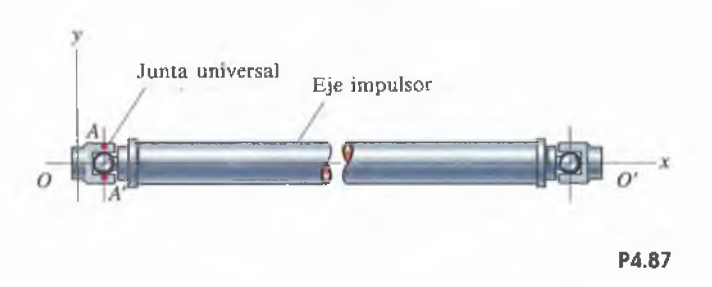
P4.85

4.86 La tensión en el cable AB mostrado es de 80 lb. ¿Cuál es el momento respecto a la línea CD debido a la fuerza ejercida por el cable sobre la pared en B?



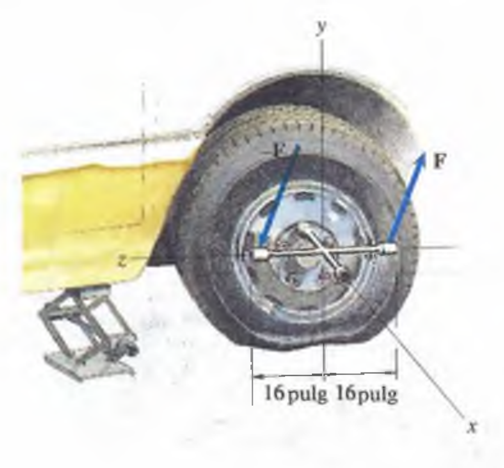
P4.86

4.87 La junta universal de la figura P4.87 está conectada al eje impulsor en A y A'. Las coordenadas de A son (0, 40, 0) mm y las de A' son (0, −40, 0) mm. Las fuerzas ejercidas sobre el eje por la junta universal son $-30\mathbf{j} + 400\mathbf{k}$ (N) en A y $30\mathbf{j} - 400\mathbf{k}$ (N) en A'. ¿Cuál es la magnitud del par (momento) ejercido por la junta universal sobre el eje impulsor respecto a la línea O-O' del eje?



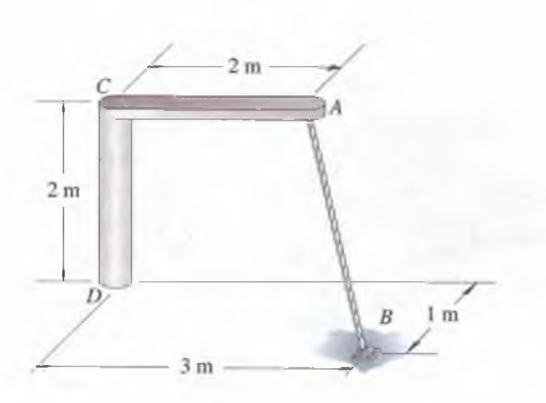
P4.87

4.88 Un conductor aplica las dos fuerzas mostradas para aflojar una tuerca. Los cosenos directores de $\mathbf{F}$ son $\cos\theta_x = \frac{4}{13}$ $\cos\theta_y = \frac{12}{13}$ y $\cos\theta_z = \frac{3}{13}$. Si la magnitud del momento respecto al eje x debe ser de 32 lb-pie para que se afloje la tuerca, ¿cuál es la magnitud de las fuerzas que se deben aplicar?



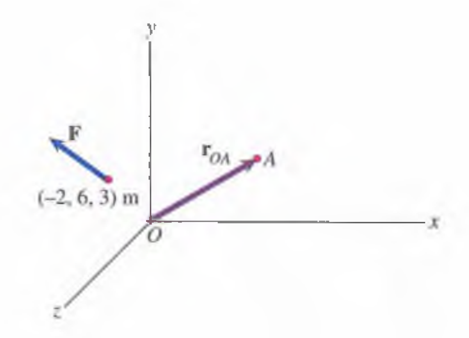
P4.88

4.89 La tensión en el cable AB mostrada es de 2 kN. ¿Cuál es la magnitud del momento respecto al árbol CD debido a la fuerza ejercida por el cable en A? Dibuje un croquis para indicar el sentido del momento respecto al árbol.



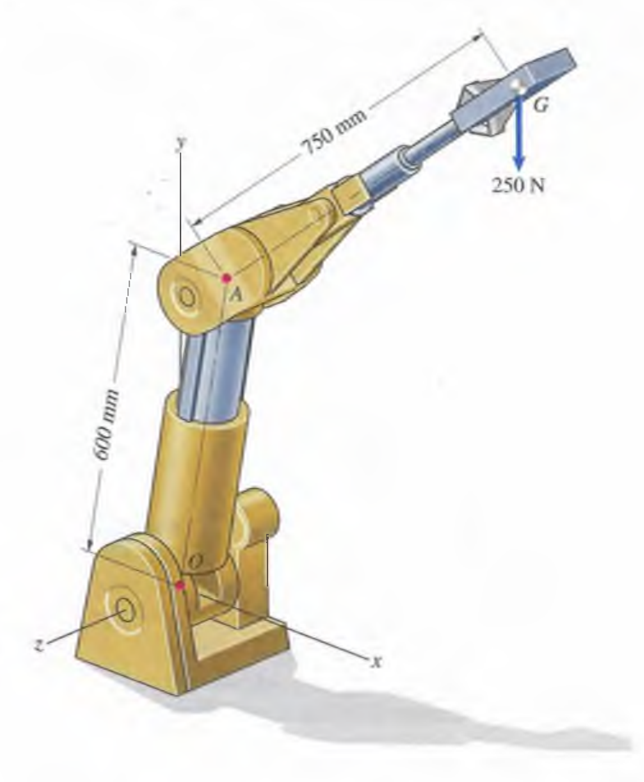
P4.89

4.90 En la figura P4.90 se tiene la fuerza $\mathbf{F} = -100\mathbf{i} + 200\mathbf{j} + 200\mathbf{k}$ (N). El momento de $\mathbf{F}$ respecto a la línea de O a A es $470\mathbf{i} + 315\mathbf{j} + 160\mathbf{k}$ (N-m). ¿Cuáles son los cosenos directores del vector de posición $\mathbf{r}_{OA}$ de O a A?



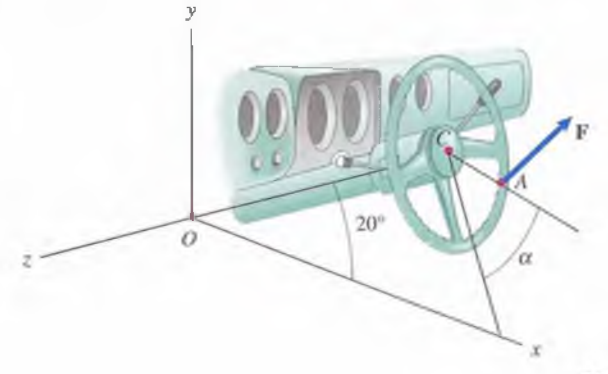
P4.90

4.91 Los cosenos directores de la línea central OA son $\cos\theta_x = 0.500$, $\cos\theta_y = 0.866$ y $\cos\theta_z = 0$, y los de AG son $\cos\theta_x = 0.707$, $\cos\theta_y = 0.619$ y $\cos\theta_z = -0.342$. ¿Cuál es el momento respecto a OA debido al peso de 250 N? En un croquis, indique el sentido del momento respecto al eje.



P4.91

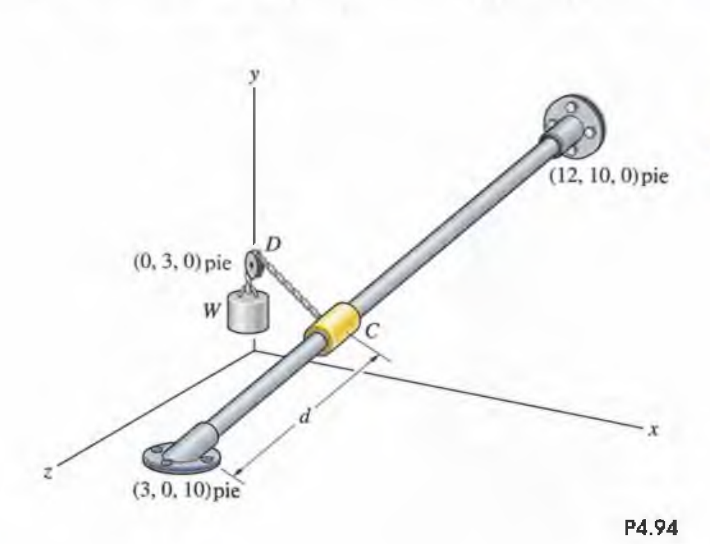
4.92 El radio de la rueda del volante mide 200 mm. La distancia de O a C es de 1 m. El centro C de la rueda del volante se encuentra en el plano x-y. El conductor ejerce una fuerza $\mathbf{F} = 10\mathbf{i} + 10\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$ (N) sobre la rueda en A. Si el ángulo $\alpha = 0$, ¿cuál es la magnitud del momento respecto al eje OC? Con un croquis indique el sentido del momento respecto al eje.



P4.92

4.93 Considere la rueda del volante del problema 4.92. Determine el momento de **F** respecto al eje *OC* de la rueda del volante si $\alpha = 30°$. Dibuje un croquis para indicar el sentido del momento respecto al eje.

4.94 En la figura, el peso *W* causa una tensión de 100 lb en el cable *CD*. Si $d = 2$ pies, ¿cuál es el momento respecto al eje *z* debido a la fuerza ejercida por el cable *CD* en el punto *C*?



P4.94

4.95 La barra *AB* mostrada soporta la cubierta abierta del automóvil. La fuerza ejercida por la barra sobre la cubierta en *B* es paralela a la barra. Si la barra debe ejercer un momento de 100 lb-pie respecto al eje *x* para soportar la cubierta y la distancia *d* es de 2 pies, ¿cuál es la magnitud de la fuerza que la barra debe ejercer sobre la cubierta?



P4.95

4.4 Pares

Ahora que usted ya ha visto cómo calcular el momento debido a una fuerza, considere esta pregunta: ¿es posible ejercer un momento sobre un cuerpo sin someterlo a una fuerza neta? La respuesta es afirmativa y sucede siempre que se toca un disco compacto, se pone en marcha el rotor de un motor eléctrico o se aprieta un tornillo con un destornillador. Sobre esos cuerpos se ejercen fuerzas, pero en una forma tal que la fuerza neta es nula mientras que el momento neto no lo es.

Dos fuerzas que tienen igual magnitud, direcciones opuestas y líneas de acción diferentes se denominan **par** (Fig. 4.25a). Un par tiende a generar rotaciones aun cuando la suma vectorial de las fuerzas sea nula, y tiene la notable propiedad de que el momento que ejerce es el mismo respecto a cualquier punto.

El momento de un par es simplemente la suma de los momentos de las fuerzas respecto a un punto *O* (Fig. 4.25b):

$$\mathbf{M} = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F} + \mathbf{r}_2 \times (-\mathbf{F}) = (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \times \mathbf{F}.$$

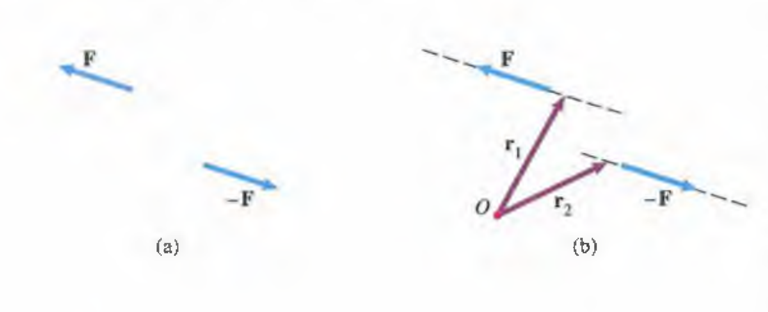
El vector $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ es igual al vector $\mathbf{r}$ mostrado en la figura 4.25(c), por lo que podemos expresar el momento como

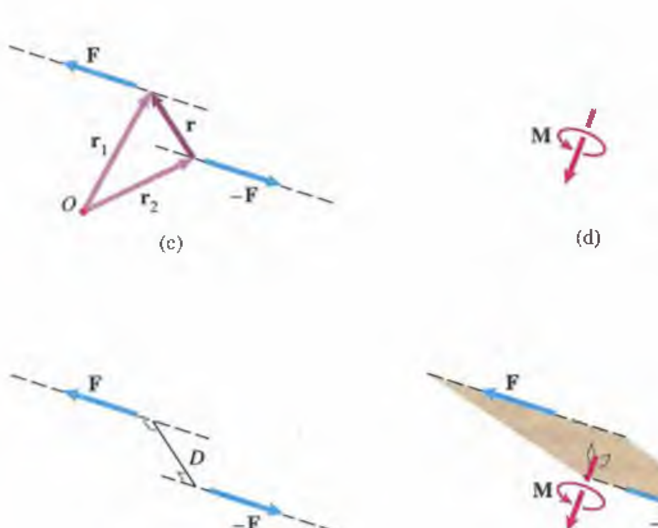
$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}.$$

Como $\mathbf{r}$ no depende de la posición de O, el momento $\mathbf{M}$ es el mismo para *cualquier* punto O.

Debido a que un par ejerce un momento pero la suma de las fuerzas es nula, se suele representar en los diagramas simplemente el momento (Fig. 4.25d). Como el gato Cheshire en *Alicia en el país de las maravillas*, que desaparece excepto su sonrisa, las fuerzas no aparecen; sólo se ve el momento que ejercen. Sin embargo, reconocemos el origen del momento al referirnos a él como **momento de un par** o simplemente **par**.

Observe en la figura 4.25(c) que $\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$ es el momento de $\mathbf{F}$ respecto a un punto sobre la línea de acción de la fuerza $-\mathbf{F}$. La magnitud del momento de una fuerza respecto a un punto es igual al producto de la magnitud de la fuerza y la distancia perpendicular del punto a la línea de acción de la fuerza, es decir, $|\mathbf{M}| = D|\mathbf{F}|$, donde D es la distancia perpendicular entre las líneas de acción de las dos fuerzas (Fig. 4.25e). El producto cruz $\mathbf{r} \times \mathbf{F}$ es perpendicular a $\mathbf{r}$ y a $\mathbf{F}$, lo cual implica que $\mathbf{M}$ es perpendicular al plano que contiene a $\mathbf{F}$ y a $-\mathbf{F}$ (Fig. 4.25f). Si el pulgar de la mano derecha apunta hacia $\mathbf{M}$, los arcos de los dedos indican el sentido del momento.





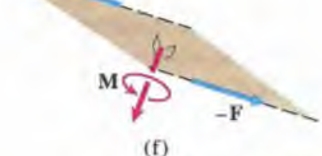


Figura 4.25

(a) Un par.
(b) Determinación del momento respecto a O.
(c) Vector $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$.
(d) Representación del momento del par.
(e) La distancia D entre las líneas de acción.
(f) $\mathbf{M}$ es perpendicular al plano que contiene $\mathbf{F}$ y $-\mathbf{F}$.

En la figura 4.26(a) la visual es perpendicular al plano que contiene las dos fuerzas. La distancia entre las líneas de acción de las fuerzas es de 4 m: la magnitud del momento del par es $|\mathbf{M}| = (4\text{ m})(2\text{ kN}) = 8$ kN-m. El momento **M** es perpendicular al plano que contiene las dos fuerzas. Con el arco de los dedos de la mano derecha indicando el sentido antihorario, encontramos que la regla de la mano derecha señala que **M** apunta hacia afuera de la página. Por tanto, el momento del par es

$$\mathbf{M} = 8\,\mathbf{k}\ \ (\text{kN-m}).$$

Podemos también determinar el momento del par calculando la suma de los momentos de las dos fuerzas respecto a *cualquier* punto. La suma de los momentos de las fuerzas respecto al origen O es (Fig. 4.26b)

$$\begin{aligned}\mathbf{M} &= \mathbf{r}_1 \times (2\,\mathbf{j}) + \mathbf{r}_2 \times (-2\,\mathbf{j}) \\ &= (7\,\mathbf{i} + 2\,\mathbf{j}) \times (2\,\mathbf{j}) + (3\,\mathbf{i} + 7\,\mathbf{j}) \times (-2\,\mathbf{j}) \\ &= 8\,\mathbf{k}\ \ (\text{kN-m}).\end{aligned}$$

En una situación bidimensional como la de este ejemplo, no es conveniente representar un par mostrando el vector de momento, ya que el vector es perpendicular a la página. En vez de esto, representamos el par mostrando su magnitud y una flecha circular que indica su sentido (Fig. 4.26c).

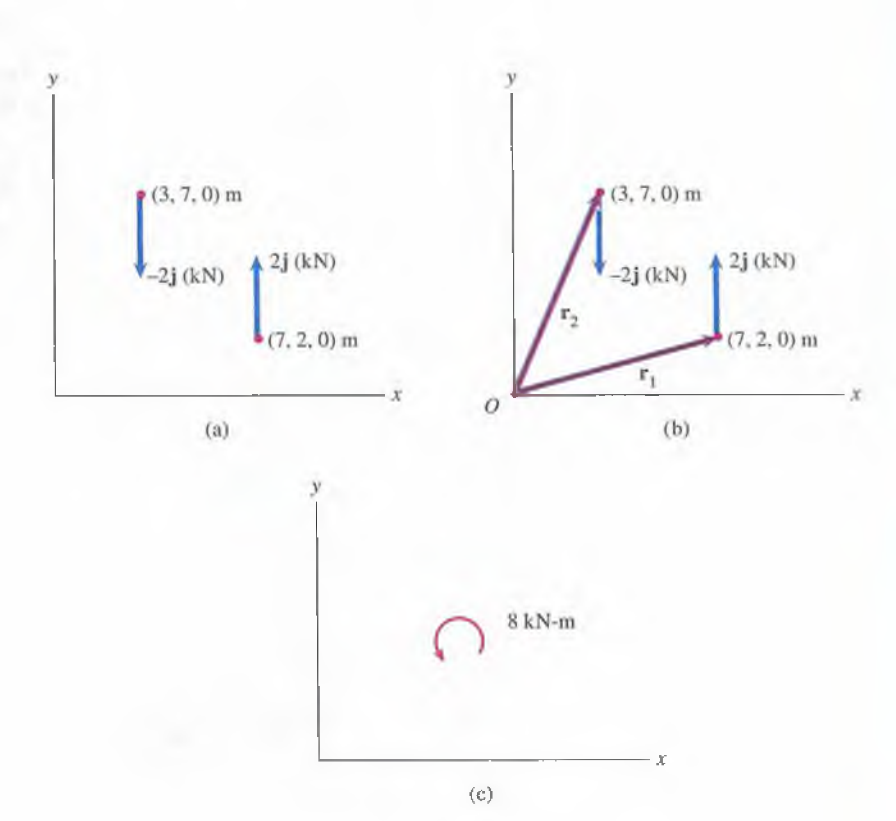
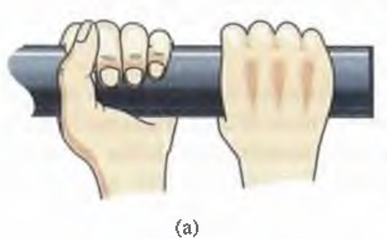
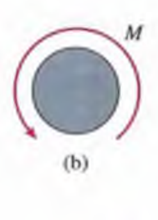


Figura 4.26
(a) Par con fuerzas de 2 kN.
(b) Determinación de la suma de los momentos de las fuerzas respecto a O.
(c) Representación de un par en dos dimensiones.

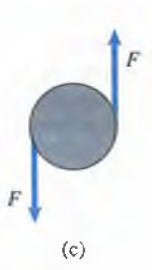
Si se sujeta una barra y se tuerce (Fig. 4.27a), se ejercerá un momento respecto a su eje (Fig. 4.27b). Aunque el sistema de fuerzas sobre la barra está distribuido de manera complicada sobre la superficie, el efecto es el mismo que si se ejercieran dos fuerzas iguales y opuestas (Fig. 4.27c). Al representar un par como en la figura 4.27(b), o mostrar el vector de momento **M**, queda implícito que algún sistema de fuerzas ejerce ese momento. El sistema de fuerzas (como las que se ejercen al torcer la barra, o las fuerzas sobre un cigüeñal que ejerce un momento sobre el árbol motor de un automóvil) suele ser más complicado que dos fuerzas iguales y opuestas, aunque el efecto es el mismo. Por ello, podemos *modelar* el sistema real como un sistema simple de dos fuerzas.



(a)



(b)



(c)

Figura 4.27
(a) Torciendo una barra.
(b) El momento respecto al eje de la barra.
(c) Se obtiene el mismo efecto aplicando dos fuerzas iguales y opuestas.

El momento* M *de un par se puede determinar calculando la suma de los momentos de sus dos fuerzas respecto a cualquier punto. En algunos casos se puede también determinar con base en dos de sus propiedades: la magnitud de* M *es igual al producto de la magnitud de una de las fuerzas y la distancia perpendicular entre las líneas de acción de las fuerzas, y la dirección de* M *es perpendicular al plano que contiene las líneas de acción. En los siguientes ejemplos se demuestran ambos métodos de cálculo.

Ejemplo 4.9

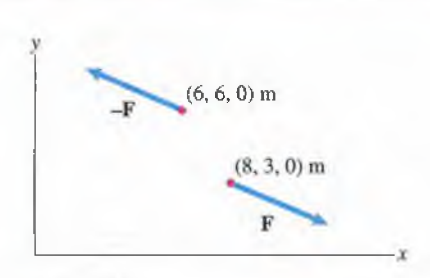


Figura 4.28

La fuerza **F** de la figura 4.28 es 10**i** − 4**j** (N). Determine el momento del par y represéntelo como se muestra en la figura 4.27(b).

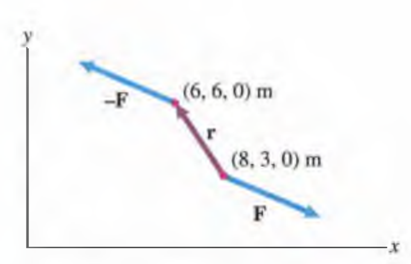
ESTRATEGIA

Existen dos métodos para determinar el momento:

1. *Primer método*. Podemos calcular la suma de los momentos de las fuerzas respecto a un punto.
2. *Segundo método*. Podemos sumar los momentos de los dos pares formados por las componentes x y y de las fuerzas.

SOLUCIÓN

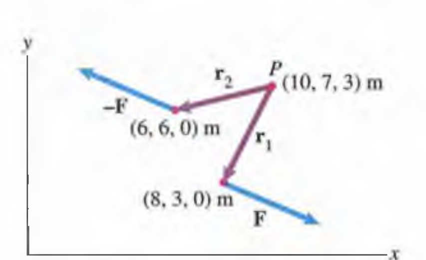
Primer método Si calculamos la suma de los momentos de las fuerzas respecto a un punto sobre la línea de acción de una de las fuerzas, el momento de esa fuerza es cero y sólo necesitamos calcular el momento de la otra fuerza. Escogiendo el punto de aplicación de **F** (Fig. a), calculamos el momento como



(a) Determinación del momento respecto al punto de aplicación de **F**.

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times (-\mathbf{F}) = (-2\,\mathbf{i} + 3\,\mathbf{j}) \times (-10\,\mathbf{i} + 4\,\mathbf{j}) = 22\,\mathbf{k} \ \ (\text{N-m}).$$

Resultaría lo mismo calculando la suma de los momentos respecto a cualquier punto. Por ejemplo, la suma de los momentos respecto al punto P es

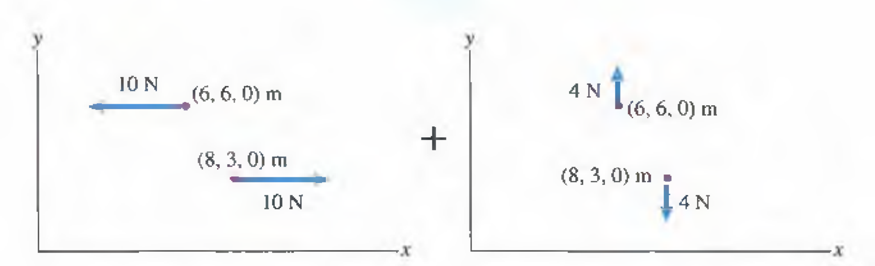


(b) Determinación del momento respecto a P.

$$\mathbf{M} = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F} + \mathbf{r}_2 \times (-\mathbf{F}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -2 & -4 & -3 \\ 10 & -4 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -4 & -1 & -3 \\ -10 & 4 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 22\,\mathbf{k} \ \ (\text{N-m}).$$

Segundo método Las componentes x y y de las fuerzas forman dos pares (Fig. c). Determinamos el momento del par original sumando los momentos de los pares formados por las componentes.



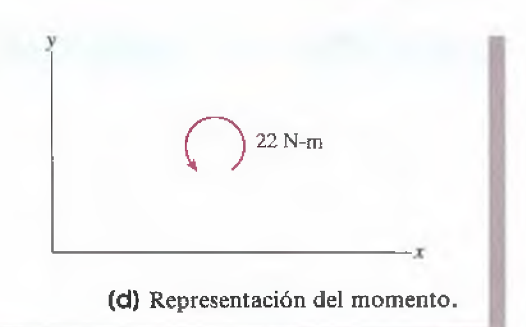
(c) Las componentes x y y forman dos pares.

Sea el par de las fuerzas de 10 N. La magnitud del momento es (3 m) (10 N) = 30 N-m y su sentido es antihorario, o sea que el vector de momento apunta hacia el exterior de la página. Por tanto, el momento es 30 **k** N-m.

El par de las fuerzas de 4 N causa un momento de magnitud (2 m) (4 N) = 8 N-m y su sentido es horario, por lo que el momento es $-8\,\mathbf{k}$ N-m. El momento del par original es

$$\mathbf{M} = 30\,\mathbf{k} - 8\,\mathbf{k} = 22\,\mathbf{k} \quad \text{(N-m)}.$$

Su magnitud es de 22 N-m y su sentido es antihorario (Fig. d).



(d) Representación del momento.

Ejemplo 4.10

Dos fuerzas, A y B, y un par de 200 lb-pie actúan sobre la viga. La suma de las fuerzas es igual a cero, y los momentos respecto al extremo izquierdo de la viga también suman cero. ¿Qué valor tienen las fuerzas A y B?

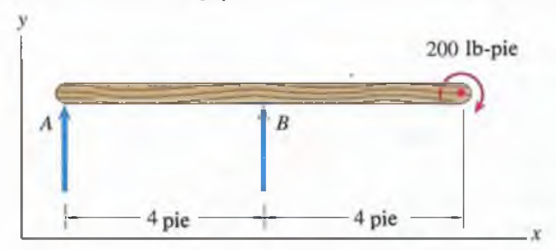


Figura 4.29

SOLUCIÓN

La suma de las fuerzas es

$$\Sigma F_y = A + B = 0.$$

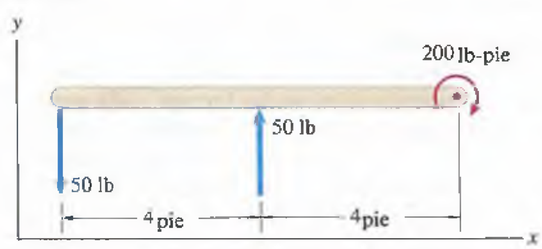
El momento del par (200 lb-pie, horario) es el mismo respecto a cualquier punto, por lo que la suma de los momentos respecto al extremo izquierdo es

$$\Sigma M_{(\text{extremo izquierdo})} = (4)B - 200 = 0.$$

Las fuerzas son $B = 50$ lb y $A = -50$ lb.

COMENTARIO

Observe que A y B forman un par (Fig. a). Éste genera un momento de magnitud (4 pies) (50 lb) = 200 lb-pie y su sentido es antihorario, por lo que la suma de los momentos del par formado por A y B y el par horario de 200 lb-pie es igual a cero.

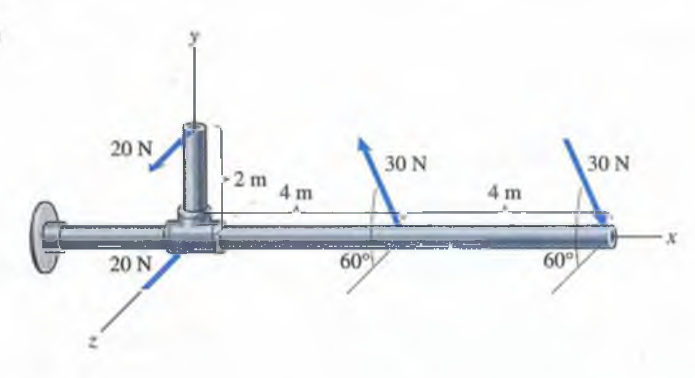


(a) Las fuerzas sobre la viga forman un par.

Ejemplo 4.11

Determine la suma de los momentos ejercidos por los dos pares sobre el tubo de la figura 4.30.

Figura 4.30



SOLUCIÓN

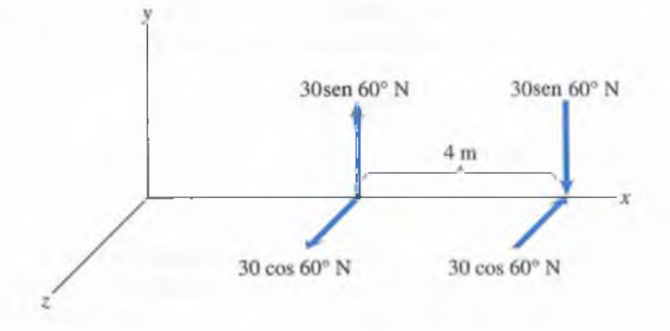
Consideremos el par de 20 N. La magnitud del momento del par es (2 m)(20 N) = 40 N-m. La dirección del vector de momento es perpendicular al plano *y-z*, y la regla de la mano derecha indica que el vector apunta en la dirección positiva del eje *x*. El momento del par de las fuerzas de 20 N es 40**i** (N-m).

Descomponiendo las fuerzas de 30 N en sus componentes *y* y *z*, obtenemos los dos pares mostrados en la figura (a). El momento del par formado por las componentes *y* es −(30 sen 60°) (4)**k** (N-m), y el momento del par formado por las componentes *z* es (30 cos 60°) (4)**j** (N-m).

La suma de los momentos es

$$\Sigma \mathbf{M} = 40\,\mathbf{i} + (30\cos 60^\circ)(4)\,\mathbf{j} - (30\,\text{sen}60^\circ)(4)\,\mathbf{k}$$

$$= 40\,\mathbf{i} + 60\,\mathbf{j} - 103.9\,\mathbf{k} \text{ (N-m).}$$



(a) Descomposición de las fuerzas de 30 N en componentes *y* y *z*.

COMENTARIO

Aunque el método que usamos en este ejemplo ayuda a reconocer las contribuciones de los pares individuales en la suma de los momentos, sólo es conveniente cuando las orientaciones de las fuerzas y sus puntos de aplicación relativos al sistema coordenado son suficientemente simples. Cuando no es éste el caso, la suma de los momentos se puede determinar escogiendo cualquier punto y calculando la suma de los momentos de las fuerzas respecto a ese punto.

Ejemplo 4.12

La fuerza **F** de la figura 4.31 es $-20\mathbf{i} + 20\mathbf{j} + 10\mathbf{k}$ (lb).
(a) ¿Qué momento ejerce el par sobre la ménsula?
(b) ¿Qué valor tiene la distancia D perpendicular entre las líneas de acción de las dos fuerzas?

Figura 4.31

ESTRATEGIA

(a) Podemos escoger un punto y determinar la suma de los momentos de las fuerzas respecto a ese punto.
(b) La magnitud del momento del par es $D|\mathbf{F}|$, por lo que podemos usar el resultado de la parte (a) para determinar D.

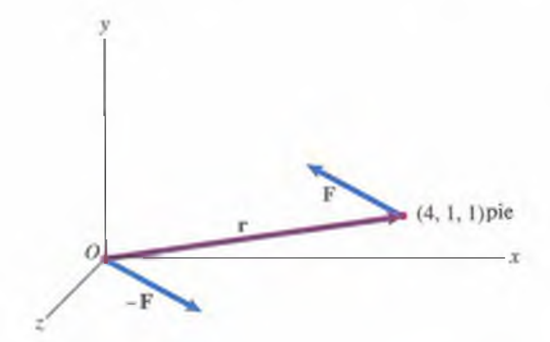
SOLUCIÓN

(a) Si determinamos la suma de los momentos de las fuerzas respecto al origen O, el momento de $-\mathbf{F}$ es igual a cero. El momento del par es (Fig. a)

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 4 & 1 & 1 \\ -20 & 20 & 10 \end{vmatrix} = -10\,\mathbf{i} - 60\,\mathbf{j} + 100\,\mathbf{k} \text{ (lb-pie)}.$$

(b) La distancia perpendicular es

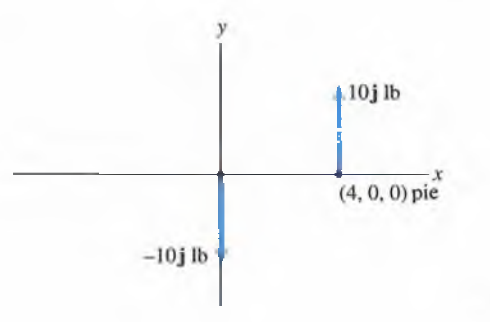
$$D = \frac{|\mathbf{M}|}{|\mathbf{F}|} = \frac{\sqrt{(-10)^2 + (-60)^2 + (100)^2}}{\sqrt{(-20)^2 + (20)^2 + (10)^2}} = 3.90 \text{ pie}.$$



(a) Determinación de la suma de los momentos respecto a O.

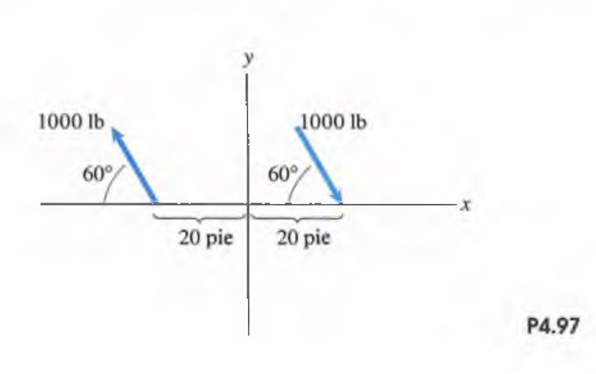
Problemas

4.96 (a) Determine el momento del par mostrado en la figura P4.96.
(b) ¿Qué valor tiene la suma de los momentos de las dos fuerzas respecto al punto (−4, 6, −2) pies?
(c) Represente el par como se muestra en la figura 4.26(c).



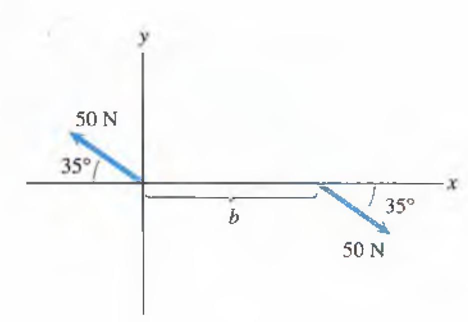
P4.96

4.97 Las fuerzas de la figura P4.97 están contenidas en el plano x-y.
(a) Determine el momento del par.
(b) ¿Qué valor tiene la suma de los momentos de las dos fuerzas respecto al punto (10, −40, 20) pies?
(c) Represente el par como se muestra en la figura 4.26(c).

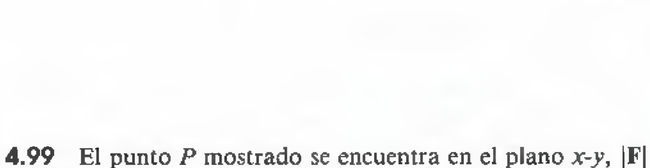


P4.97

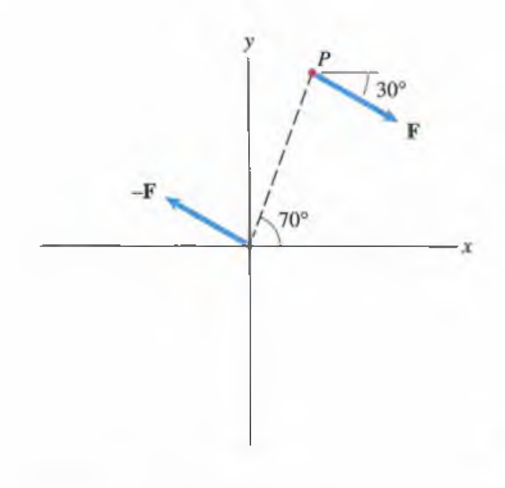
4.98 Las fuerzas de la figura P4.98 están contenidas en el plano x-y, y el momento del par es igual a $-90\,\mathbf{k}$ N-m.
(a) ¿Qué valor tiene la distancia b?
(b) ¿Qué valor tiene la suma de los momentos de las dos fuerzas respecto al punto (3, 3, −2) m?



P4.98

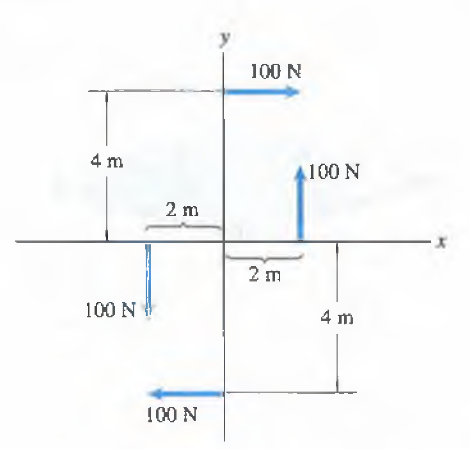


4.99 El punto P mostrado se encuentra en el plano x-y, $|\mathbf{F}| = 100$ N, y el momento del par es de $-500\,\mathbf{k}$ (N-m). ¿Cuáles son las coordenadas de P?



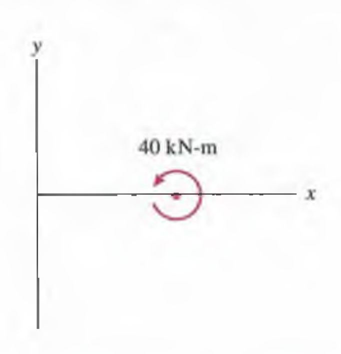
P4.99

4.100 Las fuerzas están contenidas en el plano x-y.
(a) Determine la suma de los momentos de los dos pares.
(b) ¿Cuál es la suma de los momentos de las cuatro fuerzas respecto al punto (−6, −6, 2) m?
(c) Represente el resultado de la parte (a) como se muestra en la figura 4.26(c).



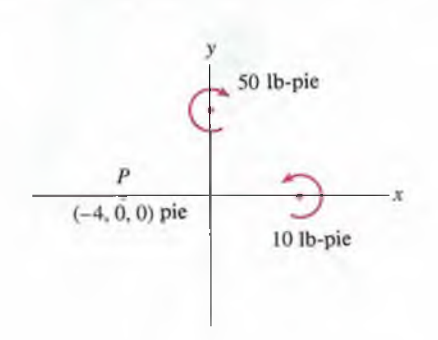
P4.100

4.101 El momento de un par es de 40 kN-m en sentido antihorario.
(a) Exprese el momento del par como un vector.
(b) Dibuje un croquis que muestre dos fuerzas iguales y opuestas que ejerzan el momento dado.



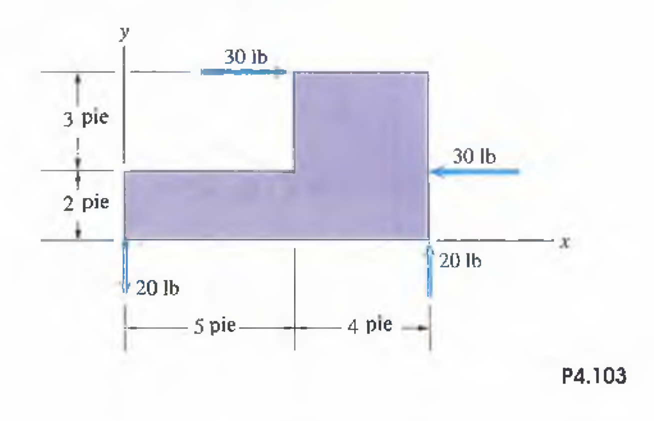
P4.101

4.102 Se muestran los momentos de dos pares. ¿Qué valor tiene la suma de los momentos respecto al punto P?



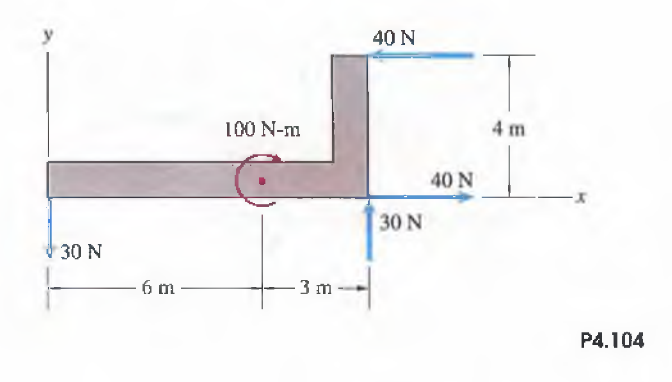
P4.102

4.103 Determine la suma de los momentos ejercidos por los dos pares sobre la placa que se muestra.



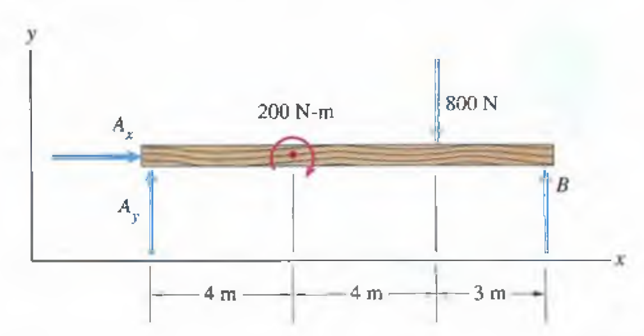
P4.103

4.104 En la figura P4.104, ¿qué valor tiene la suma de los momentos ejercidos sobre el cuerpo?



P4.104

4.105 Cuatro fuerzas y un par actúan sobre la viga mostrada. La suma vectorial de las fuerzas es igual a cero, y la suma de los momentos respecto al extremo izquierdo de la viga también es cero. ¿Qué valor tienen las fuerzas A_x, A_y y B?

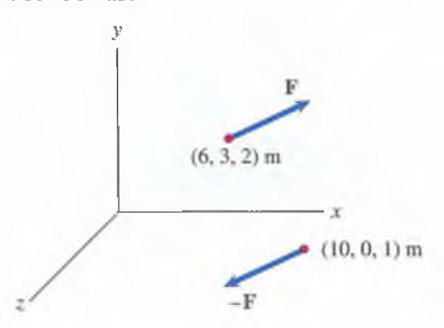


P4.105

4.106 En la figura P4.106 se tiene la fuerza $\mathbf{F} = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$ (kN).

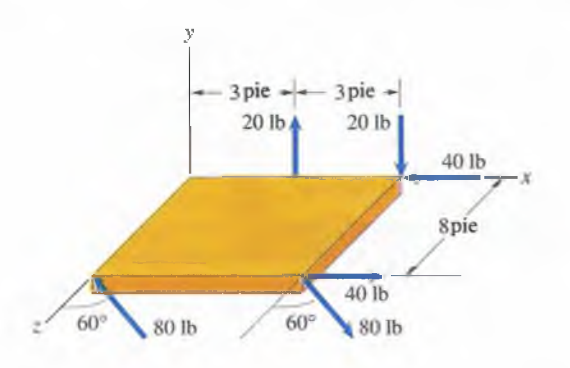
(a) ¿Cuál es el momento del par?

(b) ¿Cuál es la distancia perpendicular entre las líneas de acción de las dos fuerzas?



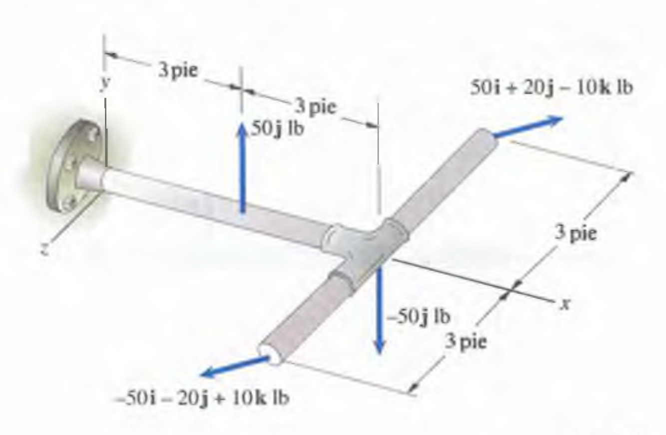
P4.106

4.107 Determine la suma de los momentos ejercidos por los tres pares sobre la placa que se muestra. (Las fuerzas de 80 lb están contenidas en el plano x-z.)



P4.107

4.108 ¿Cuál es la magnitud de la suma de los momentos ejercidos por los dos pares sobre el dispositivo en forma de T que se muestra en la figura?

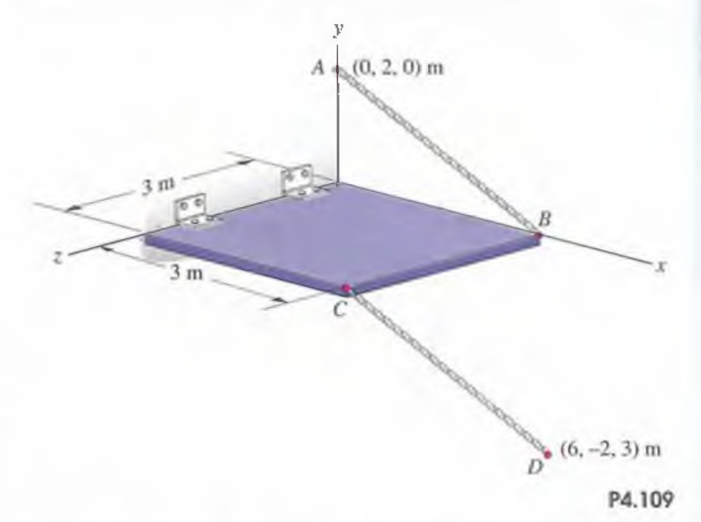


P4.108

4.109 La tensión en los cables AB y CD es de 500 N.

(a) Demuestre que las dos fuerzas ejercidas por los cables sobre la compuerta rectangular en B y en C forman un par.

(b) ¿Cuál es el momento ejercido por los cables?



P4.109

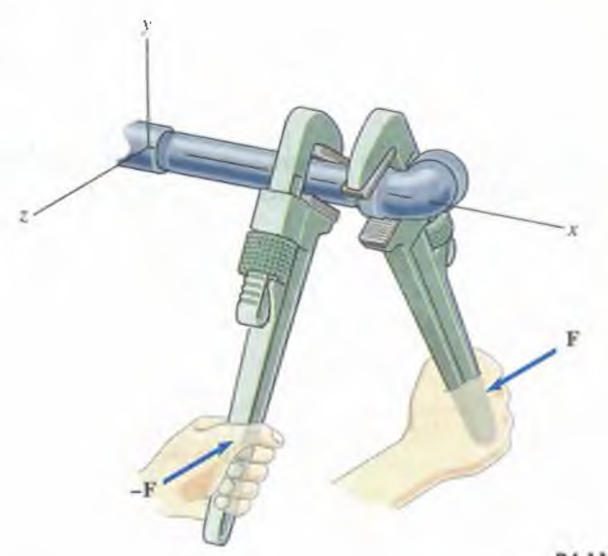
4.110 Considere el sistema mostrado en el problema 4.109. Las tensiones en los cables AB y CD son iguales, y la magnitud del momento ejercido sobre la compuerta por los cables es de 6 kN-m. ¿Cuál es la tensión en los cables?

4.111 Se usan dos llaves para apretar un codo hidráulico. La fuerza $\mathbf{F} = 10\,\mathbf{k}$ (lb) se aplica en (6, −5, −3) pulg y la fuerza $-\mathbf{F}$ se aplica en (4, −5, 3) pulg.

(a) Determine el momento respecto al eje x de la fuerza ejercida sobre la llave derecha.

(b) Determine el momento del par formado por las fuerzas que se ejercen sobre las dos llaves.

(c) Con base en esos resultados, explique por qué se usan dos llaves.



P4.111

4.5 Sistemas equivalentes

Un **sistema de fuerzas y momentos** es simplemente un conjunto particular de fuerzas y momentos de pares. Los sistemas de fuerzas y momentos propios de la ingeniería pueden ser complicados. En especial, esto ocurre cuando se tienen fuerzas distribuidas, como las fuerzas de presión ejercidas por el agua sobre una presa. Pero si sólo nos interesan la fuerza total y el momento total ejercidos, un sistema complicado de fuerzas y momentos se puede representar con un sistema mucho más sencillo.

Definimos los dos sistemas, 1 y 2, como **equivalentes** si las sumas de las fuerzas son iguales,

$$(\Sigma \mathbf{F})_1 = (\Sigma \mathbf{F})_2,$$

y si las sumas de los momentos respecto a un punto O son también iguales,

$$(\Sigma \mathbf{M}_0)_1 = (\Sigma \mathbf{M}_0)_2.$$

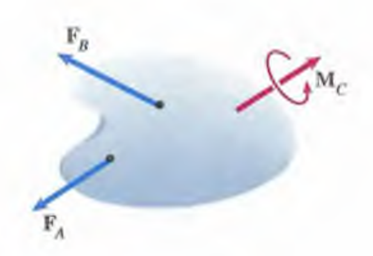
Demostraremos que si las sumas de las fuerzas y las sumas de los momentos respecto a un punto son iguales, las sumas de los momentos respecto a *cualquier* punto también son iguales.

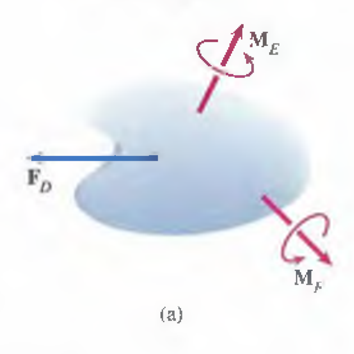
Comenzaremos con una ilustración de esas condiciones. Consideremos los sistemas de fuerzas y momentos de la figura 4.32(a). En el sistema 1, un cuerpo está sometido a las fuerzas $\mathbf{F}_A$ y $\mathbf{F}_B$ y a un par $\mathbf{M}_C$. En el sistema 2, el cuerpo está sometido a la fuerza $\mathbf{F}_D$ y a dos pares $\mathbf{M}_E$ y $\mathbf{M}_F$. La primera condición de equivalencia es

$$(\Sigma \mathbf{F})_1 = (\Sigma \mathbf{F})_2 : \qquad \mathbf{F}_A + \mathbf{F}_B = \mathbf{F}_D. \tag{4.7}$$

Si determinamos las sumas de los momentos respecto al punto O de la figura 4.32(b), la segunda condición de equivalencia es

$$(\Sigma \mathbf{M}_0)_1 = (\Sigma \mathbf{M}_0)_2 : \qquad \mathbf{r}_A \times \mathbf{F}_A + \mathbf{r}_B \times \mathbf{F}_B + \mathbf{M}_C = \mathbf{r}_D \times \mathbf{F}_D + \mathbf{M}_E + \mathbf{M}_F. \tag{4.8}$$





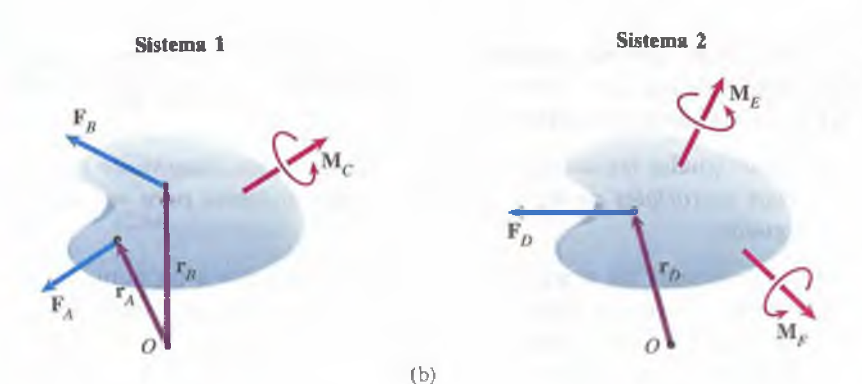


Figura 4.32
(a) Diferentes sistemas de fuerzas y momentos aplicados a un objeto.
(b) Determinación de la suma de los momentos respecto a un punto O en cada sistema.

Si estas condiciones se satisfacen, podemos elegir otro punto O' (Fig. 4.33) y demostrar que las sumas de los momentos respecto a O' también son iguales. Es decir, podemos demostrar que

$$(\Sigma \mathbf{M}_{O'})_1 = (\Sigma \mathbf{M}_{O'})_2 :$$

$$\mathbf{r}'_A \times \mathbf{F}_A + \mathbf{r}'_B \times \mathbf{F}_B + \mathbf{M}_C = \mathbf{r}'_D \times \mathbf{F}_D + \mathbf{M}_E + \mathbf{M}_F. \quad (4.9)$$

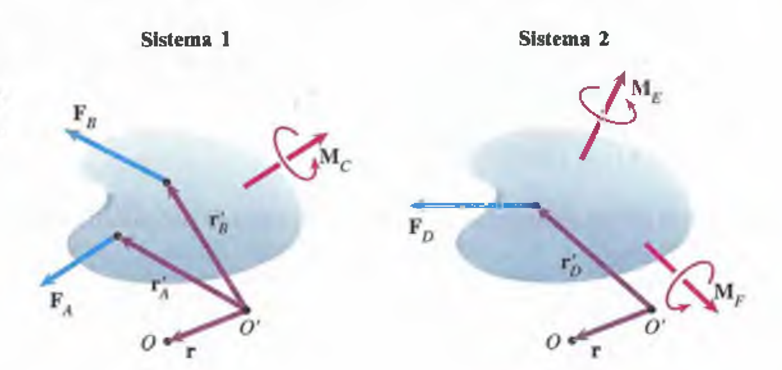


Figura 4.33
Determinación de la suma de los momentos respecto a un punto diferente O' en cada sistema.

En función del vector $\mathbf{r}$ de O' a O, las relaciones entre los vectores $\mathbf{r}_A'$, $\mathbf{r}_B'$ y $\mathbf{r}_D'$ de la figura 4.33 y los vectores $\mathbf{r}_A$, $\mathbf{r}_B$ y $\mathbf{r}_D$ de la figura 4.32(b) son

$$\mathbf{r}'_A = \mathbf{r} + \mathbf{r}_A, \qquad \mathbf{r}'_B = \mathbf{r} + \mathbf{r}_B, \qquad \mathbf{r}'_D = \mathbf{r} + \mathbf{r}_D.$$

Sustituyendo estas expresiones en la ecuación (4.9) obtenemos

$$(\mathbf{r} + \mathbf{r}_A) \times \mathbf{F}_A + (\mathbf{r} + \mathbf{r}_B) \times \mathbf{F}_B + \mathbf{M}_C$$
$$= (\mathbf{r} + \mathbf{r}_D) \times \mathbf{F}_D + \mathbf{M}_E + \mathbf{M}_F.$$

Reordenando términos podemos escribir esta ecuación como

$$\mathbf{r} \times (\Sigma \mathbf{F})_1 + (\Sigma \mathbf{M}_O)_1 = \mathbf{r} \times (\Sigma \mathbf{F})_2 + (\Sigma \mathbf{M}_O)_2,$$

que se cumple en vista de las ecuaciones (4.7) y (4.8). Las sumas de los momentos de los dos sistemas respecto a cualquier punto son iguales.

Los siguientes ejemplos demuestran cómo se puede determinar si sistemas dados de fuerzas y momentos son equivalentes. Se deben verificar las dos condiciones de equivalencia:

1. ¿Son iguales las sumas de las fuerzas? *Se deben determinar las sumas vectoriales de las fuerzas en los dos sistemas para ver si son iguales.*
2. ¿Son iguales las sumas de los momentos respecto a un punto arbitrario? *Se puede elegir cualquier punto conveniente y determinar las sumas de los momentos de los dos sistemas respecto a ese punto para ver si son iguales.*

Ejemplo 4.13

Tres sistemas de fuerzas y momentos actúan sobre la viga de la figura 4.34. ¿Son tales sistemas equivalentes?

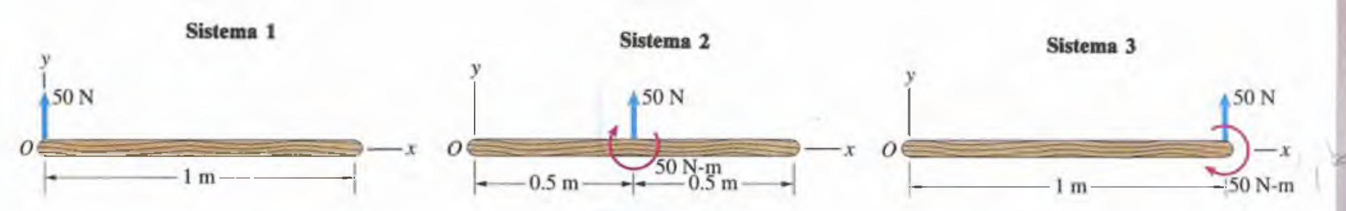


Figura 4.34

SOLUCIÓN

¿Son iguales las sumas de las fuerzas? Las sumas de las fuerzas son

$$(\Sigma \mathbf{F})_1 = 50\mathbf{j} \ \text{(N)},$$

$$(\Sigma \mathbf{F})_2 = 50\mathbf{j} \ \text{(N)},$$

$$(\Sigma \mathbf{F})_3 = 50\mathbf{j} \ \text{(N)}.$$

¿Son iguales las sumas de los momentos respecto a un punto arbitrario? Las sumas de los momentos respecto al origen O son

$$(\Sigma M_0)_1 = 0,$$

$$(\Sigma M_0)_2 = (50 \text{ N})(0.5 \text{ m}) - (50 \text{ N-m}) = -25 \text{ N-m},$$

$$(\Sigma M_0)_3 = (50 \text{ N})(1 \text{ m}) - (50 \text{ N-m}) = 0.$$

Los sistemas 1 y 3 son equivalentes.

COMENTARIO

Recuerde que puede escoger cualquier punto conveniente para determinar si las sumas de los momentos son iguales. Por ejemplo, las sumas de los momentos respecto al extremo derecho de la viga son

$$(\Sigma M_{\text{extremo derecho}})_1 = -(50 \text{ N})(1 \text{ m}) = -50 \text{ N-m},$$

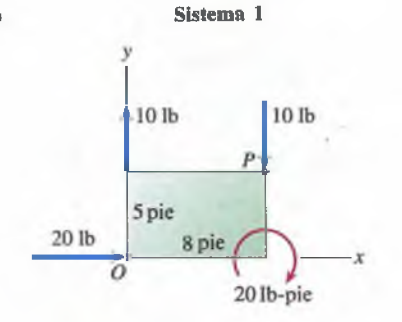
$$(\Sigma M_{\text{extremo derecho}})_2 = -(50 \text{ N})(0.5 \text{ m}) - (50 \text{ N-m}) = -75 \text{ N-m},$$

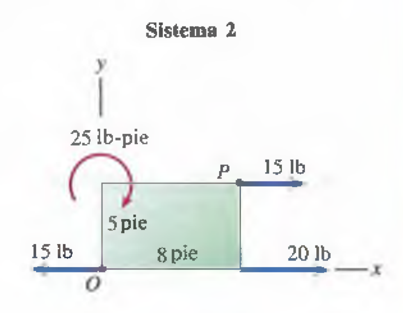
$$(\Sigma M_{\text{extremo derecho}})_3 = -50 \text{ N-m}.$$

Ejemplo 4.14

Dos sistemas de fuerzas y momentos actúan sobre la placa rectangular de la figura 4.35. ¿Son tales sistemas equivalentes?

Figura 4.35





SOLUCIÓN

¿Son iguales las sumas de las fuerzas? Las sumas de las fuerzas son

$$(\Sigma \mathbf{F})_1 = 20\mathbf{i} + 10\mathbf{j} - 10\mathbf{j} = 20\mathbf{i} \text{ (lb)},$$

$$(\Sigma \mathbf{F})_2 = 20\mathbf{i} + 15\mathbf{i} - 15\mathbf{i} = 20\mathbf{i} \text{ (lb)},$$

¿Son iguales las sumas de los momentos respecto a un punto arbitrario? Las sumas de los momentos respecto al origen O son

$$(\Sigma M_0)_1 = -(8 \text{ pie})(10 \text{ lb}) - (20 \text{ lb-pie}) = -100 \text{ lb-pie},$$

$$(\Sigma M_0)_2 = -(5 \text{ pie})(15 \text{ lb}) - (25 \text{ lb-pie}) = -100 \text{ lb-pie}.$$

Los sistemas son equivalentes.

COMENTARIO

Verifiquemos que las sumas de los momentos de los dos sistemas respecto a puntos diferentes sean iguales. Las sumas de los momentos respecto a P son

$$(\Sigma M_P)_1 = -(8 \text{ pie})(10 \text{ lb}) + (5 \text{ pie})(20 \text{ lb}) - (20 \text{ lb-pie}) = 0,$$

$$(\Sigma M_P)_2 = -(5 \text{ pie})(15 \text{ lb}) + (5 \text{ pie})(20 \text{ lb}) - (25 \text{ lb-pie}) = 0.$$

Ejemplo 4.15

En la figura 4.36 se muestran dos sistemas de fuerzas y momentos en los que

$$\mathbf{F}_A = -10\,\mathbf{i} + 10\,\mathbf{j} - 15\,\mathbf{k} \quad \text{(kN)},$$

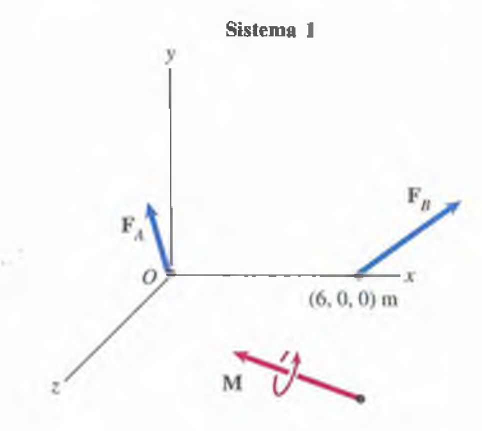
$$\mathbf{F}_B = 30\,\mathbf{i} + 5\,\mathbf{j} + 10\,\mathbf{k} \quad \text{(kN)},$$

$$\mathbf{M} = -90\,\mathbf{i} + 150\,\mathbf{j} + 60\,\mathbf{k} \quad \text{(kN-m)},$$

$$\mathbf{F}_C = 10\,\mathbf{i} - 5\,\mathbf{j} + 5\,\mathbf{k} \quad \text{(kN)},$$

$$\mathbf{F}_D = 10\,\mathbf{i} + 20\,\mathbf{j} - 10\,\mathbf{k} \quad \text{(kN)}.$$

¿Son tales sistemas equivalentes?



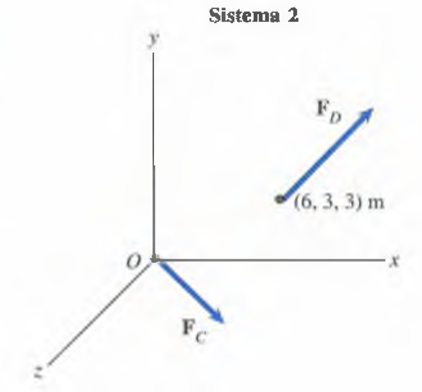


Figura 4.36

SOLUCIÓN

¿Son iguales las sumas de las fuerzas? Las sumas de las fuerzas son

$$(\Sigma\mathbf{F})_1 = \mathbf{F}_A + \mathbf{F}_B = 20\,\mathbf{i} + 15\,\mathbf{j} - 5\,\mathbf{k} \quad \text{(kN)},$$

$$(\Sigma\mathbf{F})_2 = \mathbf{F}_C + \mathbf{F}_D = 20\,\mathbf{i} + 15\,\mathbf{j} - 5\,\mathbf{k} \quad \text{(kN)}.$$

¿Son iguales las sumas de los momentos respecto a un punto arbitrario? La suma de los momentos respecto al origen O en el sistema 1 es

$$(\Sigma\mathbf{M}_0)_1 = (6\,\mathbf{i}) \times \mathbf{F}_B + \mathbf{M} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 6 & 0 & 0 \\ 30 & 5 & 10 \end{vmatrix}$$

$$+ (-90\,\mathbf{i} + 150\,\mathbf{j} + 60\,\mathbf{k})$$

$$= -90\,\mathbf{i} + 90\,\mathbf{j} + 90\,\mathbf{k} \quad \text{(kN-m)}.$$

La suma de los momentos respecto a O en el sistema 2 es

$$(\Sigma\mathbf{M}_0)_2 = (6\,\mathbf{i} + 3\,\mathbf{j} + 3\,\mathbf{k}) \times \mathbf{F}_D = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 6 & 3 & 3 \\ 10 & 20 & -10 \end{vmatrix}$$

$$= -90\,\mathbf{i} + 90\,\mathbf{j} + 90\,\mathbf{k} \quad \text{(kN-m)}.$$

Los sistemas son equivalentes.

4.6 Representación de sistemas con sistemas equivalentes

Si sólo nos interesan la fuerza y el momento totales ejercidos sobre un cuerpo por un sistema dado de fuerzas y momentos, este sistema se puede **representar** con uno equivalente. Con esto queremos decir que en vez de mostrar las fuerzas y los momentos reales que actúan sobre un cuerpo, podemos mostrar un sistema diferente que ejerza la misma fuerza y el mismo momento totales. De esta manera, un sistema dado se reemplazaría por otro menos complicado para simplificar el análisis de las fuerzas y momentos que actúan sobre el cuerpo, así como para comprender mejor sus efectos sobre el cuerpo.

Representación de un sistema por medio de una fuerza y un par

Consideremos un sistema arbitrario de fuerzas y momentos y un punto O (sistema 1 de la Fig. 4.37). Este sistema se puede representar con otro sistema que consista en una sola fuerza actuando en O y un solo par (sistema 2). Las condiciones de equivalencia

$$(\Sigma \mathbf{F})_2 = (\Sigma \mathbf{F})_1 :$$

$$\mathbf{F} = (\Sigma \mathbf{F})_1$$

y

$$(\Sigma \mathbf{M}_0)_2 = (\Sigma \mathbf{M}_0)_1 :$$

$$\mathbf{M} = (\Sigma \mathbf{M}_0)_1,$$

se satisfacen si $\mathbf{F}$ es igual a la suma de las fuerzas del sistema 1 y $\mathbf{M}$ es igual a la suma de los momentos respecto a O en el sistema 1.

No importa la complejidad de un sistema de fuerzas y momentos; siempre se podrá representar con una sola fuerza actuando en cierto punto y un solo par. En la práctica se presentan tres casos particulares:

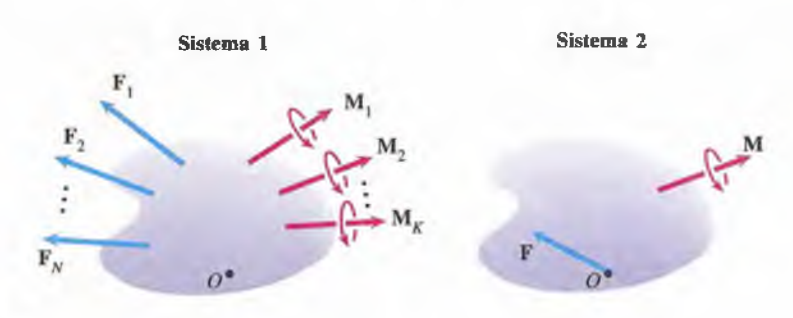


Figura 4.37
(a) Sistema arbitrario de fuerzas y momentos.
(b) Una fuerza actuando en O y un par.

Representación de una fuerza con una fuerza y un par Una fuerza $\mathbf{F}_P$ se puede representar actuando en un punto P (sistema 1), por medio de una fuerza $\mathbf{F}$ actuando en un punto O diferente y un par $\mathbf{M}$ (sistema 2). El momento del sistema 1 respecto al punto O es $\mathbf{r} \times \mathbf{F}_P$, donde $\mathbf{r}$ es el vector de O a P (b). Las condiciones de equivalencia son

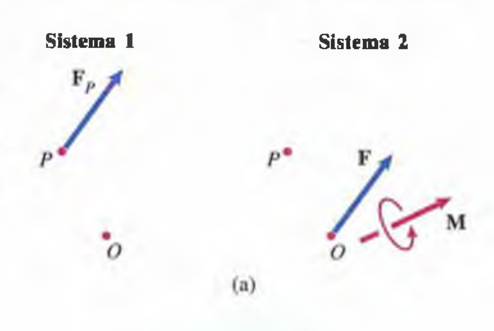
$$(\Sigma\mathbf{F})_2 = (\Sigma\mathbf{F})_1 :$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_P$$

y

$$(\Sigma\mathbf{M}_0)_2 = (\Sigma\mathbf{M}_0)_1 :$$

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}_P.$$



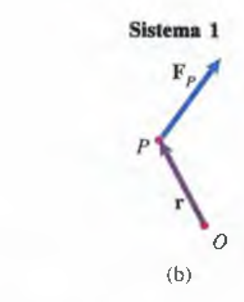


Figura 4.38
(a) El sistema 1 es una fuerza $\mathbf{F}_P$ que actúa en el punto P. El sistema 2 consiste en una fuerza $\mathbf{F}$ que actúa en el punto O y un par $\mathbf{M}$. (b) Determinación del momento del sistema 1 respecto al punto O.

Fuerzas concurrentes representadas por una fuerza Un sistema de fuerzas concurrentes cuyas líneas de acción se corten en un punto O (sistema 1, Fig. 4.39) se puede representar con una sola fuerza cuya línea de acción corte a O (sistema 2). Las dos sumas de las fuerzas son iguales si

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \cdots + \mathbf{F}_N$$

y la suma de los momentos respecto a O es nula en cada sistema.

Fuerzas paralelas representadas por una fuerza Un sistema de fuerzas paralelas cuya suma no sea cero (como el sistema 1 de la Fig. 4.40) se puede representar por una sola fuerza $\mathbf{F}$ (sistema 2). En el ejemplo 4.19 demostraremos este resultado.

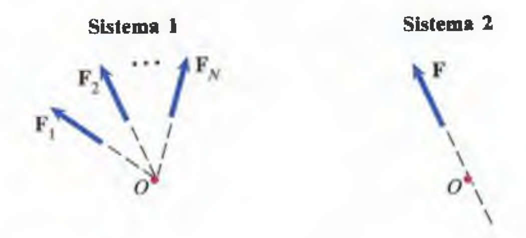


Figura 4.39
Un sistema de fuerzas concurrentes y un sistema que consiste en una sola fuerza $\mathbf{F}$.

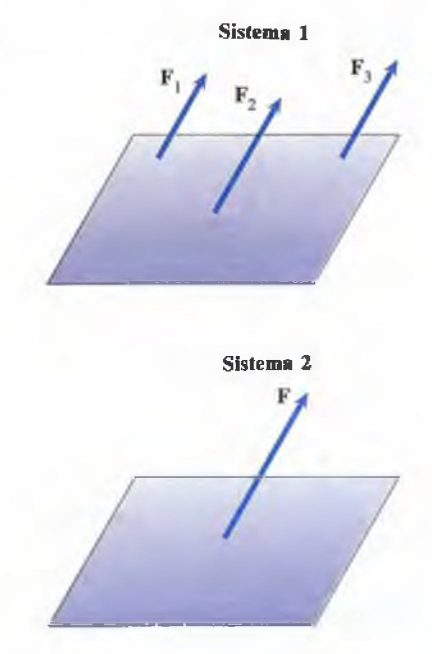


Figura 4.40
Un sistema de fuerzas paralelas y un sistema que consiste en una sola fuerza $\mathbf{F}$.

Los siguientes ejemplos muestran cómo representar sistemas de fuerzas y momentos por medio de otros sistemas. Dado un sistema de fuerzas y momentos, el objetivo será representarlo con un nuevo sistema particular, aplicando las condiciones de equivalencia:

1. Las sumas de las fuerzas deben ser iguales.
2. Las sumas de los momentos respecto a un punto arbitrario deben ser iguales.

Ejemplo 4.16

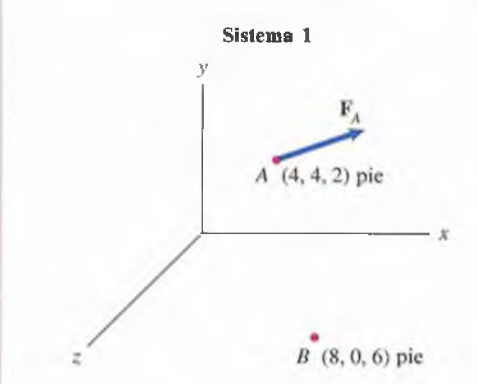


Figura 4.41

El sistema 1 de la figura 4.41 consiste en una fuerza $\mathbf{F}_A = 10\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$ (lb) que actúa en A. Represéntelo con una fuerza que actúe en B y un par.

ESTRATEGIA

Queremos representar la fuerza $\mathbf{F}_A$ con una fuerza $\mathbf{F}$ que actúe en B y un par $\mathbf{M}$ (sistema 2 de la Fig. a). Podemos determinar $\mathbf{F}$ y $\mathbf{M}$ usando las dos condiciones de equivalencia.

SOLUCIÓN

Las sumas de las fuerzas deben ser iguales

$$(\Sigma\mathbf{F})_2 = (\Sigma\mathbf{F})_1 :$$

$$\mathbf{F} \;=\; \mathbf{F}_A = 10\,\mathbf{i} + 4\,\mathbf{j} - 3\,\mathbf{k} \ \text{(lb)}$$

Las sumas de los momentos respecto a un punto arbitrario deben ser iguales El vector de B a A es

$$\mathbf{r}_{BA} = (4-8)\,\mathbf{i} + (4-0)\,\mathbf{j} + (2-6)\,\mathbf{k} = -4\,\mathbf{i} + 4\,\mathbf{j} - 4\,\mathbf{k} \ \text{(pie)},$$

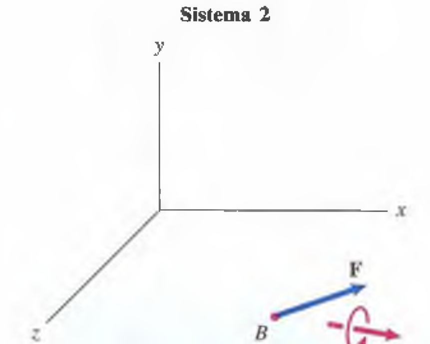
por lo que el momento respecto a B en el sistema 1 es

$$\mathbf{r}_{BA} \times \mathbf{F}_A = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -4 & 4 & -4 \\ 10 & 4 & -3 \end{vmatrix} = 4\,\mathbf{i} - 52\,\mathbf{j} - 56\,\mathbf{k} \ \text{(lb-pie)}.$$

Las sumas de los momentos respecto a B deben ser iguales:

$$(\mathbf{M}_B)_2 = (\mathbf{M}_B)_1 :$$

$$\mathbf{M} \;= 4\,\mathbf{i} - 52\,\mathbf{j} - 56\,\mathbf{k} \ \text{(lb-pie)}.$$



(a) Fuerza actuando en B y un par.

Ejemplo 4.17

El sistema 1 de la figura 4.42 consiste en dos fuerzas y un par que actúan sobre un tubo. Se trata de representar el sistema 1 mediante (a) una sola fuerza que actúe en el origen O del sistema coordenado y un solo par, y (b) una sola fuerza.

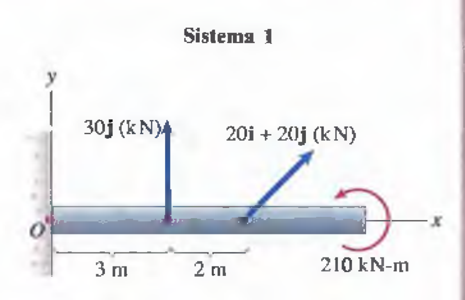


Figura 4.42

ESTRATEGIA

(a) Podemos representar el sistema 1 por medio de una fuerza **F** que actúe en el origen y un par M (sistema 2 de la Fig. a), y utilizar las condiciones de equivalencia para determinar **F** y M. (b) Suponga que colocamos la fuerza **F** con su punto de aplicación a una distancia D del origen a lo largo del eje x (sistema 3 de la Fig. b). Las sumas de las fuerzas en los sistemas 2 y 3 son iguales. Si podemos escoger la distancia D de manera que el momento respecto a O en el sistema 3 sea igual a M, el sistema 3 será equivalente al sistema 2 y por tanto equivalente al sistema 1.



SOLUCIÓN

(a) Las condiciones de equivalencia son

$$(\Sigma \mathbf{F})_2 = (\Sigma \mathbf{F})_1 :$$

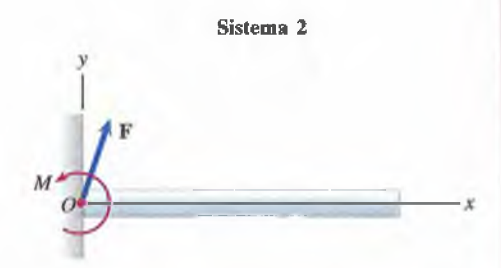
$$\mathbf{F} = 30\,\mathbf{j} + (20\,\mathbf{i} + 20\,\mathbf{j}) = 20\,\mathbf{i} + 50\,\mathbf{j} \ \ (\text{kN}),$$

y

$$(\Sigma M_0)_2 = (\Sigma M_0)_1 :$$

$$M = (30 \text{ kN})(3 \text{ m}) + (20 \text{ kN})(5 \text{ m}) + 210 \text{ kN-m}$$

$$= 400 \text{ kN-m}.$$



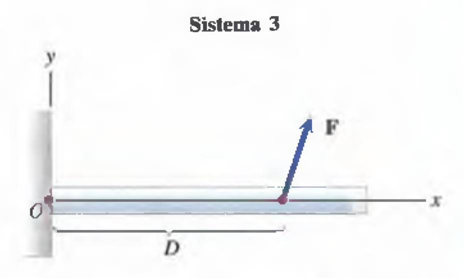
(a) Fuerza **F** que actúe en O y un par M.

(b) Las sumas de las fuerzas de los sistemas 2 y 3 son iguales. Igualando las sumas de los momentos respecto a O,

$$(\Sigma M_0)_3 = (\Sigma M_0)_2 :$$

$$(50 \text{ kN})D = 400 \text{ kN-m},$$

encontramos que el sistema 3 equivale al sistema 2 si $D = 8$ m.

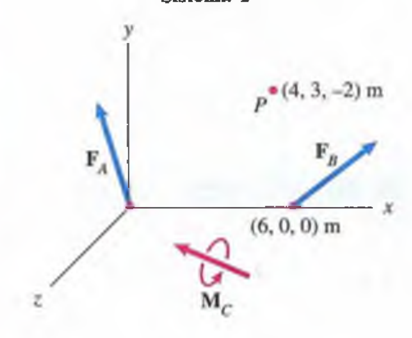


(b) Sistema que consiste en la fuerza **F** que actúe en un punto sobre el eje x.

COMENTARIO

Para representar el sistema mediante una sola fuerza en la parte (b), necesitamos colocar la línea de acción de la fuerza de manera que ésta ejerza un momento antihorario de 400 kN-m respecto a O. La colocación del punto de aplicación de la fuerza a una distancia D a lo largo del eje x fue sólo una manera conveniente de lograr esto.

Ejemplo 4.18



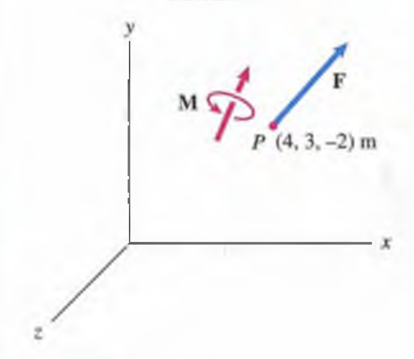


Figura 4.43

El sistema 1 de la figura 4.43 consiste en las fuerzas y el par siguientes:

$$\mathbf{F}_A = -10\mathbf{i} + 10\mathbf{j} - 15\mathbf{k} \text{ (kN)},$$

$$\mathbf{F}_B = 30\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 10\mathbf{k} \text{ (kN)},$$

$$\mathbf{M}_C = -90\mathbf{i} + 150\mathbf{j} + 60\mathbf{k} \text{ (kN-m)}.$$

Suponga que se quiere representar con una fuerza **F** que actúe en P y un par **M** (sistema 2). Determine **F** y **M**.

SOLUCIÓN

Las sumas de las fuerzas deben ser iguales

$$(\Sigma\mathbf{F})_2 = (\Sigma\mathbf{F})_1 :$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_A + \mathbf{F}_B = 20\mathbf{i} + 15\mathbf{j} - 5\mathbf{k} \text{ (kN)}$$

Las sumas de los momentos respecto a un punto arbitrario deben ser iguales Las sumas de los momentos respecto al punto P deben ser iguales:

$$(\Sigma\mathbf{M}_P)_2 = (\Sigma\mathbf{M}_P)_1 :$$

$$\mathbf{M} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -4 & -3 & 2 \\ -10 & 10 & -15 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & -3 & 2 \\ 30 & 5 & 10 \end{vmatrix}$$

$$+ (-90\mathbf{i} + 150\mathbf{j} + 60\mathbf{k})$$

$$= -105\mathbf{i} + 110\mathbf{j} + 90\mathbf{k} \text{ (kN-m)}.$$

Ejemplo 4.19

El sistema 1 de la figura 4.44 consiste en fuerzas paralelas. Supongamos que se quiere representar mediante una fuerza **F** (sistema 2). ¿Qué valor tiene **F** y dónde corta su línea de acción el plano x-z?

ESTRATEGIA

Podemos determinar **F** de la condición de que las sumas de las fuerzas de los dos sistemas deben ser iguales. Para que los dos sistemas sean equivalentes, debemos escoger el punto de aplicación P de manera que las sumas de los momentos respecto a un punto sean iguales. Esta condición nos dirá dónde corta la línea de acción el plano x-z.

SOLUCIÓN

Las sumas de las fuerzas deben ser iguales

$$(\Sigma\mathbf{F})_2 = (\Sigma\mathbf{F})_1 :$$

$$\mathbf{F} = 30\mathbf{j} + 20\mathbf{j} - 10\mathbf{j} = 40\mathbf{j} \text{ (lb)}$$

Las sumas de los momentos respecto a un punto arbitrario deben ser iguales Sean (x, y, z) las coordenadas del punto P. Las sumas de los momentos respecto al origen O deben ser iguales.

$$(\Sigma\mathbf{M}_P)_2 \ (\Sigma\mathbf{M}_P)_1 :$$

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & y & z \\ 0 & 40 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 6 & 0 & 2 \\ 0 & 30 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 0 & 4 \\ 0 & -10 & 0 \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -3 & 0 & -2 \\ 0 & 20 & 0 \end{vmatrix}.$$

Desarrollando los determinantes, obtenemos

$$(20 + 40z)\,\mathbf{i} + (100 - 40x)\,\mathbf{k} = \mathbf{0}.$$

Las sumas de los momentos respecto al origen son iguales si

$$x = 2.5 \text{ pie},$$

$$z = -0.5 \text{ pie}.$$

Estos sistemas son equivalentes si $\mathbf{F} = 40\mathbf{j}$ (lb) y su línea de acción interseca el plano x-z en $x = 2.5$ pies y $z = -0.5$ pies. Observe que no obtuvimos una ecuación para la coordenada y de P. Los sistemas son equivalentes si $\mathbf{F}$ se aplica en cualquier punto a lo largo de su línea de acción.

COMENTARIO

Podríamos haber determinado de una manera más sencilla las coordenadas x y z del punto P. Como las sumas de los momentos respecto a cualquier punto deben ser iguales para que los sistemas sean equivalentes, las sumas de los momentos respecto a cualquier *línea* también deben ser iguales. Igualando las sumas de los momentos respecto al eje x,

$$(\Sigma M_{\text{eje } x})_2 = (\Sigma M_{\text{eje } x})_1 :$$

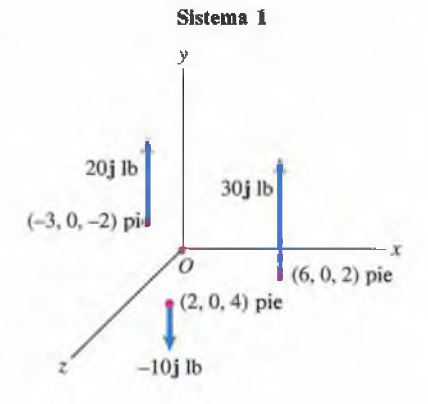
$$(40)z = -(30)(2) + (10)(4) + (20)(2),$$

así $z = -0.5$ pies; igualando las sumas de los momentos respecto al eje z,

$$(\Sigma M_{\text{eje } z})_2 = (\Sigma M_{\text{eje } z})_1 :$$

$$(40)x = (30)(6) - (10)(2) - (20)(3),$$

obtenemos $x = 2.5$ pies.



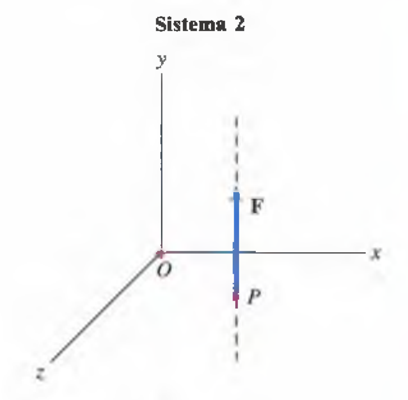


Figura 4.44

Representar un sistema con una llave de torsión

Se demostró que cualquier sistema de fuerzas y momentos se puede representar con una fuerza actuando en un punto y un par. ¿Cuál es el sistema *más simple* equivalente a cualquier sistema de fuerzas y momentos?

Consideremos primero una fuerza arbitraria que actúa en un punto O y un par **M** (sistema 1, Fig. 4.45a), ¿podemos representar este sistema con otro más simple? Por ejemplo, ¿podría representarse con la fuerza **F** actuando en un punto P diferente y ningún par (Fig. 4.45b)? La suma de las fuerzas es igual que en el sistema 1. Si elegimos un punto P tal que $\mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{M}$, donde **r** es el vector de O a P (Fig. 4.45c), la suma de los momentos respecto a O será igual que en el sistema 1 y los sistemas serán equivalentes. Pero el vector $\mathbf{r} \times \mathbf{F}$ es perpendicular a **F**, por lo que puede ser igual a **M** sólo si **M** es perpendicular a **F**. Esto significa que, en general, no podemos representar el sistema 1 sólo con la fuerza **F**.

Sin embargo, *podemos* representar el sistema 1 por medio de la fuerza **F** actuando en un punto P y la *componente* de **M** que es paralela a **F**. Se muestra (parte d) el sistema 1 con un sistema de coordenadas de modo que **F** está sobre el eje y y **M** está contenido en el plano x-y. En términos de este sistema coordenado, podemos expresar la fuerza y el par como $\mathbf{F} = F\mathbf{j}$ y $\mathbf{M} = M_x\mathbf{i} + M_y\mathbf{j}$. El sistema 2 (parte e) consiste en la fuerza **F** actuando en un punto sobre el eje z y la componente de **M** paralela a **F**. Si elegimos D para que $D = M_x/F$, podemos demostrar que el sistema 2 es equivalente al sistema 1. La suma de las fuerzas en cada sistema es **F**. La suma de los momentos respecto a O en el sistema 1 es **M**, mientras que en el sistema 2 es

$$(\Sigma \mathbf{M}_0)_2 = (-D\,\mathbf{k}) \times (F\,\mathbf{j}) + M_y\,\mathbf{j} = M_x\,\mathbf{i} + M_y\,\mathbf{j} = \mathbf{M}.$$

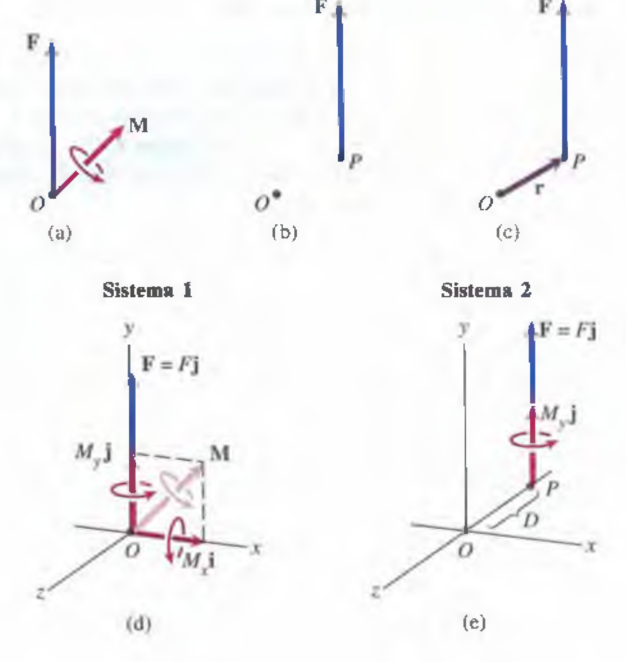


Figura 4.45
(a) El sistema 1 es una sola fuerza y un solo par.
(b) ¿Puede representarse el sistema 1 con una sola fuerza y ningún par?
(c) El momento de **F** respecto a O es $\mathbf{r} \times \mathbf{F}$.
(d) **F** actúa sobre el eje y y **M** está contenido en el plano x-y.
(e) El sistema 2 es la fuerza **F** y la componente de **M** paralela a **F**.

Una fuerza **F** y un par $\mathbf{M}_P$ paralelo a **F** se denominan **llave de torsión;** es el sistema más simple equivalente a un sistema arbitrario de fuerzas y momentos.

¿Cómo se puede representar un sistema dado de fuerzas y momentos por medio de una llave de torsión? Si el sistema consta de una sola fuerza o de un solo par, o si consta de una fuerza **F** y un par que es paralelo a **F**, se tendrá una llave de torsión y no se podrá simplificarlo más. Si el sistema es más complicado que una sola fuerza y un solo par, se comienza escogiendo un punto *O* conveniente y representando el sistema con una fuerza **F** actuando en *O* y un par **M** (Fig. 4.46a). La representación de este sistema con una llave de torsión requiere efectuar dos pasos:

1. Se determinan las componentes paralela y normal a **F** de **M** (Fig. 4.46b).
2. La llave de torsión consiste en la fuerza **F** actuando en un punto *P* y la componente paralela $\mathbf{M}_P$ (Fig. 4.46c). Para lograr la equivalencia, se debe escoger el punto *P* de manera que el momento de **F** respecto a *O* sea igual a la componente normal $\mathbf{M}_n$ (Fig. 4.46d), es decir, tal que $\mathbf{r}_{OP} \times \mathbf{F} = \mathbf{M}_n$.

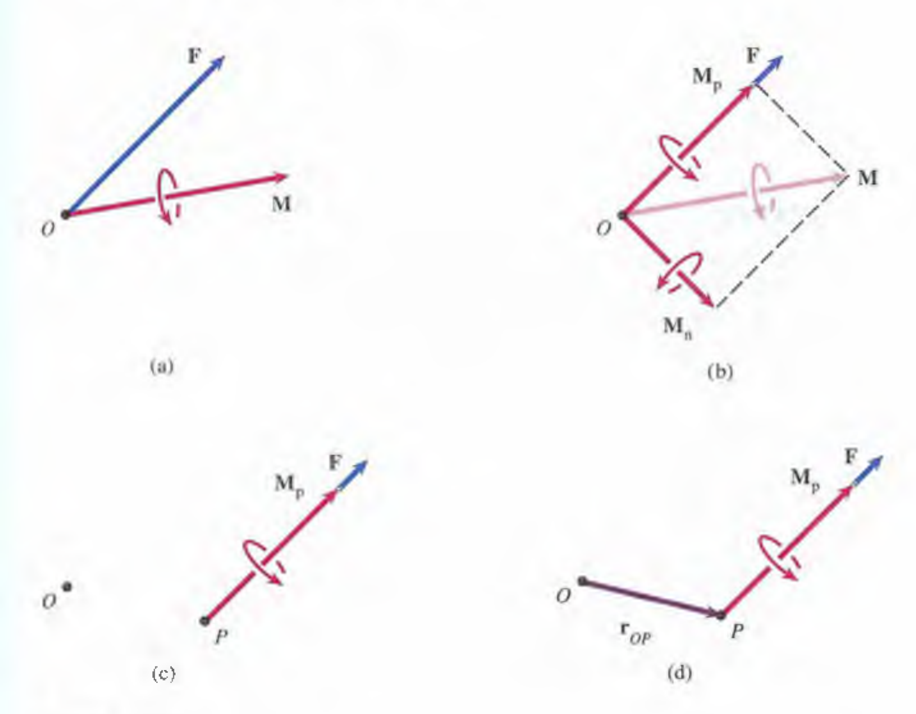


Figura 4.46

(a) Si es necesario, represente primero el sistema con una sola fuerza y un solo par.
(b) Componentes de **M** paralela y normal a **F**.
(c) Llave de torsión.
(d) Escoja *P* tal que el momento de **F** respecto a *O* sea igual a la componente normal de **M**.

Ejemplo 4.20

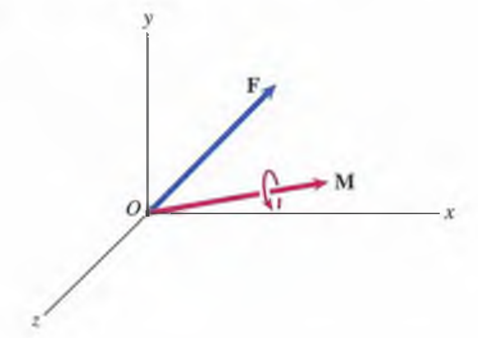
El sistema de la figura 4.47 consiste en la fuerza y el par

$$\mathbf{F} = 3\,\mathbf{i} + 6\,\mathbf{j} + 2\,\mathbf{k} \ \ (\text{N}),$$

$$\mathbf{M} = 12\,\mathbf{i} + 4\,\mathbf{j} + 6\,\mathbf{k} \ \ (\text{N-m}).$$

Represéntelo mediante una llave de torsión, y determine en qué punto la línea de acción de la fuerza de la llave corta el plano x-z.

Figura 4.47



ESTRATEGIA

La llave es la fuerza **F** y la componente de **M** paralela a **F** (Figs. a, b). Debemos elegir el punto de aplicación P de modo que el momento de **F** respecto a O sea igual a la componente normal $\mathbf{M}_n$. Si P es un punto arbitrario del plano x-z, podemos determinar dónde interseca la línea de acción de **F** ese plano.

SOLUCIÓN

Dividiendo **F** entre su magnitud, obtenemos un vector unitario **e** con la misma dirección que **F**:

$$\mathbf{e} = \frac{\mathbf{F}}{|\mathbf{F}|} = \frac{3\,\mathbf{i} + 6\,\mathbf{j} + 2\,\mathbf{k}}{\sqrt{(3)^2 + (6)^2 + (2)^2}} = 0.429\,\mathbf{i} + 0.857\,\mathbf{j} + 0.286\,\mathbf{k}.$$

Podemos usar **e** para calcular la componente de **M** paralela a **F**:

$$\mathbf{M}_p = (\mathbf{e} \cdot \mathbf{M})\,\mathbf{e} = [(0.429)(12) + (0.857)(4) + (0.286)(6)]\,\mathbf{e}$$

$$= 4.408\,\mathbf{i} + 8.816\,\mathbf{j} + 2.939\,\mathbf{k} \ \ (\text{N-m}).$$

La componente de **M** normal a **F** es

$$\mathbf{M}_n = \mathbf{M} - \mathbf{M}_p = 7.592\,\mathbf{i} - 4.816\,\mathbf{j} + 3.061\,\mathbf{k} \ \ (\text{N-m}).$$

La llave se muestra en la figura (b). Sean $(x, 0, z)$ las coordenadas de P. El momento de $\mathbf{F}$ respecto a O es

$$\mathbf{r}_{OP} \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & 0 & z \\ 3 & 6 & 2 \end{vmatrix} = -6z\,\mathbf{i} - (2x - 3z)\,\mathbf{j} + 6x\,\mathbf{k}.$$

Igualando este momento a $\mathbf{M}_n$,

$$-6z\,\mathbf{i} - (2x - 3z)\,\mathbf{j} + 6x\,\mathbf{k} = 7.592\,\mathbf{i} - 4.816\,\mathbf{j} + 3.061\,\mathbf{k},$$

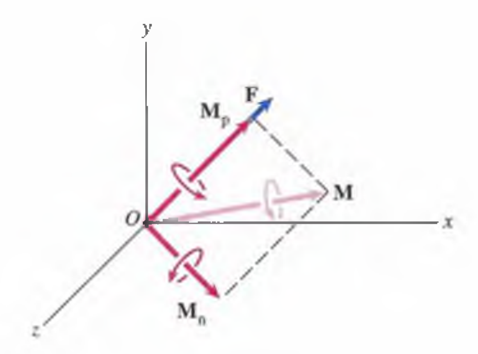
obtenemos las ecuaciones

$$-6z = 7.592,$$

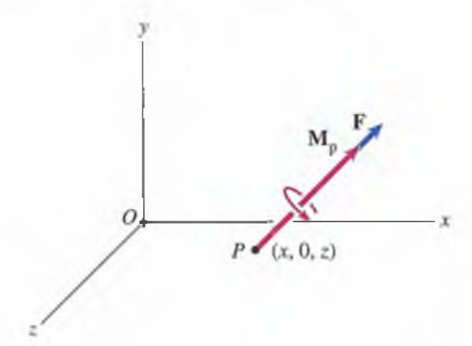
$$-2x + 3z = -4.816,$$

$$6x = 3.061.$$

Resolviendo estas ecuaciones encontramos las coordenadas del punto P: $x = 0.510$ m y $z = -1.265$ m.



(a) Descomposición de **M** en componentes paralela y normal a **F**.

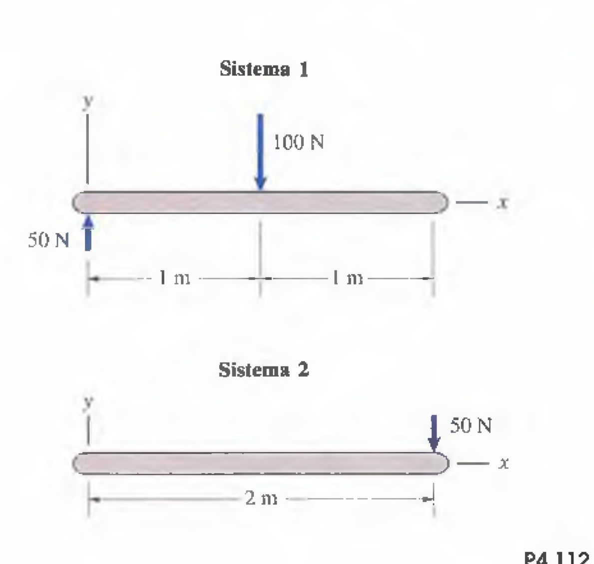


(b) Llave de torsión actuando en un punto del plano x-z.

Problemas

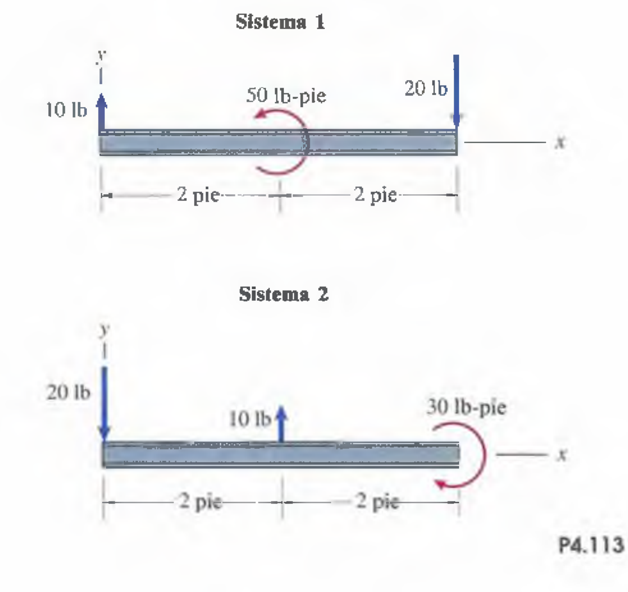
4.112 Dos sistemas de fuerzas actúan sobre la viga mostrada en la figura. ¿Son tales sistemas equivalentes?

Estrategia: Revise la equivalencia en los dos casos. Tanto las sumas de las fuerzas como las sumas de los momentos respecto a un punto arbitrario deben ser iguales.



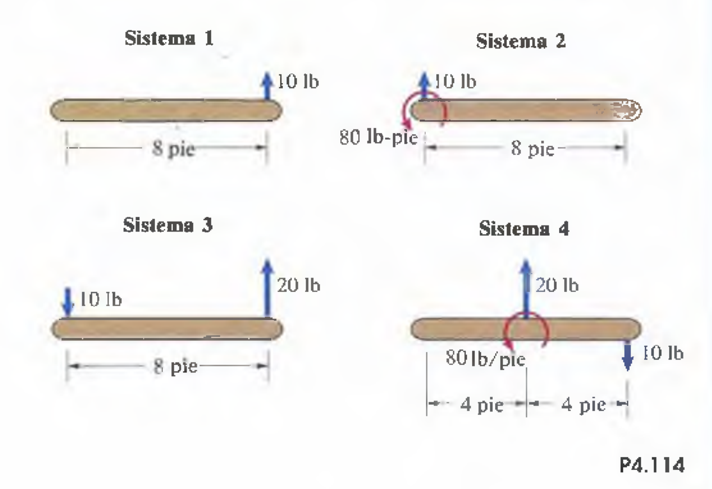
P4.112

4.113 Dos sistemas de fuerzas y momentos actúan sobre la viga mostrada. ¿Son equivalentes?



P4.113

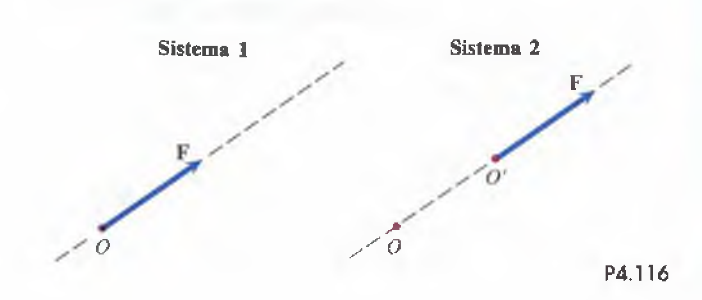
4.114 Cuatro sistemas de fuerzas y momentos actúan sobre una viga de 8 pies de longitud. ¿Qué sistemas son equivalentes?



P4.114

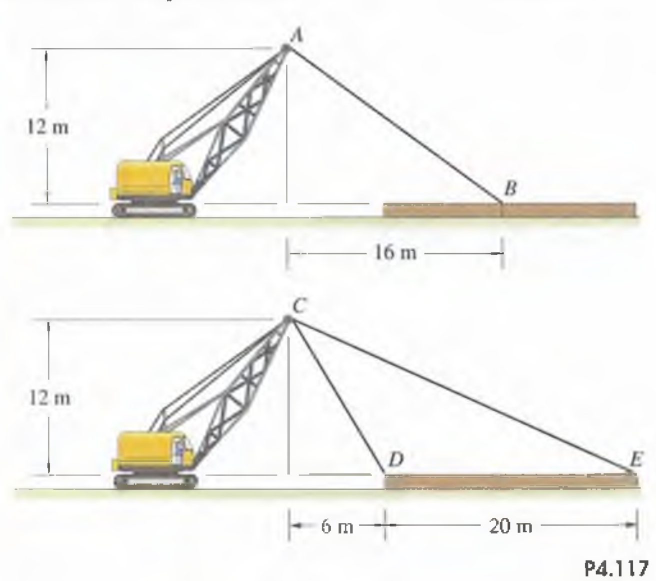
4.115 Los cuatro sistemas mostrados en el problema 4.114 se pueden hacer equivalentes agregando un solo par a uno de los sistemas. ¿De qué sistema se trata y qué par se debe añadir?

4.116 El sistema 1 es una fuerza **F** que actúa en un punto O. El sistema 2 es la fuerza **F** actuando en un punto O' diferente a lo largo de la misma línea de acción. Explique por qué esos sistemas son equivalentes. (Este sencillo resultado se denomina *principio de transmisibilidad*.)



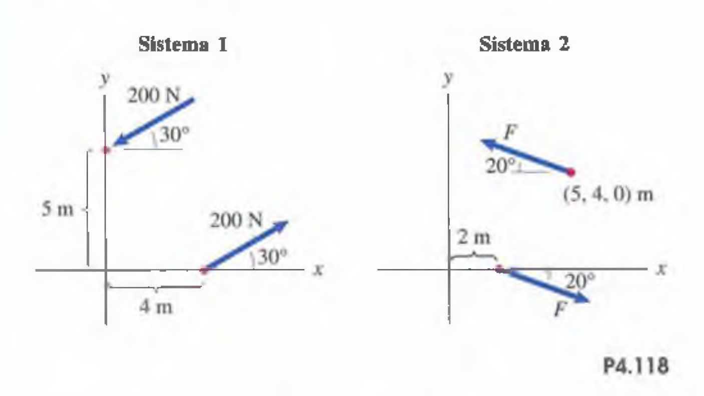
P4.116

4.117 En la figura P4.117, la suma vectorial de las fuerzas ejercidas por los cables sobre el tronco es la misma en los dos casos. Demuestre que los sistemas de fuerzas ejercidos sobre el tronco son equivalentes.



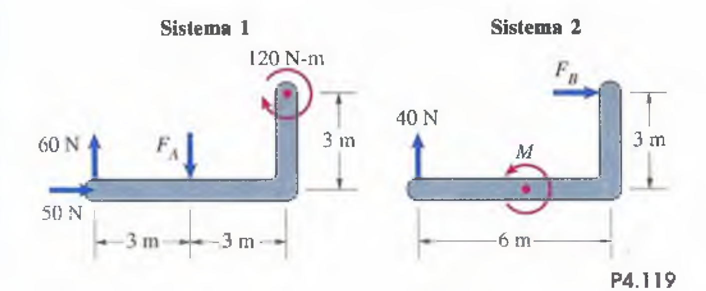
P4.117

4.118 Cada uno de los sistemas 1 y 2 mostrados consiste en un par. Si son equivalentes, ¿qué valor tiene F?



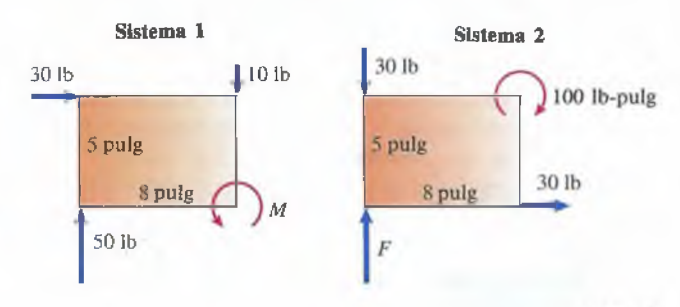
P4.118

4.119 Dos sistemas equivalentes de fuerzas y momentos actúan sobre la barra. Determine F_A y F_B y el par M.



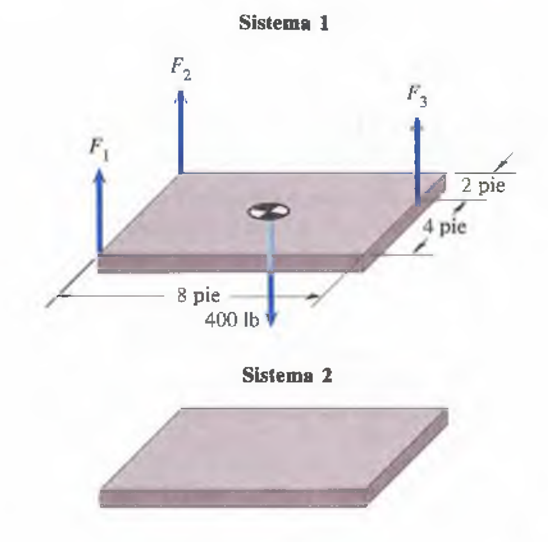
P4.119

4.120 Dos sistemas equivalentes de fuerzas y momentos actúan sobre la placa mostrada. Determine la fuerza F y el par M.



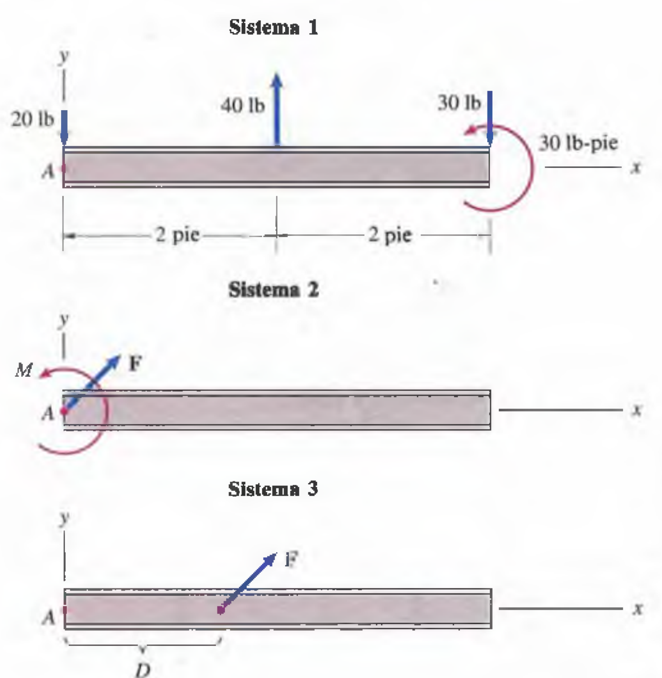
P4.120

4.121 En el sistema 1, cuatro fuerzas actúan sobre la placa. Las fuerzas son perpendiculares a la placa, y la fuerza de 400 lb actúa en su punto medio. En el sistema 2, ninguna fuerza o par actúa sobre la placa. Los sistemas 1 y 2 son equivalentes. Determine las fuerzas F_1, F_2 y F_3.



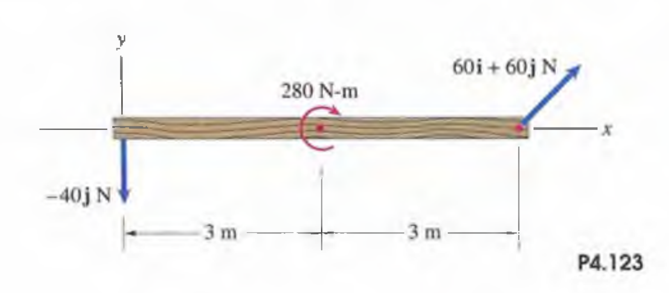
P4.121

4.122 Tres fuerzas y un par se aplican a una viga (sistema 1).
(a) Si el sistema 1 se representa con una fuerza aplicada en A y un par (sistema 2), ¿qué valores tienen **F** y M?
(b) Si el sistema 1 se representa con la fuerza **F** (sistema 3), ¿qué valor tiene la distancia D?



P4.122

4.123 Represente, mediante una fuerza **F**, las dos fuerzas y el par que actúan sobre la viga mostrada. Determine **F** y el punto en el cual su línea de acción interseca el eje x.

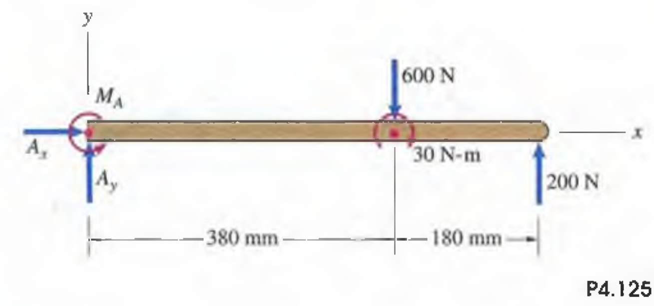


P4.123

4.124 Tanto la suma vectorial de las fuerzas que actúan sobre la viga mostrada, como la suma de los momentos respecto al extremo izquierdo de la viga, son iguales a cero.
(a) Determine las fuerzas A_x, A_y y B.
(b) Si las fuerzas A_x, A_y y B se representan con una fuerza **F** que actúa en el extremo derecho de la viga y un par M, ¿qué valores tienen **F** y M?

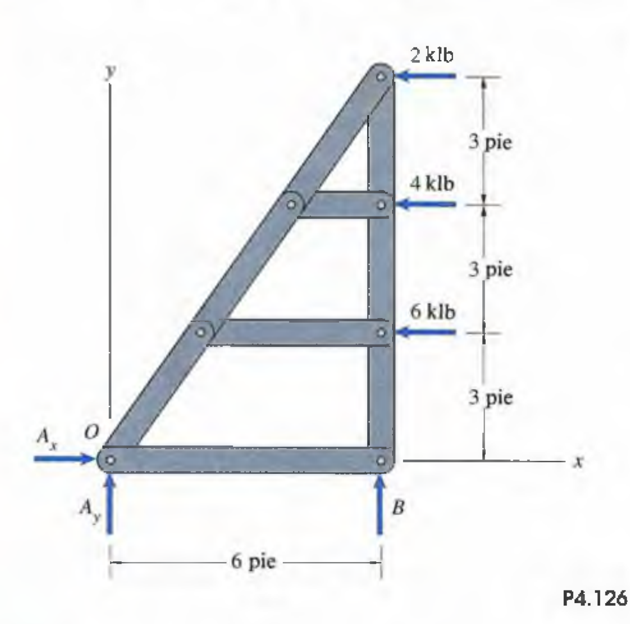
P4.124

4.125 Tanto la suma vectorial de las fuerzas que actúan sobre la viga mostrada, como la suma de los momentos respecto al extremo izquierdo de la viga, son iguales a cero.
(a) Determine las fuerzas A_x y A_y y el par M_A.
(b) Determine la suma de los momentos respecto al extremo derecho de la viga.
(c) Si la fuerza de 600 N, la fuerza de 200 N y el par de 30 N-m se representan con una fuerza **F** que actúa en el extremo izquierdo de la viga y un par M, ¿qué valores tienen **F** y M?



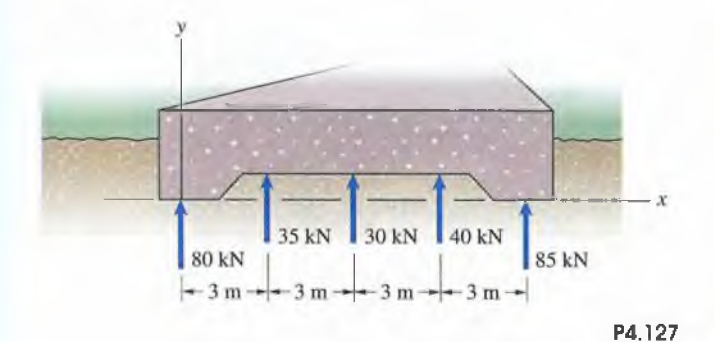
P4.125

4.126 La suma vectorial de las fuerzas y la suma de los momentos respecto al origen O son iguales a cero.
(a) Determine A_x, A_y y B.
(b) Si las fuerzas de 2 klb, 4 klb y 6 klb se representan con una fuerza **F**, ¿qué valor tiene **F** y dónde corta su línea de acción al eje y?
(c) Si las fuerzas de 2 klb, 4 klb y 6 klb se reemplazan con la fuerza antes determinada, ¿qué valor tienen la suma vectorial de las fuerzas y la suma de los momentos respecto a O?



P4.126

4.127 La carga distribuida que ejerce el suelo sobre una parte de la cimentación de un edificio está representada por cinco fuerzas. Si éstas se representan por medio de una fuerza **F**, ¿qué valor tiene **F** y en qué punto interseca su línea de acción el eje x?

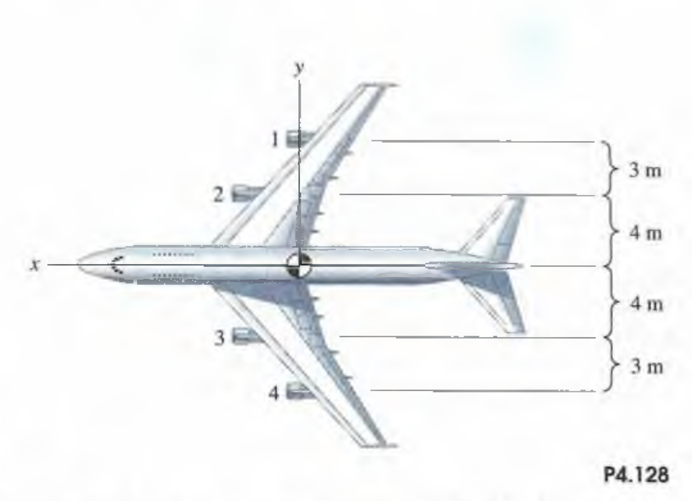


P4.127

4.128 Las fuerzas de empuje ejercidas sobre el avión por sus cuatro motores son paralelas al eje x. Sus magnitudes son

motor 1: 160 kN,	motor 3: 185 kN,
motor 2: 175 kN,	motor 4: 160 kN.

(a) Represente las cuatro fuerzas de empuje con una fuerza **F**. ¿Qué valor tiene **F** y en qué punto corta su línea de acción el eje y? (b) El piloto quiere ajustar el empuje del motor 1 de manera que las cuatro fuerzas de empuje queden representadas por una fuerza que actúe en el origen. ¿Qué valor debe tener la fuerza de empuje del motor 1?

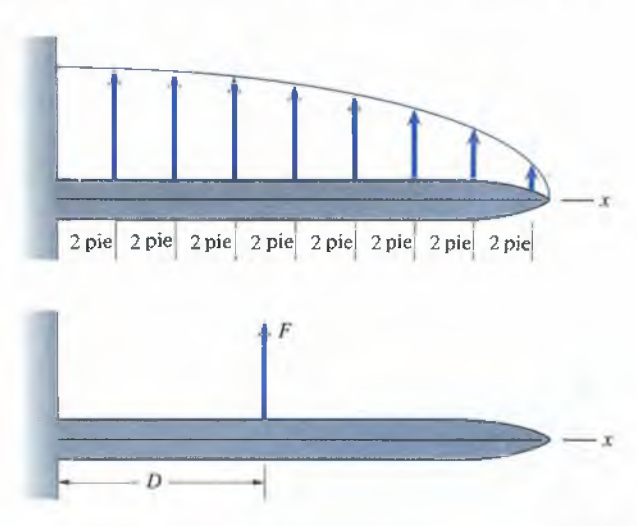


P4.128

4.129 El empuje de sustentación sobre un ala de avión está representado por ocho fuerzas. La magnitud de cada fuerza está dada, en función de su posición x sobre el ala, por

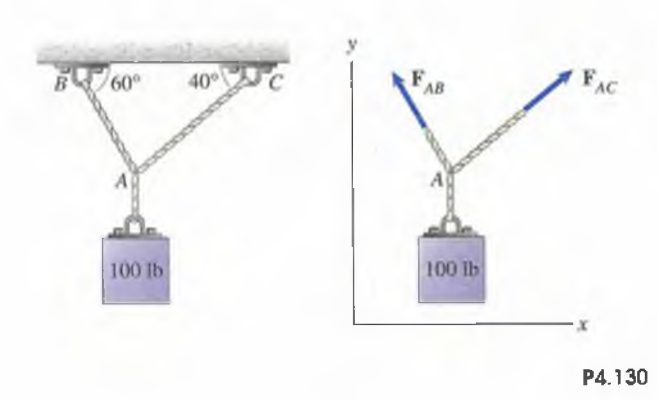
$$200\sqrt{1-(x/17)^2}\ \text{lb}.$$

Si las fuerzas de sustentación se representan con una sola fuerza como se indica, ¿qué valor tienen la fuerza F y la distancia D?



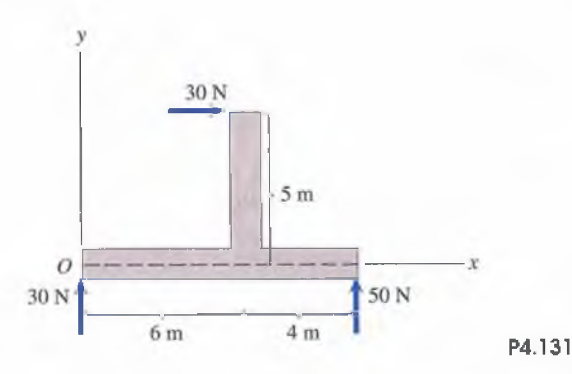
P4.129

4.130 El sistema mostrado se encuentra en equilibrio. Si las fuerzas $\mathbf{F}_{AB}$ y $\mathbf{F}_{AC}$ se representan con una fuerza **F** que actúa en A y un par **M**, ¿qué valor tienen **F** y **M**?



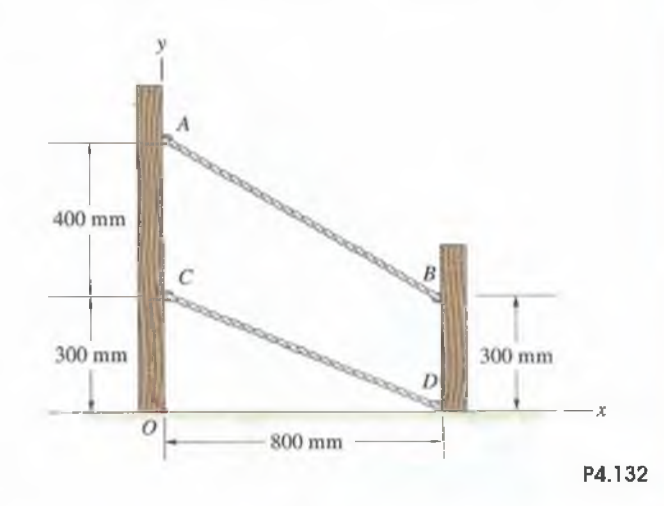
P4.130

4.131 Tres fuerzas actúan sobre la viga mostrada.
(a) Represente el sistema con una fuerza **F** que actúe en el origen O y un par M.
(b) Represente el sistema con una sola fuerza. ¿En qué punto corta la línea de acción de la fuerza el eje x?



P4.131

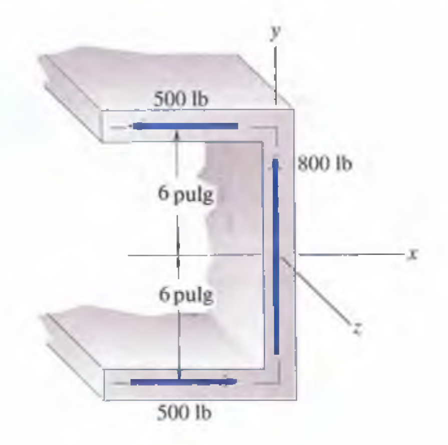
4.132 En la figura P4.132, la tensión en el cable AB es de 400 N y la tensión en el cable CD es de 600 N.
(a) Si las fuerzas ejercidas por los cables sobre el poste izquierdo se representan con una fuerza **F** que actúa en el origen O y un par M, ¿qué valor tiene **F** y M?
(b) Si las fuerzas ejercidas por los cables sobre el poste izquierdo se representan con una sola fuerza **F**, ¿en qué punto corta su línea de acción el eje y?



P4.132

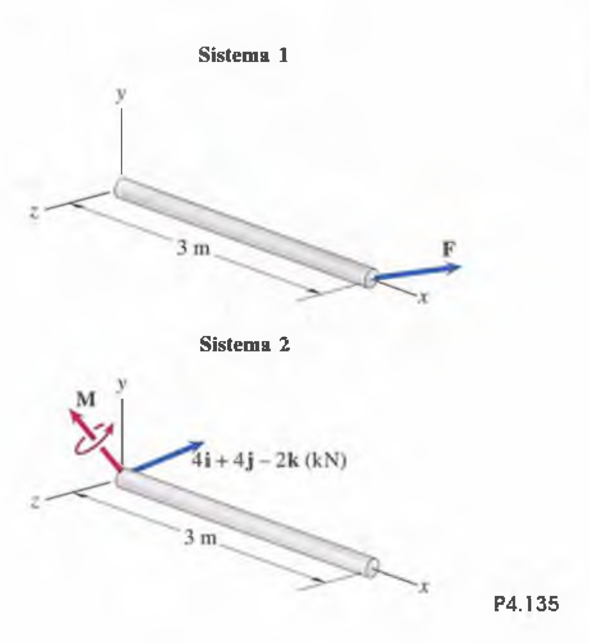
4.133 (Fig. P4.132) La tensión en cada uno de los cables AB y CD es de 400 N. Si las fuerzas ejercidas por ellos sobre el poste derecho se representan con una fuerza **F**, ¿qué valor tiene **F** y en qué punto corta su línea de acción el eje y?

4.134 Si las tres fuerzas que actúan sobre la sección transversal de la viga mostrada se representan con una fuerza **F**, ¿qué valor tiene **F** y en qué punto corta su línea de acción el eje x?



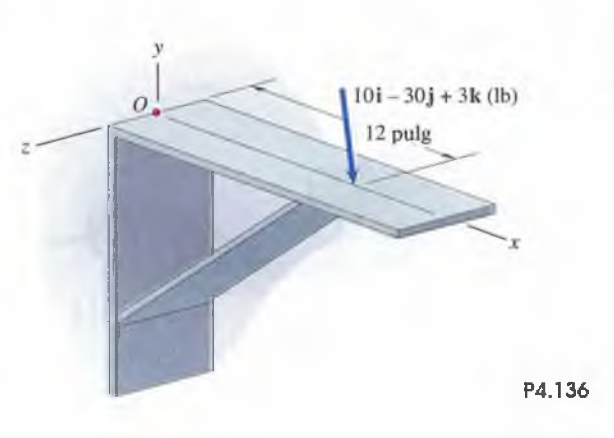
P4.134

4.135 Los dos sistemas de fuerzas y momentos que actúan sobre la viga mostrada son equivalentes. Determine la fuerza **F** y el par **M**.



P4.135

4.136 Una ménsula está sometida a la fuerza mostrada. Determine el momento ejercido por la fuerza (a) respecto al eje z y (b) respecto al eje y. (c) Si la fuerza se representa con una fuerza **F** que actúa en O y un par **M**, ¿qué valor tienen **F** y **M**?

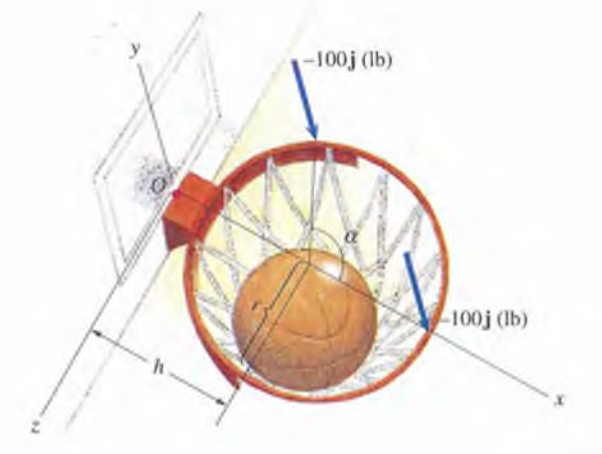


P4.136

4.137 Un jugador de baloncesto anota una canasta y luego se cuelga momentáneamente del aro, ejerciendo las dos fuerzas de 100 lb mostradas. Las dimensiones son $h = 14.5$ pulg y $r = 9.5$ pulg, y el ángulo $\alpha = 120°$.

(a) Si las fuerzas que el jugador ejerce se representan con una fuerza **F** que actúa en O y un par **M**, ¿qué valores tienen **F** y **M**?

(b) El tablero de vidrio se romperá si $|\mathbf{M}| > 4000$ pulg-lb. ¿Se rompe?



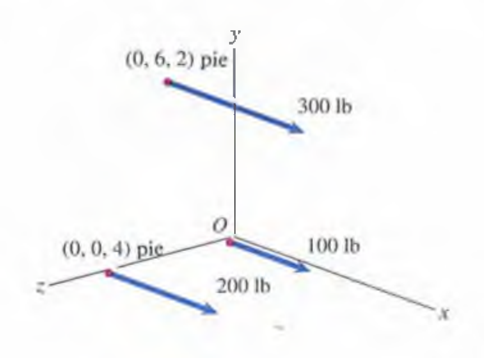
P4.137

4.138 Las tres fuerzas son paralelas al eje x.

(a) Si las tres fuerzas se representan con una fuerza **F** que actúe en el origen O y un par **M**, ¿qué valores tienen **F** y **M**?

(b) Si se representan con una sola fuerza, ¿qué valor tiene la fuerza y dónde corta su línea de acción al plano y-z?

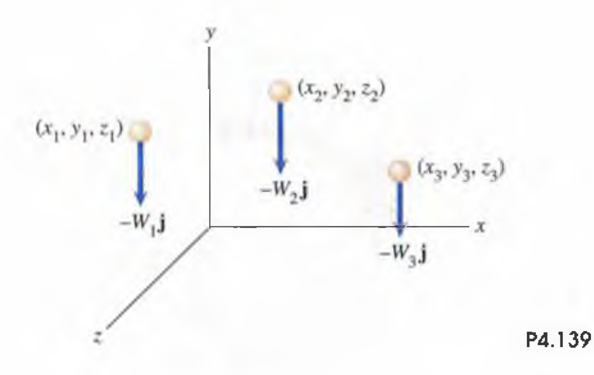
Estrategia: En la parte (b), suponga que la fuerza actúa en un punto $(0, y, z)$ del plano y-z y use las condiciones de equivalencia para determinar la fuerza y las coordenadas y y z. Vea el ejemplo 4.19.



P4.138

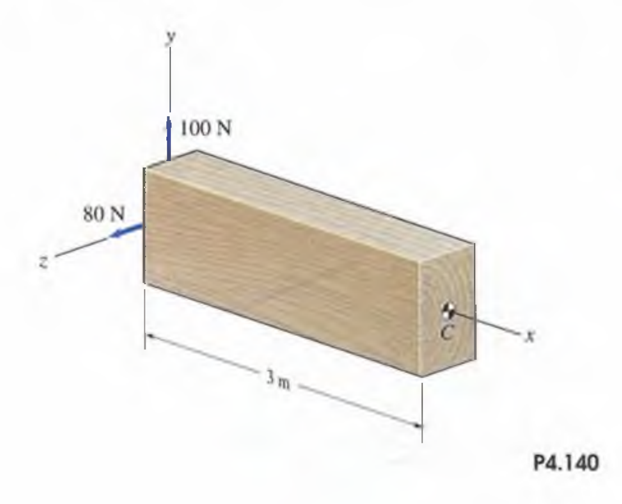
4.139 Se muestran las posiciones y los pesos de tres partículas. Si los pesos se representan con una sola fuerza **F**, determine **F** y demuestre que su línea de acción corta el plano *x-z* en

$$x = \frac{\sum_{i=1}^{3} x_i W_i}{\sum_{i=1}^{3} W_i}, \qquad z = \frac{\sum_{i=1}^{3} z_i W_i}{\sum_{i=1}^{3} W_i}.$$



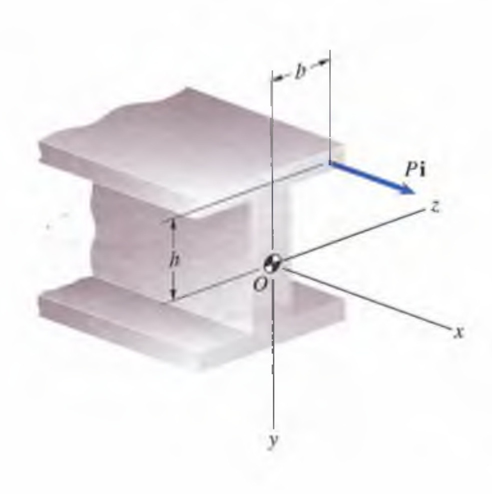
P4.139

4.140 Dos fuerzas actúan sobre la viga. Si se representan con una fuerza **F** que actúa en *C* y un par **M**, ¿qué valores tienen **F** y **M**?



P4.140

4.141 Una fuerza axial de magnitud *P* actúa sobre la viga mostrada. Si se representa mediante una fuerza **F** que actúa en el origen *O* y un par **M**, ¿qué valores tienen **F** y **M**?

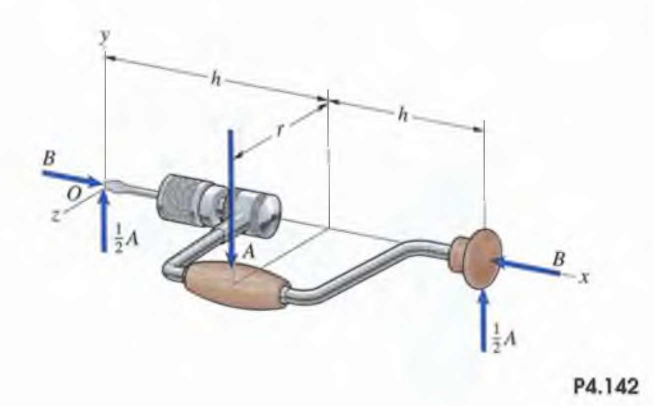


P4.141

4.142 El berbiquí de la figura P4.142 se está usando para quitar un tornillo.

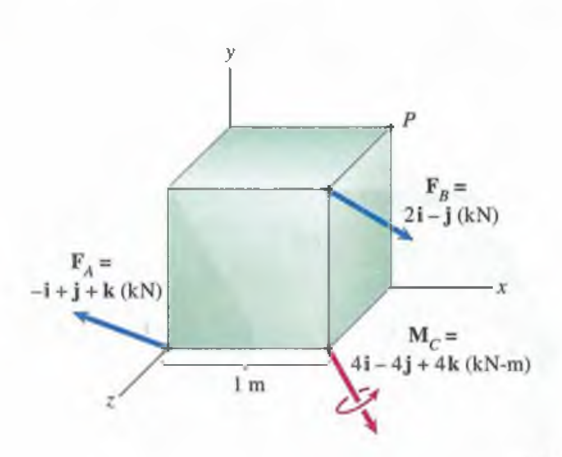
(a) Si las fuerzas que actúan sobre el berbiquí se representan con una fuerza **F** actuando en el origen *O* y un par **M**, ¿qué valores tienen **F** y **M**?

(b) Si las fuerzas que actúan sobre el berbiquí se representan con una fuerza **F**′ actuando en un punto *P* con coordenadas (x_P, y_P, z_P) y un par **M**′, ¿qué valores tienen **F**′ y **M**′?



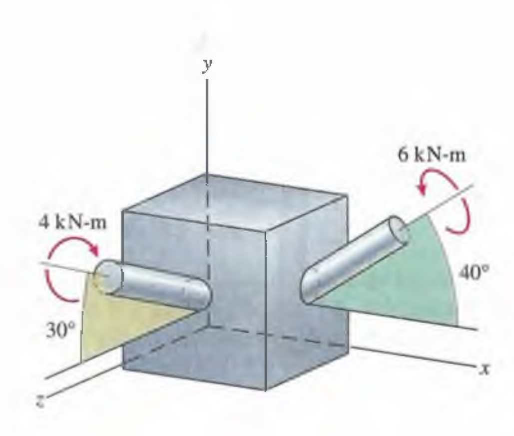
P4.142

4.143 Dos fuerzas y un par actúan sobre el cubo de la figura. Si se representan mediante una fuerza **F** que actúa en el punto P y un par **M**, ¿qué valor tienen **F** y **M**?



P4.143

4.144 Dos árboles están sujetos a los pares mostrados.
(a) Si los dos pares se representan con una fuerza **F** que actúa en el origen O y un par **M**, ¿qué valor tienen **F** y **M**?
(b) ¿Cuál es la magnitud del momento total ejercido por los dos pares?

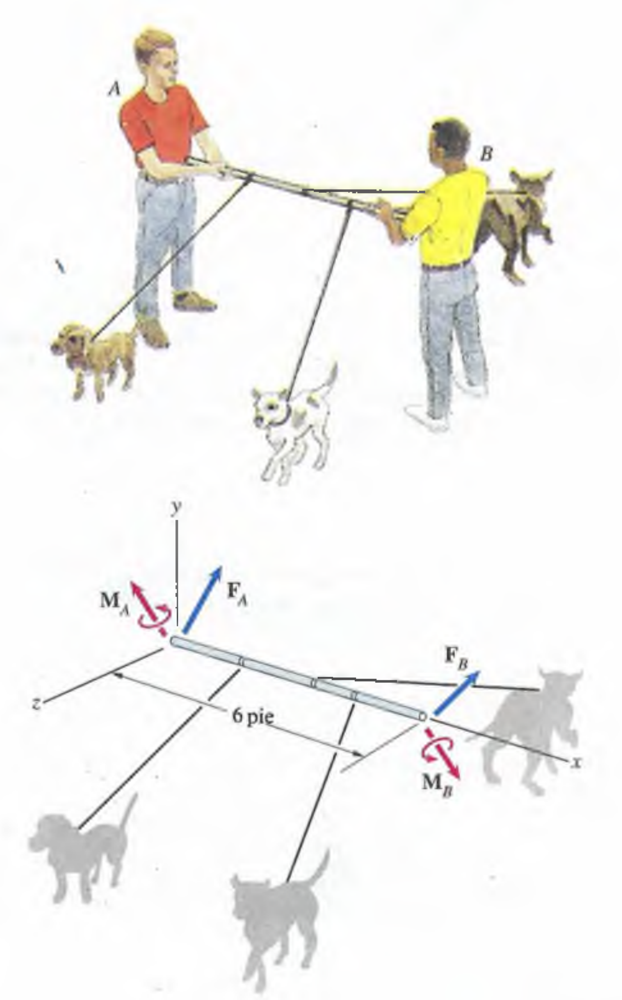


P4.144

4.145 Dos personas, A y B, sostienen una barra a la que están amarrados tres perros. Las fuerzas y los pares que éstos ejercen son

$$\mathbf{F}_A = -5\mathbf{i} + 15\mathbf{j} - 10\mathbf{k} \text{ (lb)},$$
$$\mathbf{M}_A = 15\mathbf{j} + 10\mathbf{k} \text{ (lb-pie)},$$
$$\mathbf{F}_B = 5\mathbf{i} + 10\mathbf{j} - 10\mathbf{k} \text{ (lb)},$$
$$\mathbf{M}_B = -10\mathbf{j} - 15\mathbf{k} \text{ (lb-pie)}.$$

Si la persona B suelta la barra, la persona A tendría que ejercer una fuerza **F** y un par **M** equivalente al sistema inicial. ¿Qué valores tienen **F** y **M**?

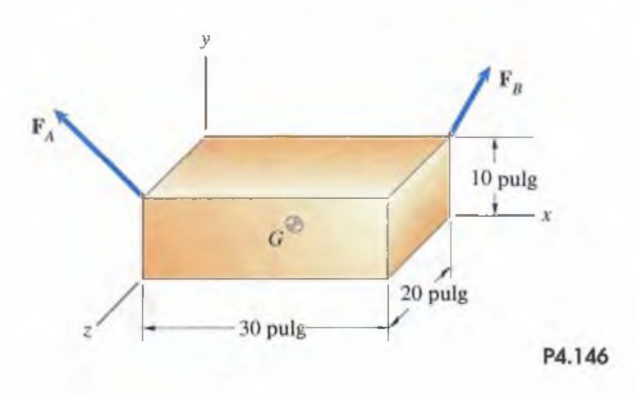


P4.145

4.146 El punto G se encuentra en el centro del bloque mostrado. Las fuerzas son

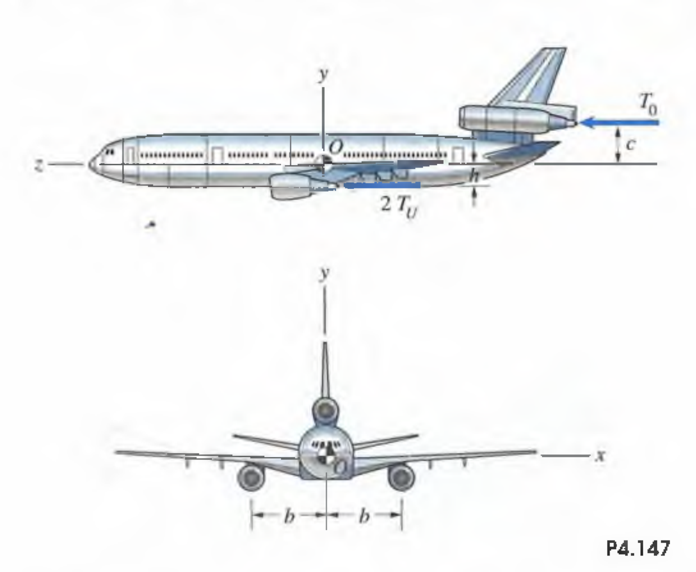
$$\mathbf{F}_A = -20\mathbf{i} + 10\mathbf{j} + 20\mathbf{k}\ \text{(lb)},$$
$$\mathbf{F}_B = 10\mathbf{j} - 10\mathbf{k}\ \text{(lb)}.$$

Si las dos fuerzas se representan con una fuerza **F** que actúa en G y un par **M**, ¿qué valor tienen **F** y **M**?



P4.146

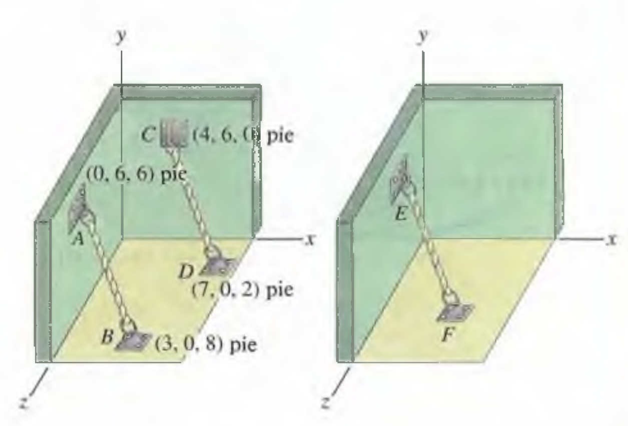
4.147 El motor sobre el fuselaje ejerce un empuje T_0 de 16 klb, y cada motor bajo las alas ejerce un empuje T_U de 12 klb. Las dimensiones son $h = 8$ pies, $c = 12$ pies y $b = 16$ pies. Si las tres fuerzas se representan con una fuerza **F** que actúa en el origen O y un par **M**, ¿qué valores tienen **F** y **M**?



P4.147

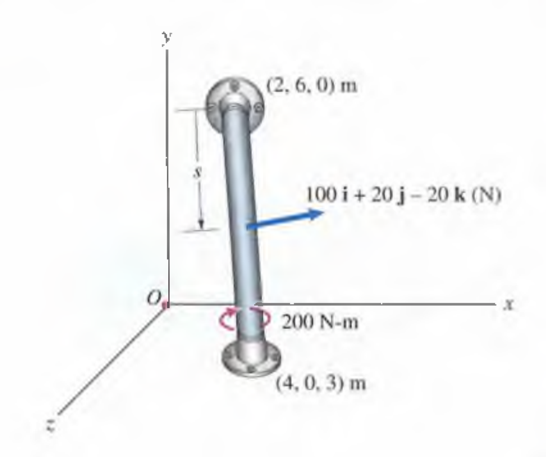
4.148 (Véase Prob. 4.147). Suponga que el motor bajo el ala a la derecha del piloto pierde fuerza.
(a) Si las dos fuerzas de empuje restantes se representan con una fuerza **F** que actúa en el origen O y un par **M**, ¿qué valores tienen **F** y **M**?
(b) Y si se representan sólo con la fuerza **F**, ¿en qué punto corta su línea de acción el plano x-y?

4.149 La tensión en el cable AB de la figura es de 100 lb y la tensión en el cable CD es de 60 lb. Suponga que se desea reemplazar esos dos cables con un solo cable EF tal que la fuerza ejercida sobre la pared en E sea equivalente a las dos fuerzas ejercidas por los cables AB y CD sobre las paredes en A y C. ¿Cuál es la tensión en el cable EF y cuáles son las coordenadas de los puntos E y F?



P4.149

4.150 En la figura P4.150, la distancia s es de 4 m. Si la fuerza y el par de 200 N-m se representan con una fuerza **F** que actúa en el origen O y un par **M**, ¿qué valor tienen **F** y **M**?

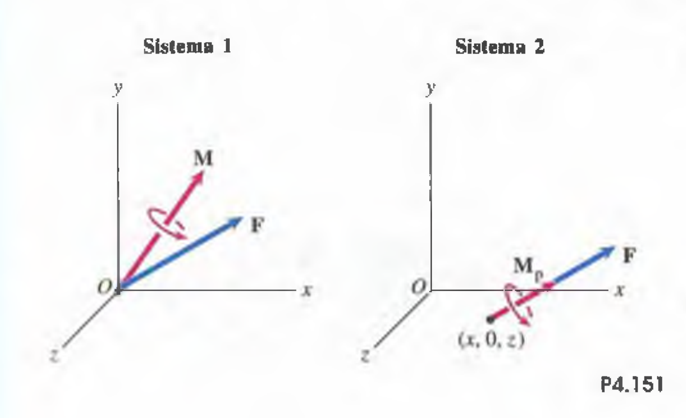


P4.150

4.151 La fuerza **F** y el par **M** del sistema 1 mostrado son

$$\mathbf{F} = 12\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 3\mathbf{k} \text{ (lb)},$$
$$\mathbf{M} = 4\mathbf{i} + 7\mathbf{j} + 4\mathbf{k} \text{ (lb-pie)}.$$

Suponga que el sistema 1 se quiere representar con una llave de torsión (sistema 2). Determine el par $\mathbf{M}_p$ y las coordenadas x y z en que la línea de acción de la fuerza corta el plano x-z.



P4.151

4.152 Un sistema consiste en una fuerza **F** que actúa en el origen O y un par **M**, cuyos valores son

$$\mathbf{F} = 10\mathbf{i} \text{ (lb)},$$
$$\mathbf{M} = 20\mathbf{j} \text{ (lb-pie)}.$$

Si el sistema se representa con una llave de torsión que consiste en la fuerza **F** y un par paralelo $\mathbf{M}_p$, ¿qué valor tiene $\mathbf{M}_p$ y en qué punto interseca la línea de acción de **F** el plano y-z?

4.153 Un sistema consiste en una fuerza **F** que actúa en el origen O y un par **M**, cuyos valores son

$$\mathbf{F} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 5\mathbf{k} \text{ (N)},$$
$$\mathbf{M} = 10\mathbf{i} + 8\mathbf{j} - 4\mathbf{k} \text{ (N-m)}.$$

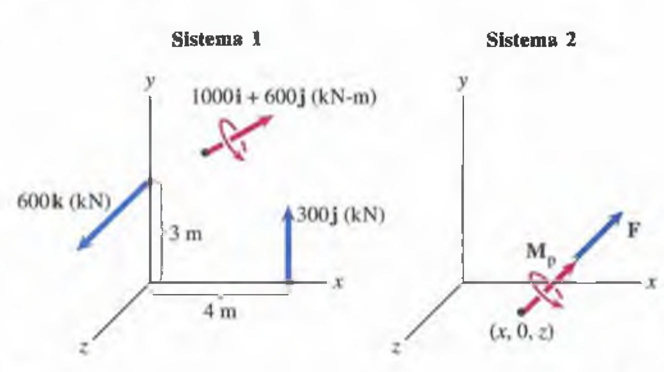
Si el sistema se representa con una llave de torsión que consiste en la fuerza **F** y un par paralelo $\mathbf{M}_p$, (a) determine $\mathbf{M}_p$, así como en qué punto interseca la línea de acción de **F** (b) el plano x-z y (c) el plano y-z.

4.154 Considere la fuerza **F** que actúa en el origen O y el par **M** dados en el ejemplo 4.20. Si este sistema se representa con una llave de torsión, ¿en qué punto corta la línea de acción de la fuerza el plano x-y?

4.155 Considere la fuerza **F** que actúa en el origen O y el par **M** dados en el ejemplo 4.20. Si este sistema se representa con una llave de torsión, ¿en qué punto interseca la línea de acción de la fuerza el plano $y = 3$ m?

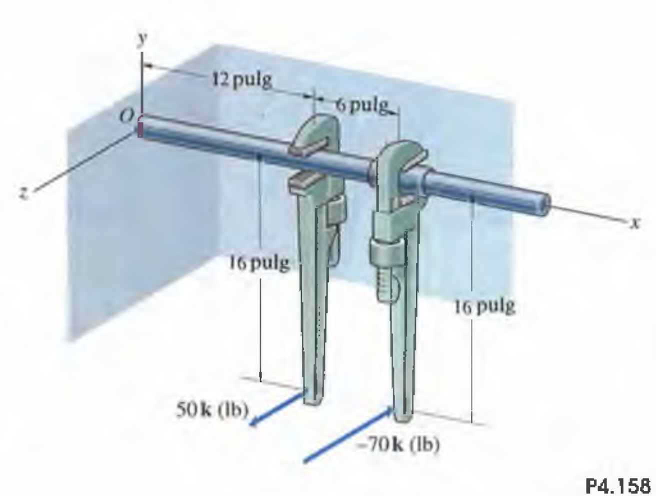
4.156 Una llave de torsión consiste en una fuerza de magnitud 100 N que actúa en el origen O y un par de magnitud 60 N-m. La fuerza y el par señalan en la dirección de O al punto (1, 1, 2) m. Si la llave de torsión se representa con una fuerza **F** que actúa en el punto (5, 3, 1) m y un par **M**, ¿qué valores tienen **F** y **M**?

4.157 El sistema 1 consiste en dos fuerzas y un par. Suponga que se quiere representar con una llave de torsión (sistema 2). Determine la fuerza **F**, el par $\mathbf{M}_p$ y las coordenadas x y z en que la línea de acción de la fuerza interseca el plano x-z.



P4.157

4.158 Un plomero ejerce las dos fuerzas mostradas para aflojar un tubo.
(a) ¿Qué momento total ejerce él respecto al eje del tubo?
(b) Si las dos fuerzas se representan con una fuerza **F** que actúa en O y un par **M**, ¿qué valores tienen **F** y **M**?
(c) Si las dos fuerzas se representan con una llave de torsión que consiste en la fuerza **F** y un par paralelo $\mathbf{M}_p$, ¿qué valor tiene $\mathbf{M}_p$ y en qué punto corta la línea de acción de **F** al plano x-y?



P4.158

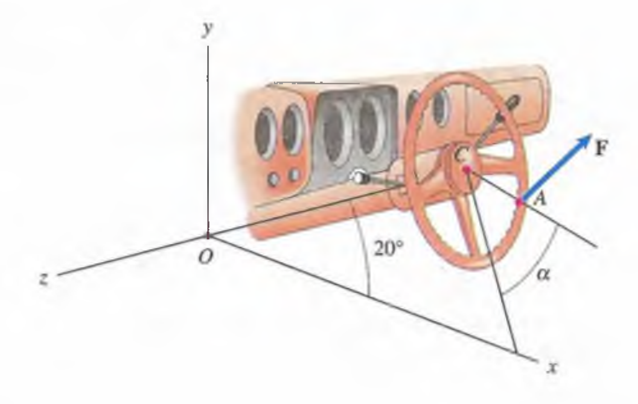
Ejemplos con computador

El siguiente ejemplo y los problemas están diseñados para usar una calculadora programable o un computador.

Ejemplo 4.21

El radio R del volante de la figura 4.48 mide 200 mm. La distancia de O a C es de 1 m. El centro C del volante se encuentra en el plano x-y. La fuerza $\mathbf{F} = \operatorname{sen}\alpha\,(10\mathbf{i} + 10\mathbf{j} - 5\mathbf{k})$ N. Determine el valor de α para el cual la magnitud del momento de $\mathbf{F}$ respecto al eje OC del volante es un máximo. ¿Cuál es la magnitud máxima?

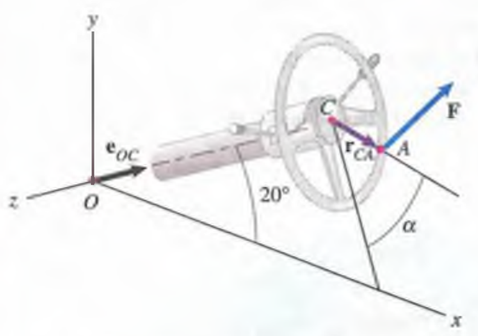
Figura 4.48



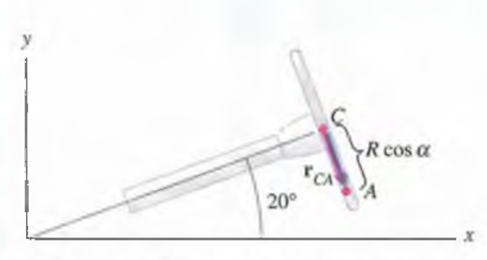
ESTRATEGIA

Determinaremos el momento de $\mathbf{F}$ respecto a OC en función del ángulo α y obtendremos una gráfica del momento en función de α.

SOLUCIÓN



(a) Vector de posición $\mathbf{r}_{CA}$ y vector unitario $\mathbf{e}_{OC}$.



(b) Determinación de las componentes x y y de $\mathbf{r}_{CA}$.

En función del vector $\mathbf{r}_{CA}$ del punto C sobre el eje al punto de aplicación de la fuerza, y del vector unitario $\mathbf{e}_{OC}$ que apunta del punto O a C a lo largo del eje (Fig. a), el momento de $\mathbf{F}$ respecto al eje es

$$\mathbf{M}_{OC} = [\mathbf{e}_{OC} \cdot (\mathbf{r}_{CA} \times \mathbf{F})]\,\mathbf{e}_{OC}.$$

De la figura (a), el vector unitario $\mathbf{e}_{OC}$ es

$$\mathbf{e}_{OC} = \cos 20^\circ\,\mathbf{i} + \operatorname{sen} 20^\circ\mathbf{j},$$

y la componente z de $\mathbf{r}_{CA}$ es $-R \operatorname{sen}\alpha$. Observando el volante con el eje z perpendicular a la página (Fig. b), vemos que la componente x de $\mathbf{r}_{CA}$ es $R\cos\alpha \operatorname{sen} 20^\circ$ y la componente y es $-R\cos\alpha\cos 20^\circ$, por lo que

$$\mathbf{r}_{CA} = R(\cos\alpha \operatorname{sen} 20^\circ\,\mathbf{i} - \cos\alpha\cos 20^\circ\,\mathbf{j} - \operatorname{sen}\alpha\,\mathbf{k}).$$

La magnitud de $\mathbf{M}_{OC}$ es el valor absoluto del escalar

$$\mathbf{e}_{OC} \cdot (\mathbf{r}_{CA} \times \mathbf{F}) = \begin{vmatrix} \cos 20^\circ & \operatorname{sen} 20^\circ & 0 \\ R\cos\alpha \operatorname{sen} 20^\circ & -R\cos\alpha\cos 20^\circ & -R\operatorname{sen}\alpha \\ 10\operatorname{sen}\alpha & 10\operatorname{sen}\alpha & -5\operatorname{sen}\alpha \end{vmatrix}$$

$$= R\,[5\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha + 10(\cos 20^\circ - \operatorname{sen} 20^\circ)\operatorname{sen}^2\alpha].$$

Calculando el valor absoluto de esta expresión en función de α obtenemos la gráfica de la figura 4.49. La magnitud del momento es un máximo para valores de α de 70° y 250° aproximadamente. Examinando los resultados calculados cerca de $\alpha = 70°$,

α	$\lvert\mathbf{M}_{OC}\rvert$, N-m
67°	1.3725
68°	1.3749
69°	1.3764
70°	1.3769
71°	1.3765
72°	1.3751
73°	1.3728

vemos que el valor máximo es aproximadamente de 1.38 N-m. El valor del momento en $\alpha = 250°$ también es de 1.38 N-m.

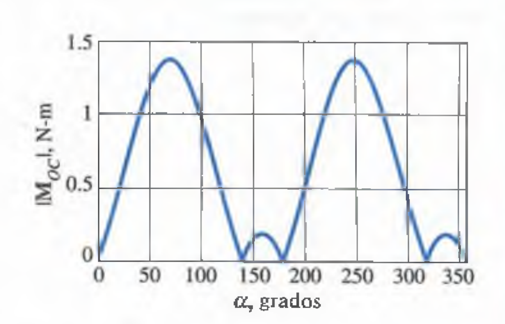
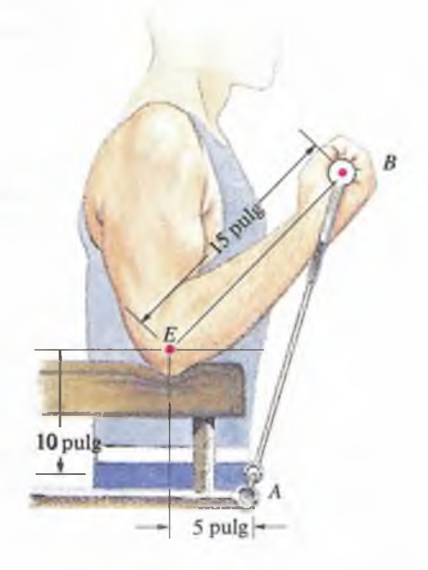


Figura 4.49
Magnitud del momento en función de α.

Problemas

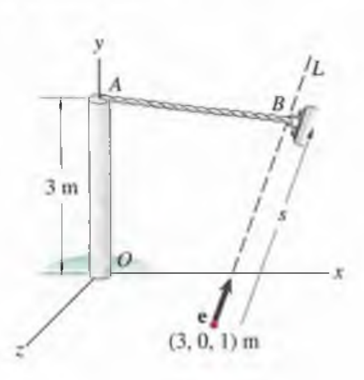
4.159 Considere el sistema descrito en el problema 4.37.
(a) Obtenga una gráfica del momento respecto a A debido a la fuerza ejercida por el resorte sobre la barra circular en B, para valores del ángulo α de 0 a 90°.
(b) Use el resultado de la parte (a) para calcular el ángulo en que se presenta el momento máximo y el valor de éste.

4.160 El equipo de gimnasia mostrado se usa para descansar el codo sobre el cojinete fijo y girar el antebrazo mientras se estira la cuerda elástica AB. La cuerda se comporta como un resorte lineal cuya longitud sin estirar es de 1 pie. Suponga que se quiere diseñar el equipo de manera que el momento máximo que se ejerza respecto a la junta E en el codo al girar el brazo sea de 60 lb-pie. ¿Qué valor debe tener entonces la constante k de resorte de la cuerda elástica?



P4.160

4.161 El cable de soporte mostrado se extiende desde el punto A en la parte superior de la columna de tres metros de altura hasta el punto B sobre la línea L. La tensión en el cable es de 2 kN. La línea L interseca el suelo en el punto (3, 0, 1) m y es paralela al vector unitario $\mathbf{e} = \frac{2}{7}\mathbf{i} + \frac{6}{7}\mathbf{j} - \frac{3}{7}\mathbf{k}$. La distancia a lo largo de L del suelo al punto B se denota con s. ¿Cuál es el intervalo de valores de s para los cuales la magnitud del momento respecto a O debido a la fuerza ejercida por el cable en A excede de 5.6 kN-m?



P4.161

4.162 Considere el problema 4.94. Determine la distancia d que hace que el momento respecto al eje z debido a la fuerza ejercida por el cable CD en el punto C sea máximo. ¿Qué valor tiene el momento máximo?

4.163 Considere el problema 4.95. La barra AB debe ejercer un momento de 100 lb-pie respecto al eje x para soportar la cubierta del automóvil. Dibuje una gráfica de la magnitud de la fuerza que la barra debe ejercer sobre la cubierta en B como función de d para $1 \leq d \leq 4$ pies. Si usted fuera a diseñar el soporte AB, ¿qué valor de d escogería y cuál es la magnitud de la fuerza AB que se debe ejercer sobre la cubierta?

4.164 Considere el sistema mostrado en el problema 4.132. Las fuerzas ejercidas por los cables AB y CD sobre el poste izquierdo se pueden representar con una sola fuerza **F**. Determine las tensiones en los cables de modo que $|\mathbf{F}| = 600$ N y la línea de acción de **F** interseque el eje y en $y = 400$ mm.

4.165 Suponga que se desea representar la fuerza y el par de 200 N-m del problema 4.150 con una fuerza **F** y un par **M**, y escoger la distancia s de manera que la magnitud de **M** sea mínima. Determine s, **F** y **M**.

Resumen del capítulo

Momento de una fuerza respecto a un punto

El momento de una fuerza respecto a un punto es la medida de la tendencia de la fuerza a causar rotaciones alrededor del punto. El **momento** de una fuerza **F** respecto a un punto O es el vector

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{F}. \qquad \text{Ec. (4.2)}$$

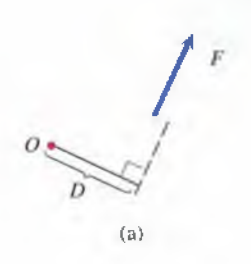
donde **r** es un vector de posición de O a *cualquier* punto sobre la línea de acción de **F**. La magnitud de $\mathbf{M}_O$ es igual al producto de la distancia perpendicular D de O a la línea de acción de **F** y la magnitud de **F**:

$$|\mathbf{M}_O| = D|\mathbf{F}|. \qquad \text{Ec. (4.3)}$$

El vector $\mathbf{M}_O$ es perpendicular al plano que contiene O y **F**. Cuando el pulgar de la mano derecha apunta hacia $\mathbf{M}_O$, el arco de los dedos indica el sentido de la rotación que **F** tiende a causar alrededor de O. Las dimensiones del momento son (fuerza) × (distancia).

Si una fuerza se separa en sus componentes, el momento de la fuerza respecto a un punto O es igual a la suma de los momentos de sus componentes respecto a O. Si la línea de acción de una fuerza pasa por un punto O, el momento de la fuerza respecto a O es cero.

Cuando la vista es perpendicular al plano que contiene a la fuerza y al punto (Fig. a), la descripción bidimensional del momento es



(a)

$$M_O = DF \qquad \text{Ec. (4.1)}$$

Momento de una fuerza respecto a una línea

El momento de una fuerza respecto a una línea es la medida de la tendencia de la fuerza a causar una rotación alrededor de la línea. Sea O cualquier punto sobre una línea L y sea $\mathbf{M}_0$ el momento respecto a O de una fuerza $\mathbf{F}$. El momento $\mathbf{M}_L$ de $\mathbf{F}$ respecto a L es la componente vectorial de $\mathbf{M}_0$ paralela a L. Si $\mathbf{e}$ es un vector unitario a lo largo de L,

$$\mathbf{M}_L = (\mathbf{e} \cdot \mathbf{M}_0)\mathbf{e} = [\mathbf{e} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{F})]\,\mathbf{e}. \qquad \text{Ecs. (4.4), (4.5)}$$

Cuando la línea de acción de $\mathbf{F}$ es perpendicular a un plano que contiene a L, $|\mathbf{M}_L|$ es igual al producto de la magnitud de $\mathbf{F}$ y la distancia D perpendicular de L al punto en que la línea de acción corta el plano. Cuando la línea de acción de $\mathbf{F}$ es paralela a L o interseca L, $\mathbf{M}_L = \mathbf{0}$.

Pares

Dos fuerzas que tienen iguales magnitudes pero direcciones opuestas y no tienen la misma línea de acción se conocen como **par**. El momento $\mathbf{M}$ de un par es el mismo respecto a cualquier punto. La magnitud de $\mathbf{M}$ es igual al producto de la magnitud de una de las fuerzas y la distancia perpendicular entre las líneas de acción, y su dirección es perpendicular al plano que contiene a las líneas de acción.

Como un par ejerce un momento pero ninguna fuerza, se puede representar mostrando el vector de momento (Fig. b), o se puede representar en dos dimensiones mostrando la magnitud del momento y una flecha circular que indique su sentido (Fig. c). El momento representado de esta manera se llama **momento de un par**, o simplemente **par**.



(b) (c)

Sistemas equivalentes

Dos sistemas de fuerzas y momentos se definen como **equivalentes** si las sumas de las fuerzas son iguales,

$$(\Sigma \mathbf{F})_1 = (\Sigma \mathbf{F})_2,$$

y las sumas de los momentos respecto a un punto O son iguales,

$$(\Sigma \mathbf{M}_0)_1 = (\Sigma \mathbf{M}_0)_2.$$

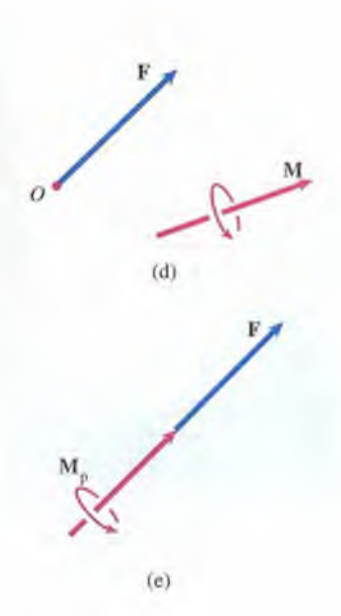
Si las sumas de las fuerzas son iguales y las sumas de los momentos respecto a un punto también son iguales, entonces las sumas de los momentos respecto a cualquier punto son iguales.

Representación de sistemas por medio de sistemas equivalentes

Si el sistema de fuerzas y momentos que actúa sobre un objeto se representa con un sistema equivalente, el sistema equivalente ejerce la misma fuerza total y el mismo momento total sobre el objeto.

Cualquier sistema se puede representar con un sistema equivalente que consista en una fuerza $\mathbf{F}$ que actúe en un punto O dado y un par $\mathbf{M}$ (Fig. d). El sistema más simple que puede ser equivalente a cualquier sistema de fuerzas y momentos es la **llave de torsión**, que es una fuerza $\mathbf{F}$ y un par $\mathbf{M}_p$ paralelo a $\mathbf{F}$ (Fig. e).

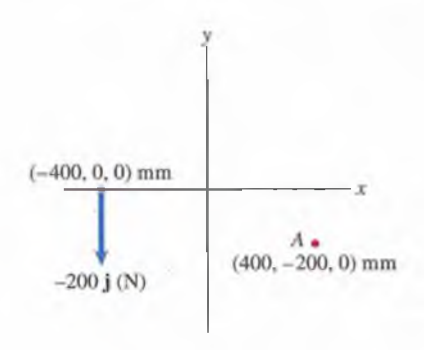
Un sistema de fuerzas concurrentes se puede representar con una sola fuerza. Un sistema de fuerzas paralelas cuya suma no es cero también se puede representar con una sola fuerza.



(d)
(e)

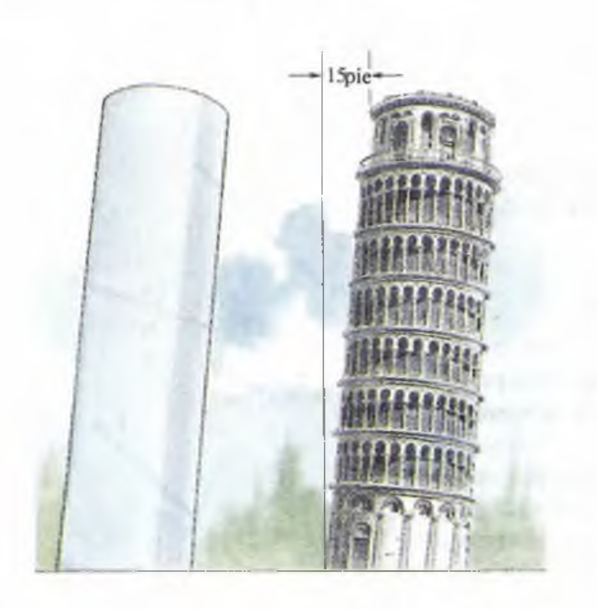
Problemas de repaso

4.166 Determine el momento de la fuerza de 200 N mostrada respecto a A.
(a) ¿Cuál es la descripción bidimensional del momento?
(b) Exprese el momento como un vector.



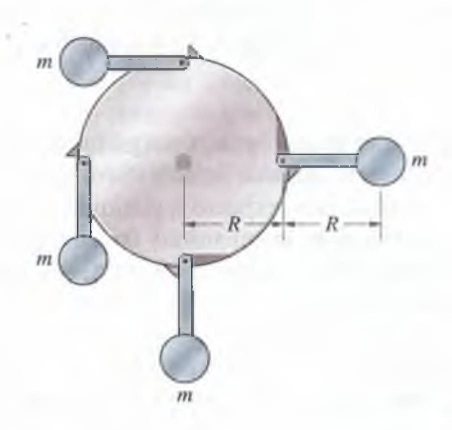
P4.166

4.167 La torre inclinada de Pisa tiene alrededor de 180 pies de altura y 23 pies de diámetro. El desplazamiento horizontal de la parte superior de la torre desde la vertical es de aproximadamente 15 pies. Si la torre se modela como un cilindro y se supone que pesa 7×10^6 lb con este peso actuando en el centro, ¿cuál es la magnitud del momento ejercido por el peso respecto al punto en el centro de su base?



P4.167

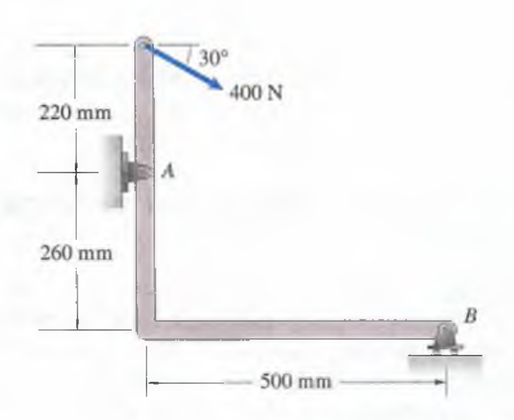
4.168 El dispositivo mostrado se ha sugerido como un diseño para una máquina de movimiento perpetuo. Determine el momento respecto al eje de rotación debido a las cuatro masas como una función del ángulo cuando el dispositivo gira 90° en sentido horario desde la posición mostrada, e indique si la gravedad podría causar rotación en esa dirección.



P4.168

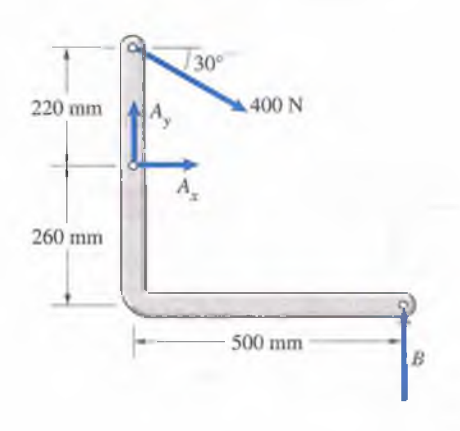
4.169 En el problema 4.168, determine si la gravedad podría causar una rotación en el sentido antihorario.

4.170 Determine el momento de la fuerza de 400 N (a) respecto a A y (b) respecto a B.



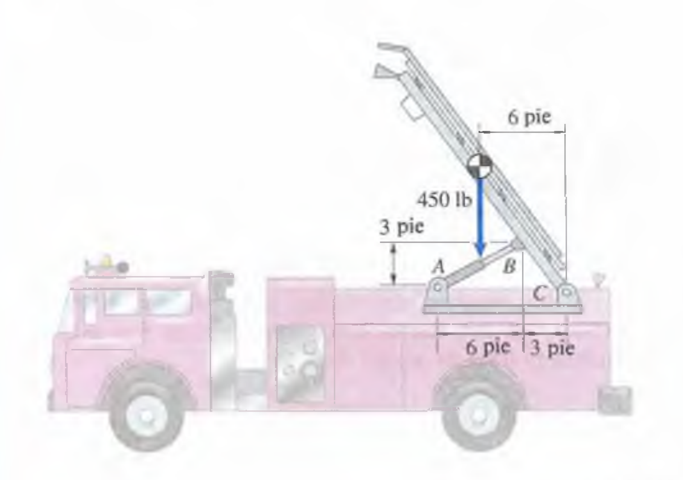
P4.170

4.171 Tanto la suma vectorial de las fuerzas que actúan sobre la viga mostrada, como la suma de los momentos respecto a A, son iguales a cero.
(a) ¿Qué valor tienen las fuerzas A_x, A_y y B?
(b) ¿Qué valor tiene la suma de los momentos respecto a B?



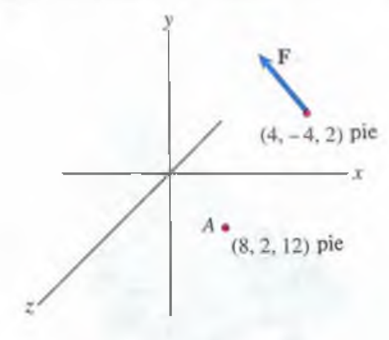
P4.171

4.172 Para soportar la escalera, la fuerza ejercida en B por el émbolo hidráulico AB de la figura debe ejercer un momento respecto a C de igual magnitud que el momento respecto a C debido al peso de 450 lb de la escalera. ¿Cuál es la magnitud de la fuerza ejercida en B?



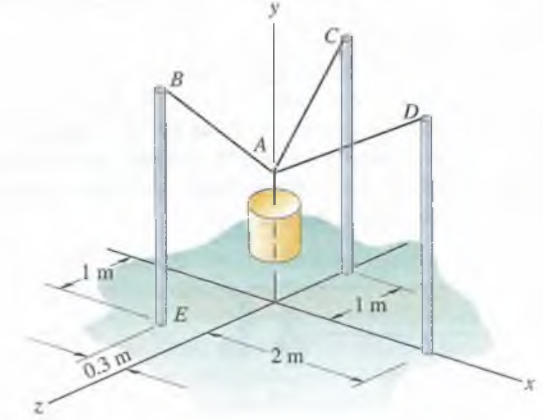
P4.172

4.173 Se tiene una fuerza $\mathbf{F} = -60\mathbf{i} + 60\mathbf{j}$ (lb).
(a) Determine el momento de $\mathbf{F}$ respecto al punto A de la figura.
(b) ¿Cuál es la distancia perpendicular del punto A a la línea de acción de $\mathbf{F}$?



P4.173

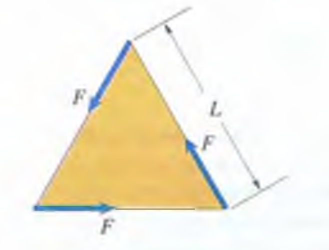
4.174 La masa de 20 kg de la figura está suspendida por cables unidos a tres postes verticales de 2 metros de altura. El punto A se halla en (0, 1.2, 0) m. Determine el momento respecto a la base E debido a la fuerza ejercida por el cable AB sobre el poste BE.



P4.174

4.175 Tres fuerzas de igual magnitud se aplican paralelamente a los lados de un triángulo equilátero.
(a) Demuestre que la suma de los momentos de las fuerzas es la misma respecto a cualquier punto.
(b) Determine la magnitud del momento.

Estrategia: Para la parte (a), descomponga una de las fuerzas en componentes vectoriales paralelas a las otras dos fuerzas.



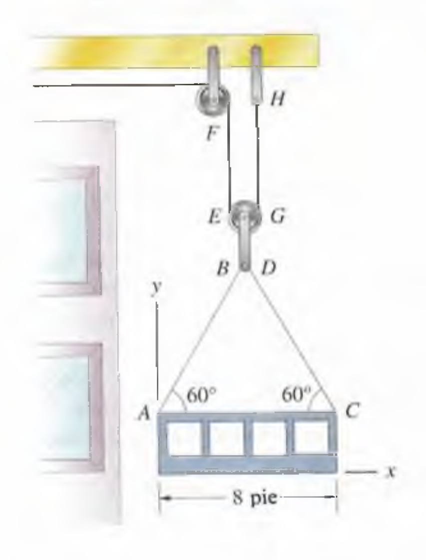
P4.175

4.176 La barra AB que soporta la tapa del piano ejerce una fuerza $\mathbf{F} = -6\mathbf{i} + 35\mathbf{j} - 12\mathbf{k}$ (lb) en B. Las coordenadas de B son (3, 4, 3) pies. ¿Qué valor tiene el momento de la fuerza respecto a la línea de bisagras de la tapa (eje x)?



P4.176

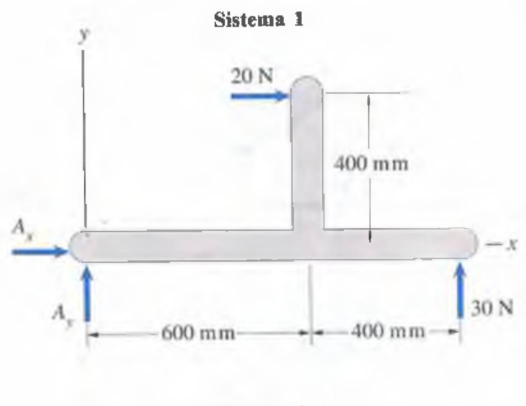
4.177 El sistema de cables y poleas mostrado soporta la mitad del peso de 600 lb de la plataforma de trabajo. Si la fuerza ejercida hacia arriba en E por el cable EF y la fuerza hacia arriba ejercida en G por el cable GH se representa con una sola fuerza equivalente **F**, ¿cuál es el valor de **F** y en qué punto corta su línea de acción el eje x?

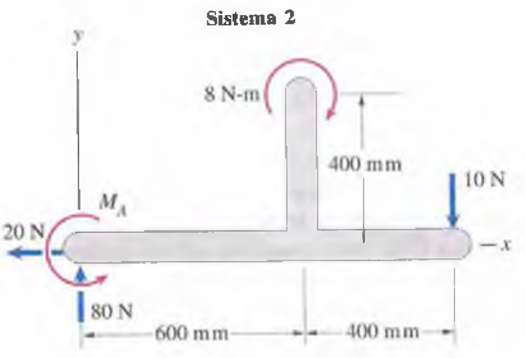


P4.177

4.178 Considere el sistema en el problema 4.177.
(a) ¿Qué valor tienen las tensiones en los cables AB y CD?
(b) Si las fuerzas ejercidas por los cables en A y C se representan con una sola fuerza equivalente **F**, ¿qué valor tiene **F** y en qué punto corta su línea de acción el eje x?

4.179 Los dos sistemas son equivalentes. Determine las fuerzas A_x y A_y y el par M_A.





P4.179

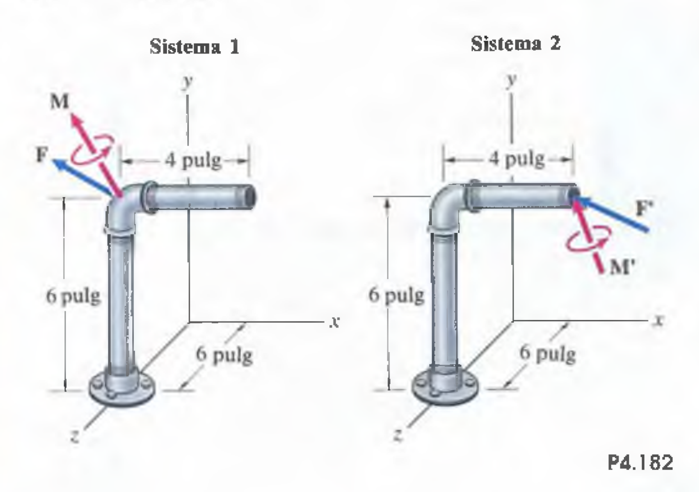
4.180 Si los sistemas equivalentes del problema 4.179 se representan con una fuerza **F** que actúa en el origen y un par M, ¿qué valor tienen **F** y M?

4.181 Si los sistemas equivalentes del problema 4.179 se representan con una fuerza **F**, ¿qué valor tiene **F** y en qué punto corta su línea de acción el eje x?

4.182 Los dos sistemas mostrados son equivalentes. Si

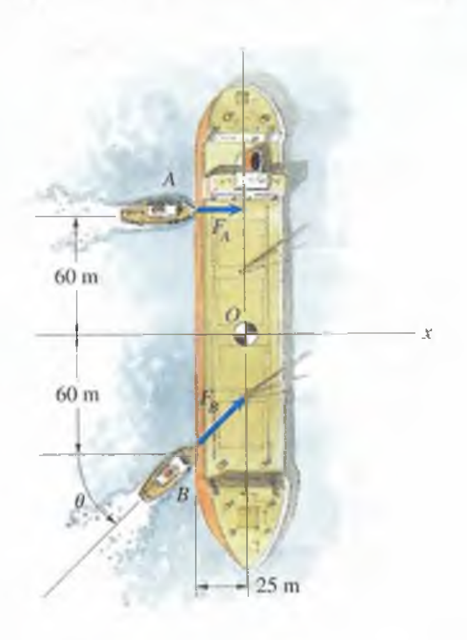
$$\mathbf{F} = -100\mathbf{i} + 40\mathbf{j} + 30\mathbf{k} \text{ (lb)},$$
$$\mathbf{M}' = -80\mathbf{i} + 120\mathbf{j} + 40\mathbf{k} \text{ (lb-pie)},$$

determine $\mathbf{F}'$ y $\mathbf{M}$.



P4.182

4.183 Los remolcadores A y B de la figura ejercen fuerzas $F_A = 1$ kN y $F_B = 1.2$ kN sobre el barco. El ángulo $\theta = 30°$. Si las dos fuerzas se representan con una fuerza **F** que actúa en el origen O y un par M, ¿qué valor tienen **F** y M?

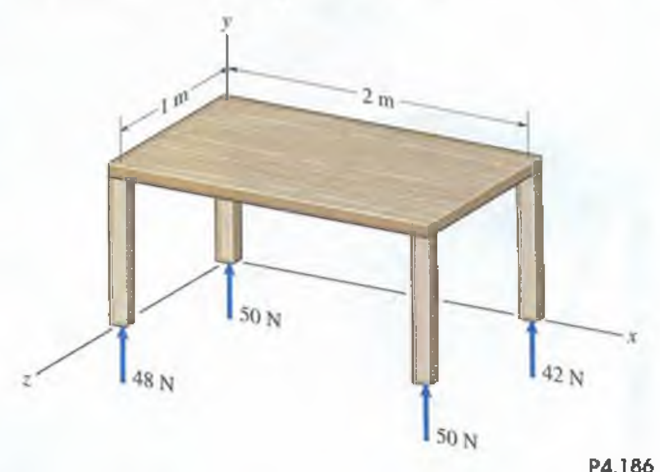


P4.183

4.184 Los remolcadores A y B el problema 4.183 ejercen fuerzas $F_A = 600$ N y $F_B = 800$ N sobre el barco. El ángulo $\theta = 45°$. Si las dos fuerzas se representan con una fuerza **F**, ¿qué valor tiene **F** y en qué punto corta su línea de acción el eje y?

4.185 Los remolcadores A y B del problema 4.183 quieren ejercer dos fuerzas sobre el barco que sean equivalentes a una fuerza **F** de 2 kN de magnitud actuando en el origen O. Si $F_A = 800$ N, determine los valores necesarios de F_B y θ.

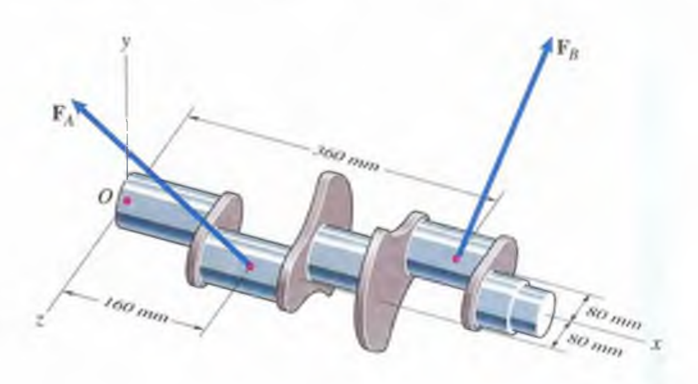
4.186 Si las fuerzas ejercidas por el piso sobre las patas de la mesa mostrada se representan con una fuerza **F** que actúa en el origen O y un par **M**, ¿qué valor tienen **F** y **M**?



P4.186

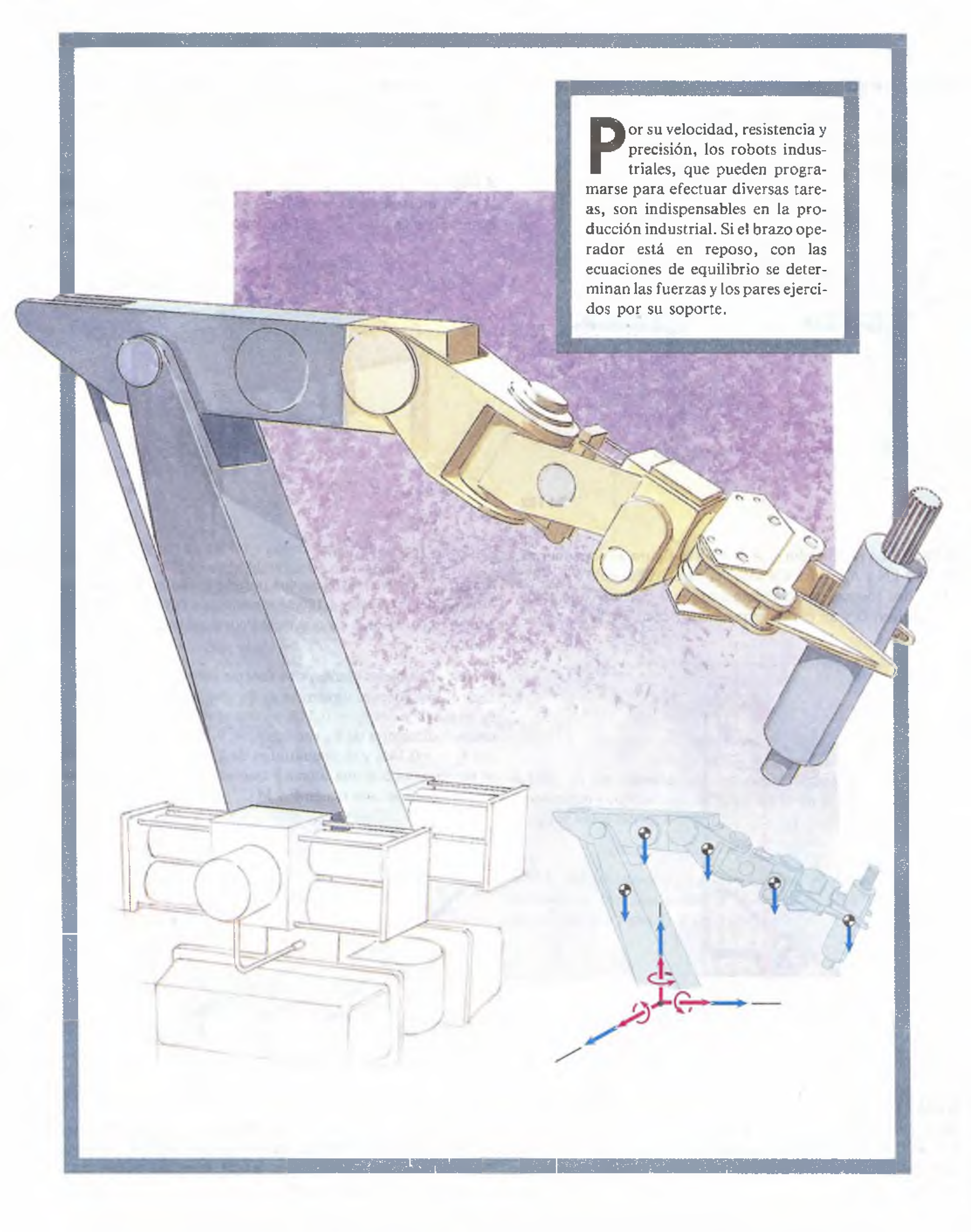
4.187 Si las fuerzas ejercidas por el piso sobre las patas de la mesa del problema 4.186 se representan con una fuerza **F**, ¿qué valor tiene **F** y en qué punto corta su línea de acción el plano x-z?

4.188 Las bielas ejercen dos fuerzas sobre el cigüeñal de la figura. Los cosenos directores de $\mathbf{F}_A$ son $\cos\theta_x = -0.182$, $\cos\theta_y = 0.818$ y $\cos\theta_z = 0.545$, y su magnitud es de 4 kN. Los cosenos directores de $\mathbf{F}_B$ son $\cos\theta_x = 0.182$, $\cos\theta_y = 0.818$ y $\cos\theta_z = -0.545$, y su magnitud es de 2 kN. Si las dos fuerzas se representan con una fuerza **F** que actúa en el origen O y un par **M**, ¿qué valores tienen **F** y **M**?



P4.188

4.189 Si las dos fuerzas del problema 4.188 se representan con una llave de torsión que consiste en una fuerza **F** y un par paralelo $\mathbf{M}_p$, ¿qué valores tienen **F** y $\mathbf{M}_p$ y en qué punto corta la línea de acción de **F** el plano x-z?



Por su velocidad, resistencia y precisión, los robots industriales, que pueden programarse para efectuar diversas tareas, son indispensables en la producción industrial. Si el brazo operador está en reposo, con las ecuaciones de equilibrio se determinan las fuerzas y los pares ejercidos por su soporte.

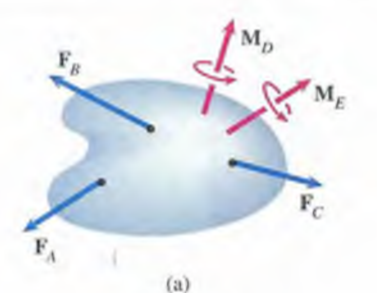
Capítulo 5

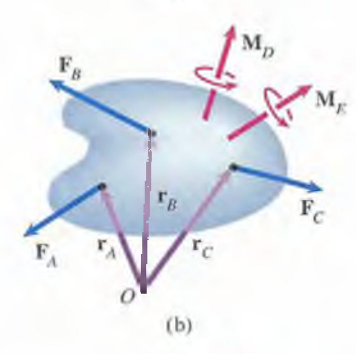
Cuerpos en equilibrio

LA estática es el análisis de cuerpos en equilibrio, incluidos los operadores robóticos, los puentes, las presas y los edificios. Ahora que ya hemos aprendido a calcular momentos, podemos enfrentarnos a problemas de equilibrio más interesantes.

En este capítulo establecemos las ecuaciones de equilibrio y describimos modelos sencillos de los diversos tipos de soportes utilizados en ingeniería. Luego mostramos cómo usar las ecuaciones de equilibrio para obtener información respecto a los sistemas de fuerzas y momentos que actúan sobre los cuerpos.

5.1 *Ecuaciones de equilibrio*





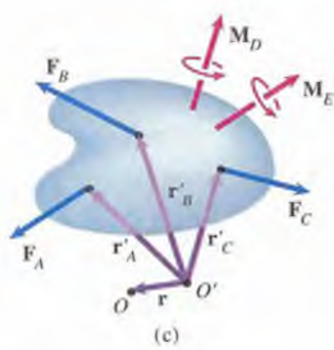


Figura 5.1

(a) Cuerpo sometido a un sistema de fuerzas y momentos.
(b) Determinación de la suma de los momentos respecto a O.
(c) Determinación de la suma de los momentos respecto a un punto diferente de O'.

En el capítulo 3 definimos que un cuerpo está en equilibrio cuando se encuentra en reposo o en traslación uniforme relativa a un marco de referencia inercial. Cuando un cuerpo sobre el cual actúa un sistema de fuerzas y momentos está en equilibrio, se cumplen las siguientes condiciones.

1. La suma de las fuerzas es igual a cero,

$$\boxed{\Sigma \mathbf{F} = \mathbf{0}.} \tag{5.1}$$

2. La suma de los momentos respecto a cualquier punto es igual a cero,

$$\boxed{\Sigma \mathbf{M}_{(\text{cualquier punto})} = \mathbf{0}.} \tag{5.2}$$

Hagamos algunas observaciones generales sobre estas ecuaciones. Si la suma de las fuerzas que actúan sobre un cuerpo y la suma de los momentos respecto a un punto son nulas, entonces la suma de los momentos respecto a *cualquier* punto es también nula. Para demostrar esto consideremos el cuerpo mostrado en la figura 5.1(a), que está sometido a las fuerzas $\mathbf{F}_A$, $\mathbf{F}_B$ y $\mathbf{F}_C$ y a los pares $\mathbf{M}_D$ y $\mathbf{M}_E$. Si la suma de las fuerzas es nula,

$$\Sigma \mathbf{F} = \mathbf{F}_A + \mathbf{F}_B + \mathbf{F}_C = \mathbf{0},$$

y la suma de los momentos respecto a un punto O es igual a cero (Fig. 5.1b),

$$\Sigma \mathbf{M}_O = (\mathbf{r}_A \times \mathbf{F}_A) + (\mathbf{r}_B \times \mathbf{F}_B) + (\mathbf{r}_C \times \mathbf{F}_C) + \mathbf{M}_D + \mathbf{M}_E = \mathbf{0},$$

podemos elegir cualquier otro punto O' (Fig. 5.1c) y demostrar que la suma de los momentos respecto a O' es igual a cero. Es decir, demostraremos que

$$\Sigma \mathbf{M}_{O'} = (\mathbf{r}'_A \times \mathbf{F}_A) + (\mathbf{r}'_B \times \mathbf{F}_B) + (\mathbf{r}'_C \times \mathbf{F}_C) + \mathbf{M}_D + \mathbf{M}_E$$
$$= \mathbf{0}. \tag{5.3}$$

En función del vector $\mathbf{r}$ de O' a O, observe que

$$\mathbf{r}'_A = \mathbf{r} + \mathbf{r}_A, \qquad \mathbf{r}'_B = \mathbf{r} + \mathbf{r}_B, \qquad \mathbf{r}'_C = \mathbf{r} + \mathbf{r}_C.$$

Sustituyendo en la ecuación (5.3), se tiene

$$\begin{aligned}\Sigma \mathbf{M}_{O'} &= (\mathbf{r} + \mathbf{r}_A) \times \mathbf{F}_A + (\mathbf{r} + \mathbf{r}_B) \times \mathbf{F}_B \\ &\quad + (\mathbf{r} + \mathbf{r}_C) \times \mathbf{F}_C + \mathbf{M}_D + \mathbf{M}_E \\ &= \mathbf{r} \times (\mathbf{F}_A + \mathbf{F}_B + \mathbf{F}_C) \\ &\quad + (\mathbf{r}_A \times \mathbf{F}_A + \mathbf{r}_B \times \mathbf{F}_B + \mathbf{r}_C \times \mathbf{F}_C + \mathbf{M}_D + \mathbf{M}_E) \\ &= \mathbf{r} \times \Sigma \mathbf{F} + \Sigma \mathbf{M}_O = \mathbf{0}.\end{aligned}$$

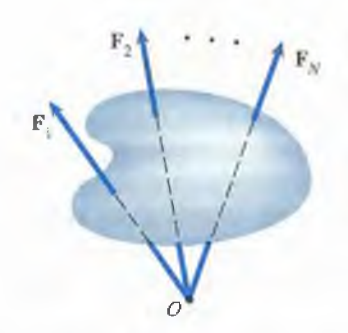


Figura 5.2
Cuerpo sometido a fuerzas concurrentes.

Tenemos un cuerpo sometido a las fuerzas concurrentes $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2,\ldots$, $\mathbf{F}_N$ y a ningún par. Si la suma de las fuerzas concurrentes es cero, la ecuación (5.2) se cumple de manera idéntica. La suma de los momentos de las fuerzas respecto a O es igual a cero, por lo que la suma de los momentos respecto a cualquier punto es igual a cero. La única condición de equilibrio en un conjunto de fuerzas concurrentes es que su suma sea igual a cero.

En el capítulo 4 determinamos el momento de una fuerza respecto a una línea. Para determinar la suma de los momentos respecto a una línea debidos a un sistema de fuerzas y momentos, se elige primero cualquier punto O sobre la línea y se determina la suma de los momentos $\Sigma\mathbf{M}_0$ respecto a O. La suma de los momentos respecto a la línea es entonces la componente de $\Sigma\mathbf{M}_0$ paralela a la línea. Si un cuerpo está en equilibrio, $\Sigma\mathbf{M}_0 = 0$, por lo que la suma de los momentos respecto a cualquier línea también es cero. Este resultado será útil en ciertos tipos de problemas.

5.2 *Aplicaciones bidimensionales*

Muchas aplicaciones en ingeniería implican sistemas de fuerzas y momentos. Por ejemplo, fuerzas y momentos ejercidos sobre diferentes vigas y estructuras planas, pinzas, algunas grúas y otras máquinas, así como ciertos tipos de puentes y presas. Aquí analizamos soportes, diagramas de cuerpo libre y las ecuaciones de equilibrio para aplicaciones bidimensionales.

Soportes

Estando de pie, el piso nos soporta; sentados en una silla, ésta nos soporta. Ahora veremos cómo los cuerpos se mantienen en su lugar o están unidos a otros. Las fuerzas y pares ejercidos sobre un cuerpo por sus soportes se denominan **reacciones**, lo que expresa el hecho de que los soportes "reaccionan" a las otras fuerzas y pares, o **cargas**, que actúan sobre el cuerpo. Por ejemplo, un puente se sostiene gracias a las reacciones ejercidas por sus soportes, y las cargas son las fuerzas ejercidas por el peso del mismo puente, el tránsito que lo cruza, y el viento.

Algunos tipos muy comunes de soportes se representan con modelos estilizados llamados **convenciones de soporte**. Los soportes reales a menudo se parecen a los modelos estilizados, pero aunque no se parecieran, los representamos por medio de estos modelos si los soportes reales ejercen las mismas (o aproximadamente las mismas) reacciones que los modelos.

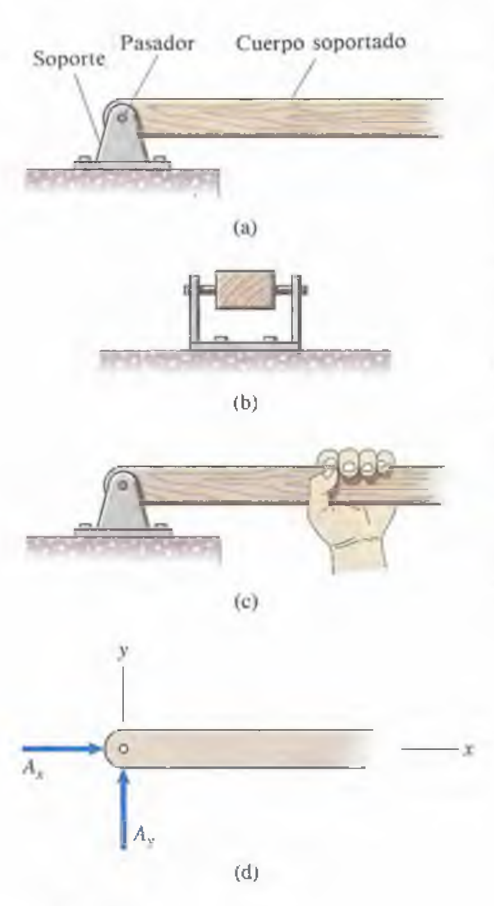


Figura 5.3
(a) Soporte de pasador.
(b) Vista lateral que muestra el pasador atravesando la viga.
(c) Sujetando una barra soportada.
(d) El soporte de pasador es capaz de generar dos componentes de fuerza.

Soporte de pasador Tenemos un **soporte de pasador**; un soporte al cual está unido un cuerpo (p. ej., una viga) con un pasador liso que pasa por el soporte y el cuerpo. La parte (b) es una vista lateral.

Para entender qué reacciones puede generar un soporte de pasador, imaginémonos sosteniendo una barra unida a un soporte de pasador (Fig. c). Si tratamos de mover la barra sin hacerla girar (es decir, **trasladar** la barra), el soporte ejerce una fuerza reactiva que lo impide. Sin embargo, sí se puede hacer girar la barra alrededor del eje del pasador. El soporte no puede generar un par respecto al eje del pasador para impedir el giro. Así, un soporte de pasador no puede generar un par respecto al eje del pasador pero sí puede ejercer una fuerza sobre un cuerpo en cualquier dirección, lo que comúnmente se expresa representando la fuerza en términos de sus componentes (Fig. 5.3d). Las flechas indican las direcciones de las reacciones si A_x y A_y son positivas. Si se determina que A_x o A_y son negativas, la reacción tendrá la dirección opuesta a la de la flecha.

Con un soporte de pasador se representa cualquier soporte real capaz de ejercer una fuerza en cualquier dirección sin generar un par. Hay soportes de pasador en muchos dispositivos comunes, como los diseñados para que partes conectadas giren una respecto a la otra (Fig. 5.4).

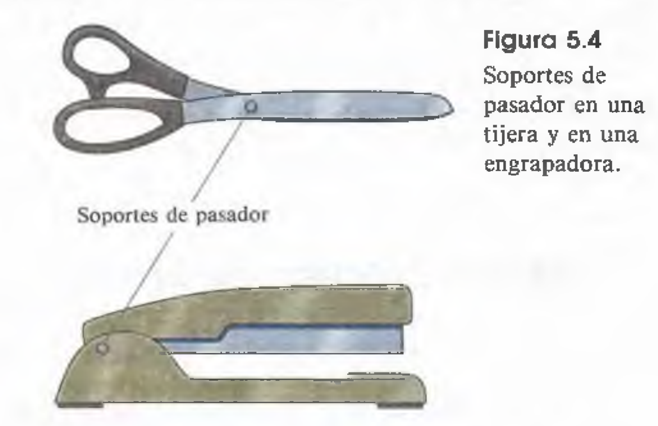
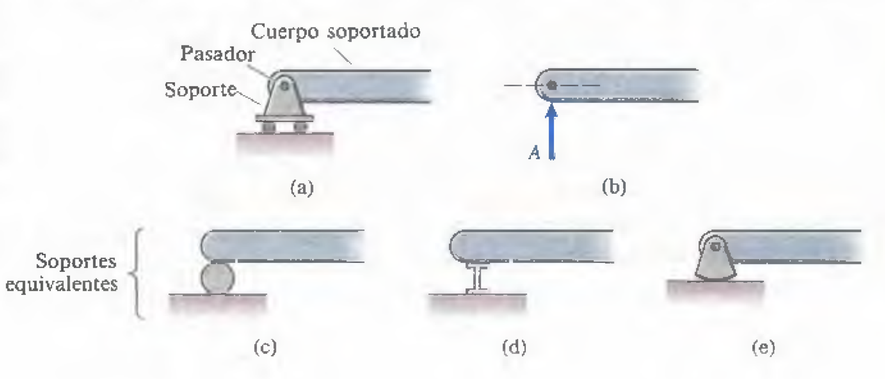


Figura 5.4
Soportes de pasador en una tijera y en una engrapadora.

Soporte de rodillo El **soporte de rodillo** (Fig. 5.5a) es un soporte de pasador montado sobre ruedas. Como el soporte de pasador, el de rodillo no puede generar un par respecto al eje del pasador. Como se puede mover con libertad en la dirección paralela a la superficie sobre la que rueda, no puede generar una fuerza paralela a la superficie sino sólo una fuerza normal (perpendicular) a ella (Fig. 5.5b). Las figuras 5.5(c)-(e) son otras convenciones usadas comúnmente como equivalentes al soporte de rodi-

Figura 5.5
(a) Soporte de rodillos.
(b) La reacción consiste en una fuerza normal a la superficie.
(c)-(e) Soportes equivalentes al soporte de rodillos.



llo. Las ruedas de vehículos y las ruedas que soportan partes de máquinas son soportes de rodillo si las fuerzas de fricción ejercidas sobre ellas son despreciables en comparación con las fuerzas normales. Una superficie plana y lisa también se puede representar por medio de un soporte de rodillo (Fig. 5.6). Las vigas y los puentes a veces están soportados de esta manera, para que absorban dilataciones y contensiones térmicas.



Figura 5.6
Soporte de un cuerpo por medio de una superficie plana y lisa.

Los soportes de la figura 5.7 son similares al soporte de rodillo en que no pueden generar un par sino sólo una fuerza normal a una dirección particular (la fricción se desprecia). El cuerpo soportado está unido a un pasador o **deslizador** que se mueve libremente en una dirección pero no en la dirección perpendicular. A diferencia de los de rodillo, estos soportes pueden ejercer una fuerza normal en cualquier sentido.

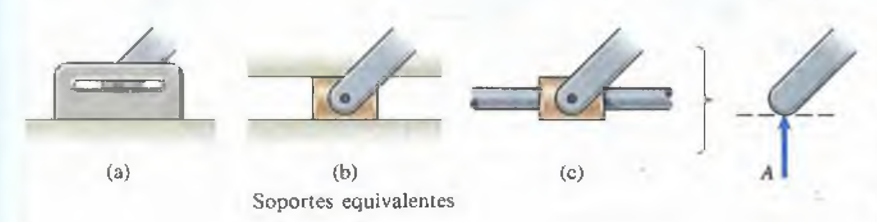


Figura 5.7
Soportes similares al soporte de rodillo excepto que la fuerza normal se puede ejercer en cualquier dirección.
(a) Pasador en una ranura.
(b) Deslizador en una ranura.
(c) Deslizador sobre un árbol.

Soporte de empotramiento El **soporte de empotramiento**, o **soporte fijo**, presenta el objeto soportado literalmente empotrado en la pared (Fig. 5.8a). Para entender sus reacciones, imaginémonos sujetando una barra empotrada en la pared (Fig. 5.8b). Si intentamos trasladar la barra, el soporte genera una fuerza reactiva que lo impide; si tratamos de hacerla girar, el soporte genera un par reactivo que lo impide. Un empotramiento puede generar dos componentes de fuerza y un par (Fig. 5.8c). El término M_A es el par generado por el soporte y la flecha curva indica su dirección. Los postes de bardas y los del alumbrado público tienen soportes de empotramiento. Las uniones de partes conectadas que no pueden moverse una con respecto a la otra, como la cabeza y el mango de un martillo, se pueden representar como soportes empotrados.

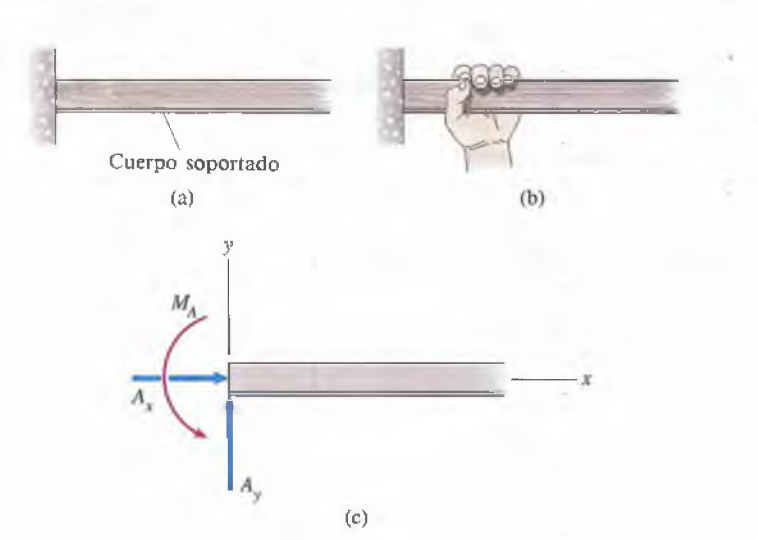


Figura 5.8
(a) Un empotramiento.
(b) Sujetando una barra empotrada.
(c) Reacciones que un empotramiento es capaz de generar.

En la tabla 5.1 se resumen las convenciones de soportes usadas comúnmente en aplicaciones bidimensionales, incluidas las del capítulo 3. Aunque el número de convenciones puede parecer muy grande, los ejemplos y problemas ayudarán a familiarizarse con ellas. El estudiante debería fijarse en cómo están soportados algunos de los cuerpos cotidianos e intentar representar sus soportes con algunas de las convenciones.

Tabla 5.1 Soportes usados en aplicaciones bidimensionales

Soportes	Reacciones
Cuerda o cable; Resorte	T — Una fuerza colineal
Contacto con una superficie lisa	A — Una fuerza normal
Contacto con una superficie rugosa	y, x, A_x, A_y — Dos componentes de fuerza
Soporte de pasador	y, x, A_x, A_y — Dos componentes de fuerza
Soporte de rodillo; Soportes equivalentes	A — Una fuerza normal
Pasador guiado o deslizador	A — Una fuerza normal
Soporte empotrado	y, x, M_A, A_x, A_y — Dos componentes de fuerza y un par

Diagramas de cuerpo libre

En el capítulo 3 presentamos los diagramas de cuerpo libre y los usamos para determinar las fuerzas que actúan sobre cuerpos simples en equilibrio. Con las convenciones de soportes podemos representar cuerpos más elaborados y construir en forma sistemática sus diagramas de cuerpo libre.

La viga mostrada tiene un soporte de pasador en su extremo izquierdo y uno de rodillo en el derecho, y soporta una carga F. El soporte de rodillo está sobre una superficie inclinada 30° respecto a la horizontal. Para obtener el diagrama de cuerpo libre de la viga, la aislamos de sus soportes (Fig. 5.9b), pues el diagrama no debe contener más cuerpos que la viga. Completamos el diagrama con las reacciones que pueden generar los soportes sobre la viga (Fig. 5.9c). Observe que la reacción generada por el soporte de rodillo es normal a la superficie sobre la que descansa.

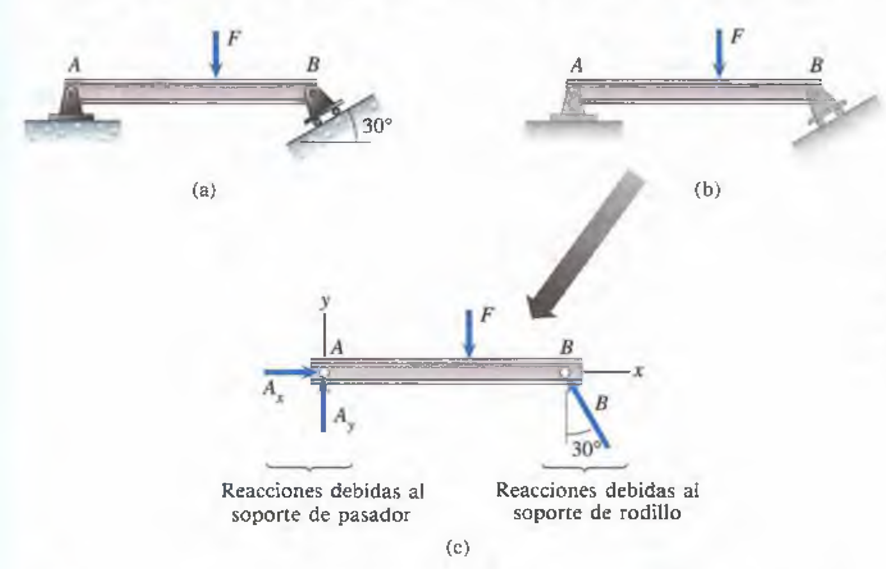
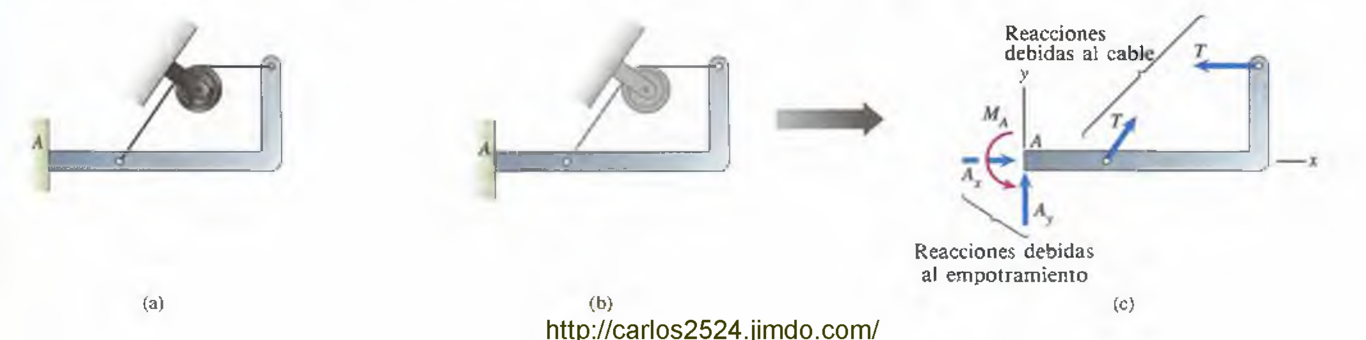


Figura 5.9
(a) Viga con soportes de pasador y de rodillo.
(b) La viga se aísla de sus soportes.
(c) Diagrama de cuerpo libre completo.

Este cuerpo tiene un soporte de empotramiento en su extremo izquierdo. El cable que pasa por la polea está unido al cuerpo en dos puntos. Aislamos el cuerpo de sus soportes (Fig. 5.10b) y completamos el diagrama de cuerpo libre con las reacciones en el empotramiento y las fuerzas ejercidas por el cable (Fig. 5.10c). *No olvide el par en el empotramiento*. Se supuso que la tensión en el cable es la misma en ambos lados de la polea; así, las dos fuerzas ejercidas por el cable tienen la misma magnitud T.

Con el diagrama de cuerpo libre de un cuerpo en equilibrio mostrando cargas y reacciones sobre él, podemos aplicar las ecuaciones de equilibrio.

Figura 5.10
(a) Cuerpo con un soporte empotrado.
(b) Aislamiento del cuerpo.
(c) Diagrama de cuerpo libre completo.



Ecuaciones escalares de equilibrio

Cuando las cargas y las reacciones de un cuerpo en equilibrio forman un sistema bidimensional de fuerzas y momentos, se encuentran relacionadas por tres ecuaciones escalares de equilibrio:

$$\Sigma F_x = 0, \quad (5.4)$$

$$\Sigma F_y = 0, \quad (5.5)$$

$$\Sigma M_{(\text{cualquier punto})} = 0. \quad (5.6)$$

¿De la ecuación (5.6) se puede obtener más de una ecuación al evaluar la suma de los momentos respecto a más de un punto? Sí, y en algunos casos será conveniente hacerlo. Sin embargo, existe una limitación: las ecuaciones adicionales no serán independientes de las ecuaciones (5.4)-(5.6). En otra palabras, **no se pueden obtener más de tres ecuaciones de equilibrio independientes para un diagrama de cuerpo libre bidimensional, lo que implica que no se pueden resolver para más de tres fuerzas o pares desconocidos**. En la sección 5.3 veremos esto con más detalle.

El balancín (una tabla con un soporte de pasador en el centro que le permite girar) es un ejemplo común que ilustra la utilidad de la ecuación (5.6). Si dos personas de peso diferente se sientan en los extremos, la de mayor peso desciende hacia el piso (Fig. 5.11a). Para lograr el equilibrio, esa persona debe acercarse al centro del balancín (Fig. 5.11b).

La figura (c) muestra el diagrama de cuerpo libre del balancín con los pesos W_1 y W_2 y las reacciones en el soporte de pasador. Evaluando la

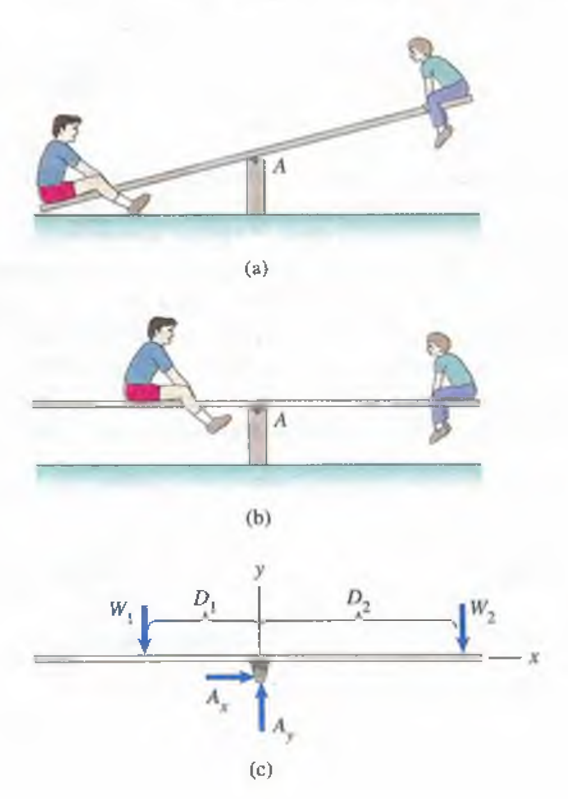


Figura 5.11

(a) Si ambas personas se sientan en los extremos del balancín, la más pesada desciende.
(b) El balancín y las personas en equilibrio.
(c) Diagrama de cuerpo libre del balancín, que muestra los pesos de las personas y las reacciones en el soporte de pasador.

suma de los momentos respecto a A, las ecuaciones de equilibrio son

$$\Sigma F_x = A_x = 0, \qquad (5.7)$$

$$\Sigma F_y = A_y - W_1 - W_2 = 0, \qquad (5.8)$$

$$\Sigma M_{(\text{punto } A)} = D_1 W_1 - D_2 W_2 = 0. \qquad (5.9)$$

Por tanto, $A_x = 0$, $A_y = W_1 + W_2$ y $D_1 W_1 = D_2 W_2$. La última condición indica la relación necesaria entre las posiciones de las dos personas para lograr el equilibrio.

Para demostrar que no se puede obtener una ecuación adicional independiente evaluando la suma de los momentos respecto a un punto diferente, podemos sumar los momentos respecto al extremo derecho del balancín:

$$\Sigma M_{(\text{extremo derecho})} = (D_1 + D_2) W_1 - D_2 A_y = 0.$$

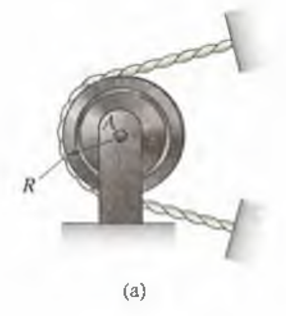
Esta ecuación es una combinación lineal de las ecuaciones (5.8) y (5.9):

$$(D_1 + D_2) W_1 - D_2 A_y = -D_2 \underbrace{(A_y - W_1 - W_2)}_{\text{Ec. (5.8)}} + \underbrace{(D_1 W_1 - D_2 W_2)}_{\text{Ec. (5.9)}} =$$

Hasta ahora hemos supuesto que la tensión en una cuerda o un cable es la misma en ambos lados de una polea. Consideremos la polea de la figura 5.12(a). En su diagrama de cuerpo libre, figura 5.12(b), suponemos que las tensiones no son iguales. Sumando los momentos respecto al centro de la polea, obtenemos la ecuación de equilibrio

$$\Sigma M_{(\text{punto } A)} = RT_1 - RT_2 = 0.$$

Las tensiones deben ser iguales para que la polea esté en equilibrio. Sin embargo, observe que hemos supuesto que el soporte de la polea se comporta como un soporte de pasador y que no puede generar un par sobre la polea. Cuando esto no es así, por ejemplo debido a la fricción entre la polea y el soporte, las tensiones no son necesariamente iguales.



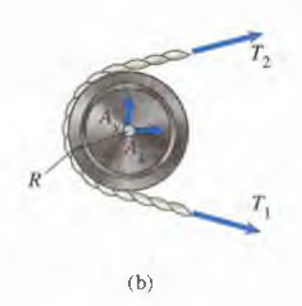


Figura 5.12
(a) Polea de radio R.
(b) Diagrama de cuerpo libre de la polea y parte del cable.

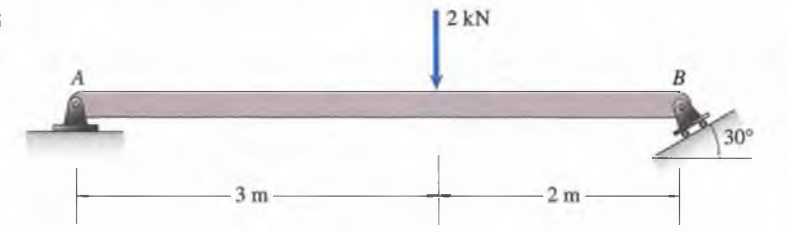
Ahora determinaremos las reacciones generadas sobre cuerpos con diferentes tipos de cargas y soportes. Esto implica dos pasos en el caso general:

1. Dibujar el diagrama de cuerpo libre. *El diagrama de cuerpo libre se obtiene aislando el cuerpo de sus soportes y mostrando las cargas y reacciones que los soportes ejercen sobre el cuerpo.*
2. Aplicar las ecuaciones de equilibrio. *Para determinar las reacciones se usan las ecuaciones (5.4)-(5.6).*

Ejemplo 5.1

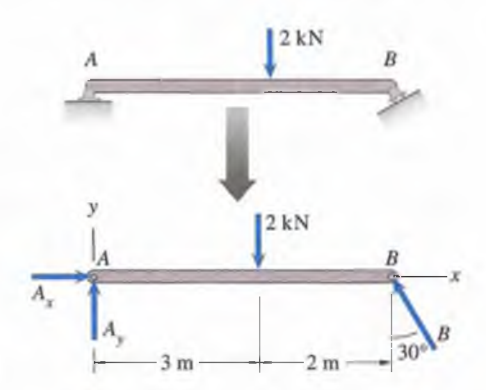
La viga de la figura 5.13 tiene soportes de pasador y de rodillo, y está sometida a una fuerza de 2 kN. ¿Qué valor tienen las reacciones en los soportes?

Figura 5.13



SOLUCIÓN

Dibujo del diagrama de cuerpo libre Aislamos la viga y mostramos las cargas y reacciones que pueden generar los soportes de pasador y de rodillo (Fig. a). Hay tres reacciones desconocidas: dos componentes de fuerza, A_x y A_y, en el soporte de pasador y una fuerza B en el soporte de rodillo.



(a) Dibujo del diagrama de cuerpo libre de la viga.

Aplicación de las ecuaciones de equilibrio Sumando los momentos respecto al punto A, las ecuaciones de equilibrio son

$$\Sigma F_x = A_x - B \text{ sen } 30° = 0,$$

$$\Sigma F_y = A_y + B \cos 30° - 2 = 0,$$

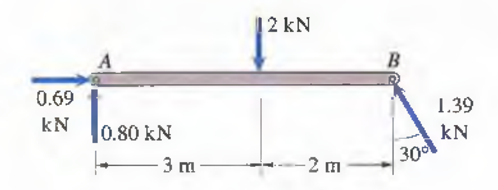
$$\Sigma M_{(\text{punto } A)} = (5)(B \cos 30°) - (3)(2) = 0.$$

Resolviendo estas ecuaciones, las reacciones son $A_x = 0.69$ kN, $A_y = 0.80$ kN y $B = 1.39$ kN. La carga y las reacciones se muestran en la figura (b). Es una buena costumbre mostrar las respuestas de esta manera y verificar que se cumplan las ecuaciones:

$$\Sigma F_x = 0.69 - 1.39 \text{ sen } 30^\circ = 0,$$

$$\Sigma F_y = 0.80 + 1.39 \cos 30^\circ - 2 = 0,$$

$$\Sigma M_{(\text{punto } A)} = (5)(1.39 \cos 30^\circ) - (3)(2) = 0.$$



(b) La carga y las reacciones.

COMENTARIOS

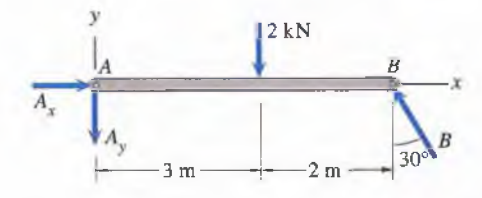
Dibujamos las flechas que indican las direcciones de las reacciones A_x y A_y en las direcciones positivas de los ejes x y y, pero podríamos haberlas dibujado en cualquier dirección. En la figura (c) dibujamos el diagrama de cuerpo libre de la viga con la componente A_y apuntando hacia abajo. De este diagrama de cuerpo libre obtenemos las ecuaciones de equilibrio

$$\Sigma F_x = A_x - B \text{ sen } 30^\circ = 0,$$

$$\Sigma F_y = -A_y + B \cos 30^\circ - 2 = 0,$$

$$\Sigma M_{(\text{punto } A)} = (5)(B \cos 30^\circ) - (2)(3) = 0.$$

Las soluciones son $A_x = 0.69$ kN, $A_y = -0.80$ kN y $B = 1.39$ kN. El valor negativo de A_y indica que la fuerza vertical ejercida sobre la viga por el soporte de pasador tiene la dirección opuesta a la de la flecha de la figura (c); es decir la fuerza de 0.80 kN es hacia arriba. Así, obtenemos de nuevo las reacciones mostradas en la figura (b).



(c) Diagrama de cuerpo libre alternativo.

Ejemplo 5.2

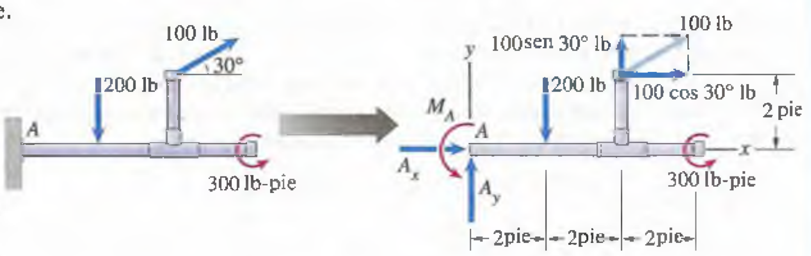
En la figura 5.14, el cuerpo está empotrado y sometido a dos fuerzas y un par. ¿Qué valor tienen las reacciones en el empotramiento?

Figura 5.14

SOLUCIÓN

Dibujar diagrama de cuerpo libre Aislamos el cuerpo de su soporte y mostramos las reacciones en el empotramiento (Fig. a). Hay tres reacciones desconocidas: dos componentes de fuerza A_x y A_y y un par M_A (recuerde que podemos escoger arbitrariamente las direcciones de esas flechas). Descomponemos también la fuerza de 100 lb en sus componentes.

(a) Dibujo del diagrama de cuerpo libre.



Aplicar ecuaciones de equilibrio Sumando los momentos respecto al punto A, las ecuaciones de equilibrio son

$$\Sigma F_x = A_x + 100 \cos 30° = 0,$$

$$\Sigma F_y = A_y - 200 + 100 \text{ sen } 30° = 0,$$

$$\Sigma M_{(\text{punto } A)} = M_A + 300 - (200)(2) - (100 \cos 30°)(2)$$

$$+ (100 \text{ sen } 30°)(4) = 0.$$

Al resolver esas ecuaciones obtenemos las reacciones $A_x = -86.6$ lb, $A_y = 150.0$ lb y $M_A = 73.2$ lb-pie.

COMENTARIO

Observe que el par de 300 lb-pie y el par M_A generados por el empotramiento no aparecen en las dos primeras ecuaciones de equilibrio, ya que un par no ejerce una fuerza neta. Así mismo, como el momento debido a un par es el mismo respecto a cualquier punto, el momento respecto al punto A debido al par antihorario de 300 lb-pie es antihorario de 300 lb-pie.

Ejemplo 5.3

El automóvil de 2800 lb de la figura 5.15 está en reposo. Determine las fuerzas normales ejercidas sobre los neumáticos frontales y posteriores por el suelo.

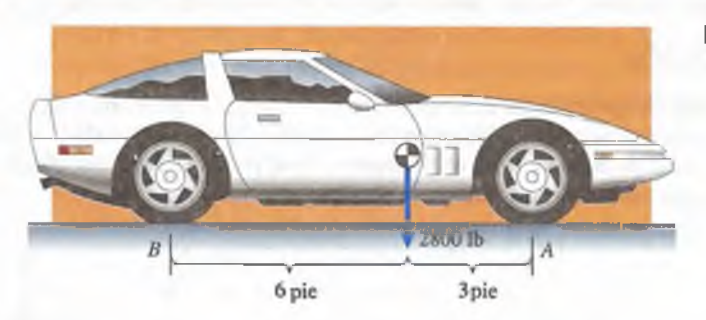
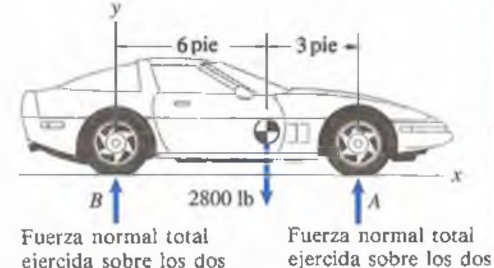


Figura 5.15

SOLUCIÓN

Dibujar diagrama de cuerpo libre En (a) aislamos el auto y mostramos su peso y las reacciones generadas por el suelo. Hay dos reacciones desconocidas: las fuerzas A y B ejercidas sobre los neumáticos frontales y posteriores.



(a) Diagrama de cuerpo libre.

Aplicar ecuaciones de equilibrio Las fuerzas no tienen componente x. Sumando los momentos respecto al punto B, las ecuaciones de equilibrio son

$$\Sigma F_y = A + B - 2800 = 0,$$

$$\Sigma M_{(\text{punto } B)} = (6)(2800) - 9A = 0.$$

Resolviendo, las reacciones son: $A = 1866.7$ lb y $B = 933.3$ lb.

COMENTARIO

Este ejemplo no cae estrictamente dentro de nuestra definición de sistema bidimensional de fuerzas y momentos, porque las fuerzas que actúan sobre el automóvil no son coplanares. Veamos por qué se pueden analizar problemas de esta clase como si fueran bidimensionales.

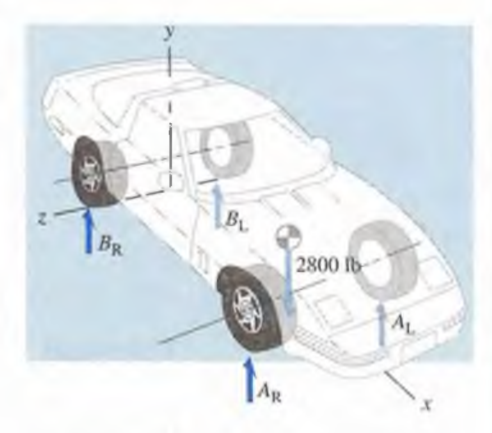
En la figura (b) mostramos una vista oblicua del diagrama de cuerpo libre del automóvil. En esta vista se pueden ver las fuerzas que actúan sobre los neumáticos individuales. La fuerza normal total sobre los neumáticos frontales es $A_L + A_R = A$, y la fuerza normal total sobre los neumáticos posteriores es $B_L + B_R = B$. La suma de las fuerzas en la dirección y es

$$\Sigma F_y = A_L + A_R + B_L + B_R - 2800 = A + B - 2800 = 0.$$

Como la suma de los momentos respecto a cualquier línea debido a las fuerzas y pares que actúan sobre un cuerpo en equilibrio es cero, la suma de los momentos respecto al eje z debido a las fuerzas que actúan sobre el auto es cero:

$$\Sigma M_{(\text{eje } z)} = (9)(A_R + A_L) - (6)(2800) = 9A - (6)(2800) = 0.$$

Obtenemos así las mismas ecuaciones de equilibrio que cuando resolvimos el problema usando un análisis bidimensional.



(b) Perspectiva que muestra las fuerzas sobre los neumáticos individuales.

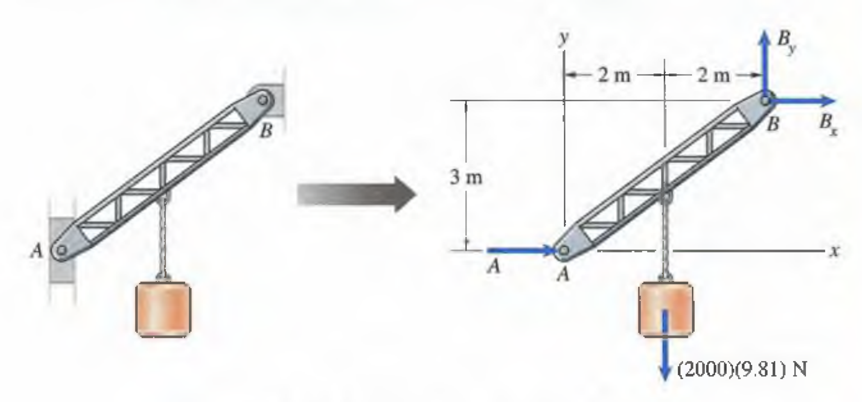
Ejemplo 5.4

Figura 5.16

En la figura 5.16, la estructura AB soporta una masa suspendida de 2 Mg (megagramos). La estructura está unida a un deslizador en una ranura vertical en A y tiene un soporte de pasador en B. ¿Qué valor tienen las reacciones en A y B?

SOLUCIÓN

Dibujar diagrama de cuerpo libre Aislamos la estructura y la masa de los soportes y mostramos las reacciones en éstos y la fuerza ejercida por el peso de la masa de 2000 kg (Fig. a). La ranura en A puede ejercer sólo una fuerza horizontal sobre el deslizador.



(a) Dibujo del diagrama de cuerpo libre.

Aplicar ecuaciones de equilibrio Observe que si sumamos los momentos respecto al punto B, obtenemos una ecuación que contiene sólo una reacción desconocida, es decir, la fuerza A. Las ecuaciones de equilibrio son

$$\Sigma F_x = A + B_x = 0,$$

$$\Sigma F_y = B_y - (2000)(9.81) = 0,$$

$$\Sigma M_{(\text{punto } B)} = A(3) + (2000)(9.81)(2) = 0.$$

Las reacciones son: $A = -13.1$ kN, $B_x = 13.1$ kN y $B_y = 19.6$ kN.

COMENTARIOS

A menudo se pueden simplificar las ecuaciones de equilibrio escogiendo con cuidado el punto respecto al cual se toman los momentos. Por ejemplo, cuando se escoge un punto en el que las líneas de acción de fuerzas desconocidas se cortan, esas fuerzas no aparecen en la ecuación de momento.

5.3 Cuerpos estáticamente indeterminados

En la sección 5.2 presentamos ejemplos en los que pudimos usar las ecuaciones de equilibrio para determinar fuerzas y pares desconocidos actuando sobre cuerpos en equilibrio. Es necesario que se conozcan dos situaciones comunes en las que este procedimiento no conduce a la solución.

Primero, el diagrama de cuerpo libre de un cuerpo puede tener más fuerzas o pares desconocidos que el número de ecuaciones independientes de equilibrio que se pueden obtener. Como no se pueden escribir más de tres de tales ecuaciones para un diagrama de cuerpo libre en un problema bidimensional, si hay más de tres incógnitas, éstas no se pueden determinar con sólo ecuaciones de equilibrio. Esto sucede, por ejemplo, si un cuerpo tiene más soportes que el mínimo necesario para mantenerlo en equilibrio. Se dice que tal cuerpo tiene **soportes redundantes**. La segunda situación es cuando los soportes de un cuerpo están impropiamente diseñados, de modo que no pueden mantener el equilibrio bajo las cargas actuantes. Se dice entonces que el cuerpo tiene **soportes impropios**. En cualquiera de estas situaciones se dice que el cuerpo es **estáticamente indeterminado.**

Los ingenieros usan soportes redundantes siempre que es posible, para aumentar la resistencia y la seguridad. Sin embargo, algunas funciones de ciertos cuerpos requieren que éstos se soporten en forma incompleta para que efectúen con libertad ciertos movimientos. Estas dos situaciones —exceso de soportes para el equilibrio o una cantidad insuficiente— son tan comunes que las analizaremos aquí por separado.

Soportes redundantes

Consideremos una viga empotrada (Fig. 5.17a). De su diagrama de cuerpo libre (Fig. 5.17b) obtenemos las ecuaciones de equilibrio

$$\Sigma F_x = A_x = 0,$$

$$\Sigma F_y = A_y - F = 0,$$

$$\Sigma M_{(\text{punto } A)} = M_A - \left(\frac{L}{2}\right) F = 0.$$

Suponiendo que conocemos la carga F, tenemos tres ecuaciones y tres reacciones desconocidas, para las cuales obtenemos las soluciones $A_x = 0$, $A_y = F$ y $M_A = FL/2$.

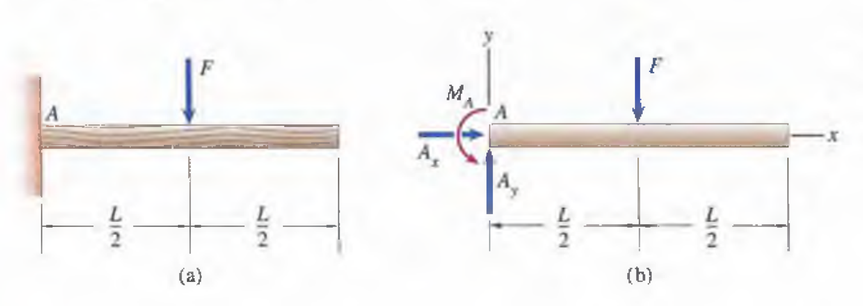
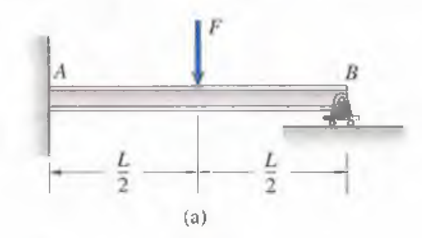


Figura 5.17
(a) Viga con un empotramiento.
(b) El diagrama de cuerpo libre tiene tres reacciones desconocidas.



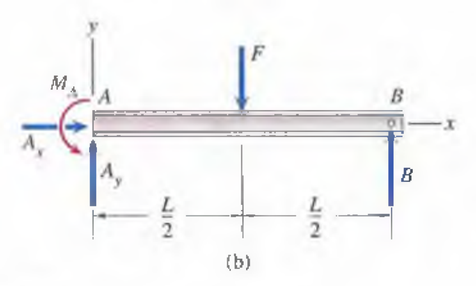


Figura 5.18

(a) Viga con un empotramiento y un soporte de rodillo.
(b) El diagrama de cuerpo libre tiene cuatro reacciones desconocidas.

Supongamos ahora que añadimos un soporte de rodillo en el extremo derecho de la viga (Fig. 5.18a). Del nuevo diagrama de cuerpo libre (Fig. 5.18b) obtenemos las ecuaciones de equilibrio

$$\Sigma F_x = A_x = 0, \tag{5.10}$$

$$\Sigma F_y = A_y - F + B = 0, \tag{5.11}$$

$$\Sigma M_{(\text{punto } A)} = M_A - \left(\frac{L}{2}\right) F + LB = 0. \tag{5.12}$$

Tenemos ahora tres ecuaciones y cuatro reacciones desconocidas. Aunque la primera ecuación nos dice que $A_x = 0$, no podemos resolver las ecuaciones (5.11) y (5.12) para las reacciones A_y, B y M_A.

Frente a esta situación, algunos estudiantes intentan sumar momentos respecto a otro punto, como el B, para obtener una ecuación adicional:

$$\Sigma M_{(\text{punto } B)} = M_A + \left(\frac{L}{2}\right) F - LA_y = 0.$$

Por desgracia, esto no ayuda. No se trata de una ecuación independiente sino de una combinación lineal de las ecuaciones (5.11) y (5.12):

$$\Sigma M_{(\text{punto } B)} = M_A + \left(\frac{L}{2}\right) F - LA_y$$

$$= \underbrace{M_A - \left(\frac{L}{2}\right) F + LB}_{\text{Ec. (5.12)}} - L\underbrace{(A_y - F + B)}_{\text{Ec. (5.11)}}.$$

Como lo demuestra este ejemplo, cada soporte adicional en un cuerpo cualquiera conlleva reacciones adicionales. La diferencia entre el número de reacciones y el número de ecuaciones independientes de equilibrio se denomina **grado de redundancia.**

Aun si un cuerpo es estáticamente indeterminado debido a sus soportes redundantes, quizá sea posible determinar algunas de las reacciones con las ecuaciones de equilibrio. Observe que en los ejemplos anteriores pudimos determinar la reacción A_x aunque no pudimos determinar las otras reacciones.

Como los soportes redundantes son tan ubicuos, podría surgir la pregunta de por qué invertimos tanto esfuerzo en enseñar a analizar cuerpos cuyas reacciones se pueden determinar con las ecuaciones de equilibrio. Queremos desarrollar su comprensión del concepto de equilibrio y deseamos que practique la formulación de las ecuaciones correspondientes. Las reacciones sobre un cuerpo con soportes redundantes se *pueden* determinar complementando las ecuaciones de equilibrio con ecuaciones adicionales que relacionen las fuerzas y pares actuantes sobre el cuerpo con las deformaciones de éste, es decir, con su cambio de forma. Por ello, la obtención de las ecuaciones de equilibrio es el primer paso para su solución.

Ejemplo 5.5

La viga tiene dos soportes de pasador y está cargada con una fuerza de 2 kN.
(a) Demuestre que la viga es estáticamente indeterminada.
(b) Determine tantas reacciones como le sea posible.

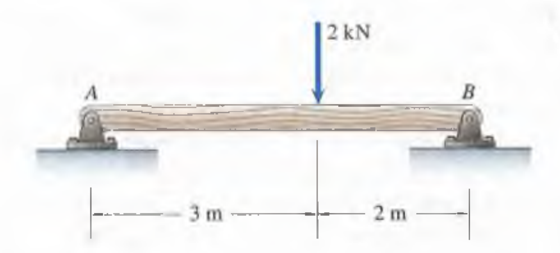


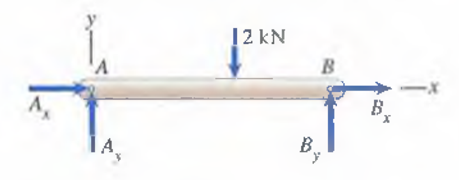
Figura 5.19

ESTRATEGIA

La viga es estáticamente indeterminada si su diagrama de cuerpo libre tiene más reacciones desconocidas que el número de ecuaciones independientes de equilibrio que podemos obtener. Sin embargo, aun en este caso podemos resolver las ecuaciones de equilibrio para algunas de las reacciones.

SOLUCIÓN

Dibujo del diagrama de cuerpo libre En la figura (a) dibujamos el diagrama de cuerpo libre de la viga. Hay cuatro reacciones desconocidas: A_x, A_y, B_x y B_y, y sólo podemos establecer tres ecuaciones de equilibrio independientes. Por consiguiente, la viga es estáticamente indeterminada.



(a) El diagrama de cuerpo libre.

Aplicación de las ecuaciones de equilibrio Sumando los momentos respecto al punto A, las ecuaciones de equilibrio son

$$\Sigma F_x = A_x + B_x = 0,$$

$$\Sigma F_y = A_y + B_y - 2 = 0,$$

$$\Sigma M_{(\text{punto } A)} = (5)B_y - (2)(3) = 0.$$

De la tercera ecuación podemos despejar B_y y luego resolver la segunda ecuación y encontrar A_y. Los resultados son $A_y = 0.8$ kN y $B_y = 1.2$ kN. La primera ecuación nos dice que $B_x = -A_x$, pero no podemos obtener sus valores.

COMENTARIOS

Este ejemplo nos da una idea de por qué las reacciones sobre cuerpos con restricciones redundantes no se pueden determinar únicamente con las ecuaciones de equilibrio. Los dos soportes de pasador pueden ejercer reacciones horizontales sobre la viga aun en ausencia de cargas (Fig. b), y esas reacciones satisfacen las ecuaciones de equilibrio para cualquier valor de T ($\Sigma F_x = -T + T = 0$).



(b) Los soportes pueden ejercer reacciones sobre la viga.

Soportes impropios

Decimos que un cuerpo tiene soportes impropios si no permanece en equilibrio bajo la acción de las cargas ejercidas sobre él. Un cuerpo con soportes impropios se moverá al aplicarle cargas. En problemas bidimensionales, esto puede ocurrir de dos maneras:

1. *Los soportes pueden ejercer sólo fuerzas paralelas*. Esto deja al cuerpo moverse en la dirección perpendicular a las fuerzas de soporte. Si las cargas ejercen una componente de fuerza en esa dirección, el cuerpo no estará en equilibrio. La figura 5.20(a) es un ejemplo de esta situación. Los dos soportes de rodillo pueden ejercer sólo fuerzas verticales, mientras que la fuerza F tiene una componente horizontal. La viga se moverá horizontalmente cuando se aplique F. Esto se ve con claridad en el diagrama de cuerpo libre (Fig. b). La suma de las fuerzas en la dirección horizontal no puede ser igual a cero porque los soportes de rodillo sólo pueden ejercer reacciones verticales.

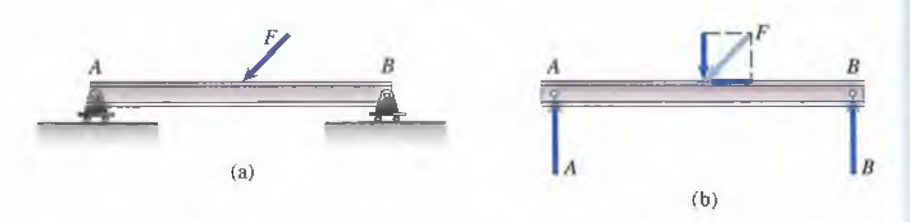


Figura 5.20
(a) Viga con dos soportes de rodillo no está en equilibrio al someterla a la carga mostrada.
(b) La suma de las fuerzas en la dirección horizontal no es igual a cero.

2. *Los soportes sólo pueden ejercer fuerzas concurrentes*. Si las cargas ejercen un momento respecto al punto en que las líneas de acción de las fuerzas de soporte se intersecan, el cuerpo no estará en equilibrio. Consideremos la viga de la figura; de su diagrama de cuerpo libre (Fig. 5.21b) vemos que las reacciones A y B no ejercen momento respecto a P, que es donde sus líneas de acción se cortan, pero esto sí ocurre en el caso de la carga F. La suma de los momentos respecto a P no es cero y la viga girará cuando se aplique la carga.

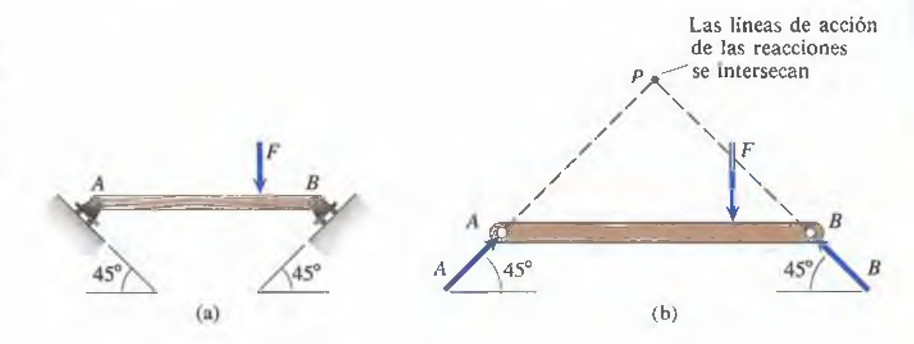


Figura 5.21
(a) Una viga con soportes de rodillo sobre superficies inclinadas.
(b) La suma de los momentos respecto al punto P no es igual a cero.

Excepto cuando se abordan de manera explícita soportes impropios, en nuestros ejemplos los cuerpos tienen soportes adecuados. Debe desarrollarse el hábito de examinar cuerpos en equilibrio y reflexionar si están adecuadamente soportados según las cargas que actúan sobre ellos.

Ejemplo 5.6

Indique si las barras en L están adecuadamente soportadas. Si una barra está adecuadamente soportada, determine las reacciones en sus soportes.

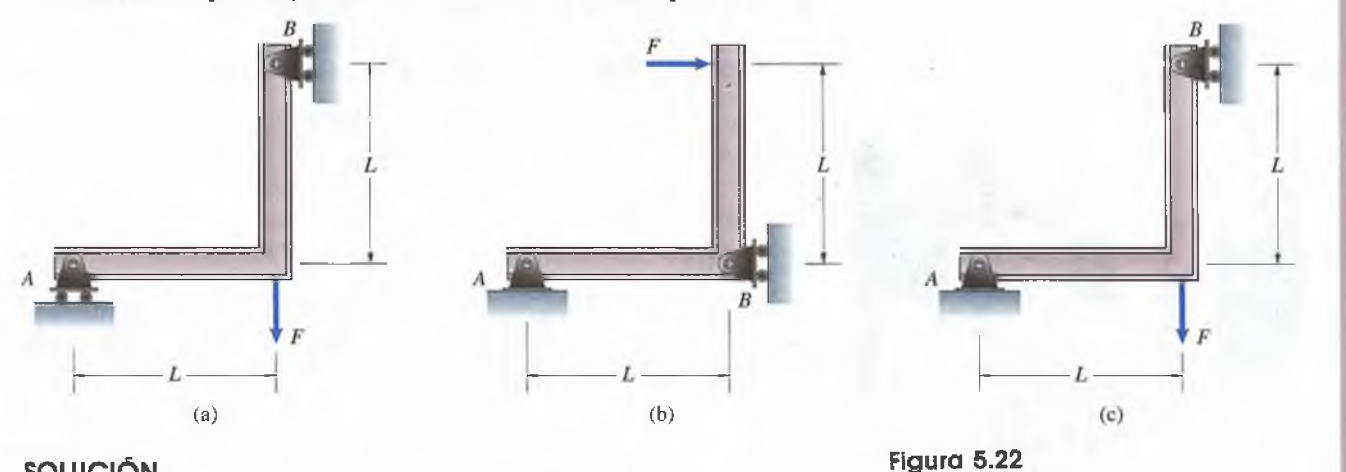


Figura 5.22

SOLUCIÓN

En la figura 5.23 dibujamos los diagramas de cuerpo libre de las barras.

Barra (a) Las líneas de acción de las reacciones en los dos soportes de rodillo se intersecan en P, y la fuerza F ejerce un momento respecto a P. Esta barra no está adecuadamente soportada.

Barra (b) Las líneas de acción de las reacciones se intersecan en A y la fuerza F ejerce un momento respecto a A. Esta barra tampoco está bien soportada.

Barra (c) Las tres fuerzas de soporte no son ni paralelas ni concurrentes. Esta barra está propiamente soportada. Las ecuaciones de equilibrio son

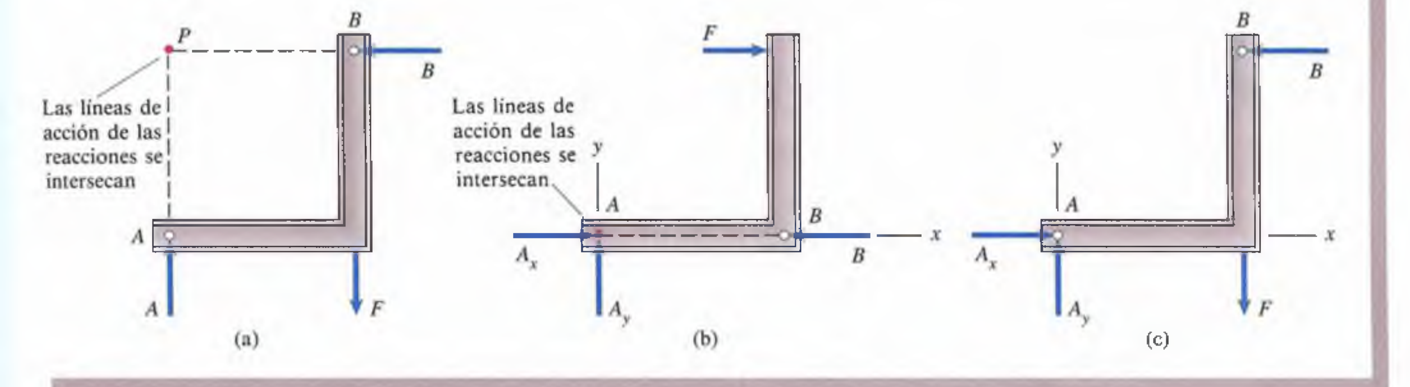
$$\Sigma F_x = A_x - B = 0,$$

$$\Sigma F_y = A_y - F = 0,$$

$$\Sigma M_{(\text{punto } A)} = BL - FL = 0.$$

Resolviendo estas ecuaciones, las reacciones son $A_x = F$, $A_y = F$ y $B = F$.

Figura 5.23
Diagramas de cuerpo libre de las tres barras.



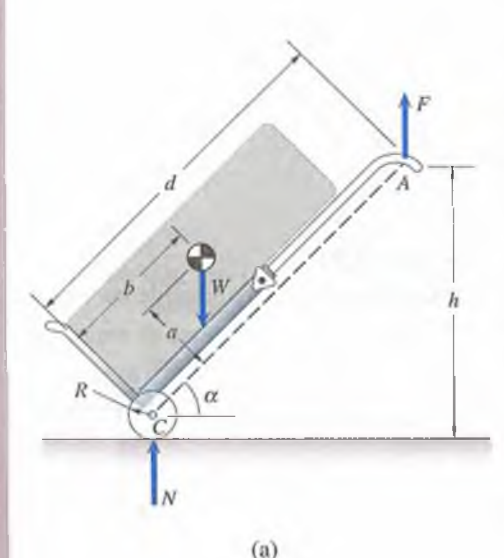
Ejemplo 5.7

Aplicación a la ingeniería

Diseño por factores humanos



Figura 5.24



En la figura 5.24 se muestran un portaequipaje mantenido en equilibrio en posición inclinada y su diagrama de cuerpo libre. Si el portaequipaje soporta un peso $W = 50$ lb, $\alpha = 30°$, $a = 8$ pulg, $b = 16$ pulg y $d = 48$ pulg, ¿qué fuerza F debe ejercer el usuario?

ESTRATEGIA

Las reacciones desconocidas en el diagrama de cuerpo libre son la fuerza F y la fuerza normal N ejercida por el piso. Sumando momentos respecto al centro de la rueda C, tenemos una ecuación donde sólo F es reacción desconocida.

SOLUCIÓN

Sumando momentos respecto a C,

$$\Sigma M_{(\text{punto } C)} = d(F \cos \alpha) + a(W \operatorname{sen} \alpha) - b(W \cos \alpha) = 0,$$

y despejando F, obtenemos

$$F = \frac{(b - a \tan \alpha)W}{d}. \qquad (5.13)$$

Sustituyendo los valores de W, α, a, b y d, la solución es $F = 11.9$ lb.

CONSIDERACIONES DE DISEÑO

El diseño que toma en cuenta dimensiones físicas, capacidades y características humanas es un reto especial. Este arte se denomina diseño por factores humanos. Aquí consideramos un simple dispositivo, el portaequipaje de aeropuerto, y mostramos cómo su diseño se ve afectado por la consideración de sus posibles usuarios *y las restricciones impuestas por las ecuaciones de equilibrio.*

El usuario mueve el portaequipaje sujetando la barra en su parte superior, inclinándolo y caminando al mismo tiempo que lo jala. La altura de la agarradera (la dimensión h) tiene que ser cómoda. Como $h = R + d \operatorname{sen} \alpha$, si escogemos valores de h y el radio de la rueda R, obtenemos una relación entre la longitud de la barra d y el ángulo α de inclinación de la misma:

$$d = \frac{h - R}{\operatorname{sen} \alpha}. \qquad (5.14)$$

Sustituyendo esta expresión para d en la ecuación (5.13) obtenemos

$$F = \frac{\operatorname{sen} \alpha(b - a \tan \alpha)W}{h - R}. \qquad (5.15)$$

Supongamos que, con base en datos estadísticos relativos a las dimensiones humanas, decidimos diseñar un portaequipaje que sea utilizado por personas de hasta 6 pies 2 pulg de altura, lo cual corresponde a una dimensión h de aproxi-

madamente 36 pulgadas. Sea $R = 3$ pulg, $a = 6$ pulg y $b = 12$ pulg. En la figura 5.25 se muestra el valor de F/W resultante en función de α. Para $\alpha = 63°$, la fuerza que el usuario debe ejercer es nula, lo cual significa que el peso del equipaje actúa en un punto directamente por encima de las ruedas. Esta sería la solución óptima si el usuario pudiera mantener con exactitud ese valor de α. Sin embargo, es inevitable que α varíe, y los cambios resultantes en F dificultan el control del portaequipaje. Además, el ángulo relativamente muy inclinado dificulta jalarlo. Desde este punto de vista, es deseable escoger un diseño dentro del intervalo de valores de α en el que F varíe con lentitud, digamos $30° \leq \alpha \leq 45°$. (Aun cuando la fuerza que el usuario debe ejercer en este intervalo de α es grande en comparación con valores mayores de α, sólo representa aproximadamente el 13% del peso.) En este intervalo de α, la dimensión d varía de 5.5 a 3.9 pies. Por conveniencia de peso y facilidad de almacenamiento, es deseable tener un portaequipaje más pequeño, por lo que escogemos $d = 4$ pies para nuestro diseño preliminar.

Hemos elegido la dimensión d con base en valores particulares de las dimensiones R, a y b. En un proyecto real de diseño analizaríamos los intervalos de valores esperados de esos parámetros. Nuestro diseño final reflejaría también decisiones basadas en la seguridad (p. ej., debe haber suficientes medios para fijar el equipaje y no debe tener bordes agudos), la confiabilidad (las barras deben ser suficientemente fuertes y las ruedas deben tener cojinetes adecuados y confiables) y el costo de fabricación.

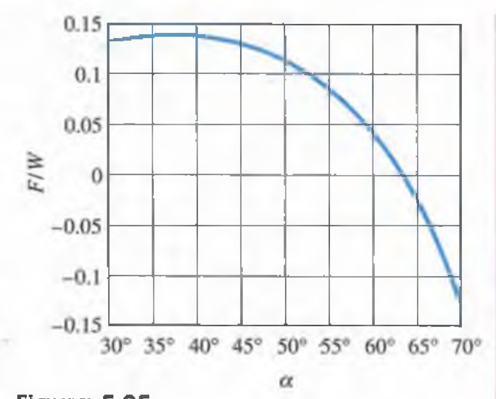
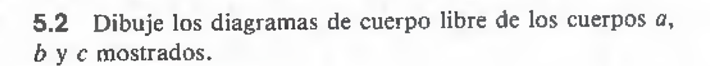


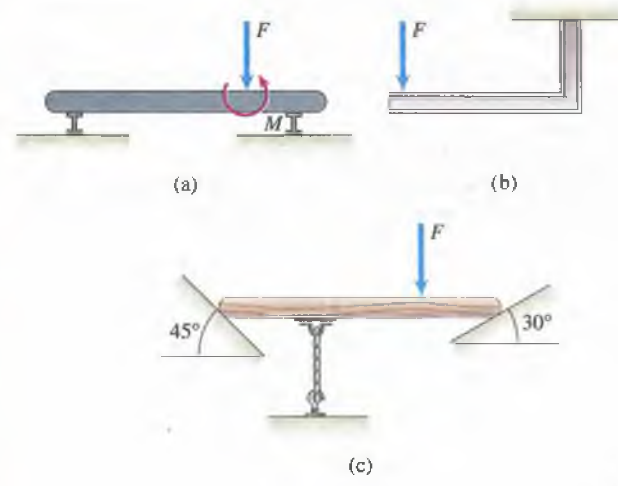
Figura 5.25
Gráfica de la razón F/W en función de α.



Problemas

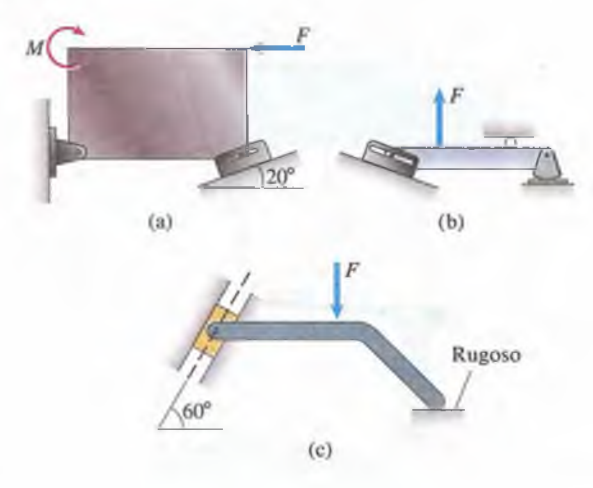
Suponga que los cuerpos están en equilibrio. En los enunciados de las respuestas, las componentes *x* son positivas hacia la derecha y las componentes *y* son positivas hacia arriba.

5.1 Dibuje los diagramas de cuerpo libre de los objetos a, b y c mostrados.



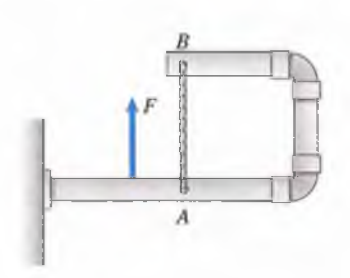
P5.1

5.2 Dibuje los diagramas de cuerpo libre de los cuerpos a, b y c mostrados.



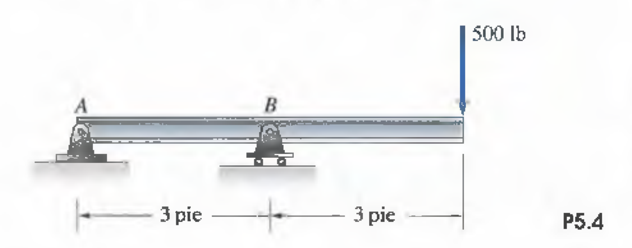
P5.2

5.3 La tensión en el cable AB mostrado es igual a T. Dibuje un diagrama de cuerpo libre (a) del conjunto de tubos y cable AB, considerándolos como un solo cuerpo; (b) del conjunto de tubos, sin incluir el cable AB; (c) del cable AB.



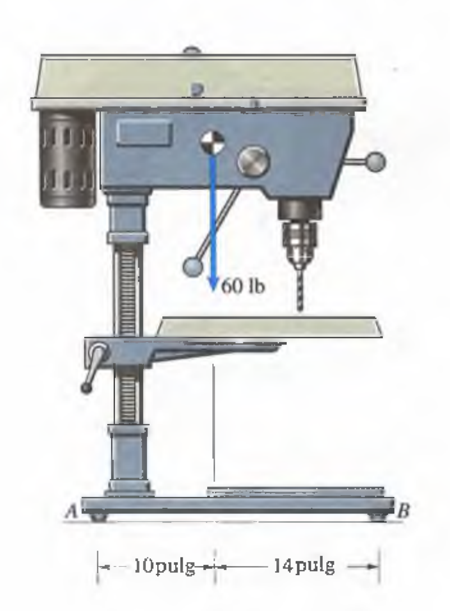
P5.3

5.4 (a) Dibuje el diagrama de cuerpo libre de la viga de la figura P5.4.
(b) Determine las reacciones en los soportes.



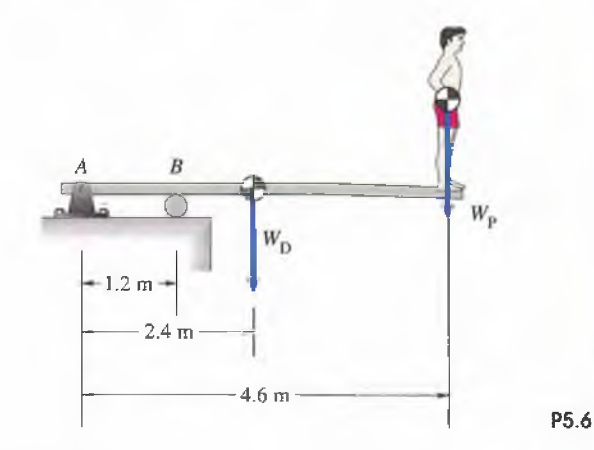
P5.4

5.5 (a) Dibuje el diagrama de cuerpo libre de la prensa perforadora de 60 lb de peso mostrada, suponiendo que las superficies de A y B son lisas. (b) Determine las reacciones en A y B.



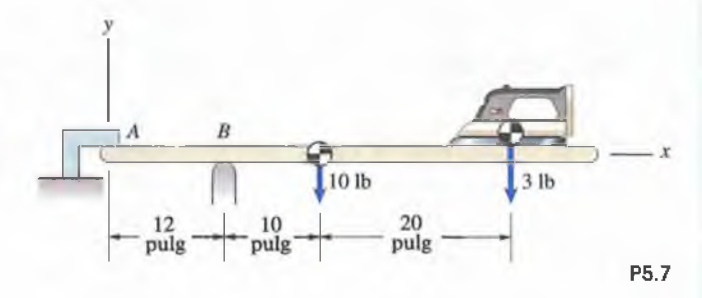
P5.5

5.6 En la figura P5.6, la masa del clavadista es de 80 kg y la masa del trampolín es de 45 kg.
(a) Dibuje el diagrama de cuerpo libre del trampolín.
(b) Determine las reacciones en los soportes A y B.



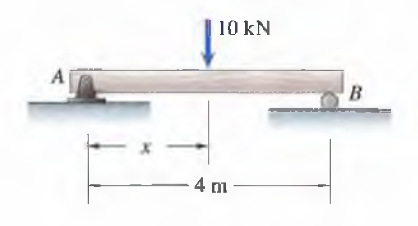
P5.6

5.7 La mesa de planchar mostrada tiene soportes en A y B que se pueden modelar como soportes de rodillo.
(a) Dibuje el diagrama de cuerpo libre de la mesa.
(b) Determine las reacciones en A y B.



P5.7

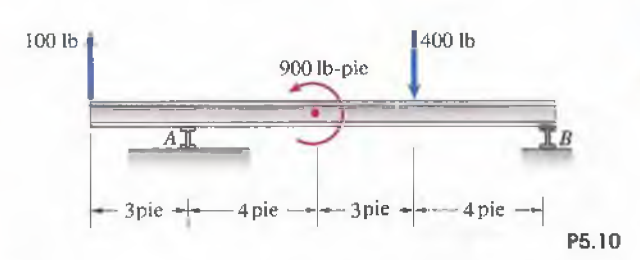
5.8 En la figura P5.8, la distancia x es de 2 m.
(a) Dibuje el diagrama de cuerpo libre de la viga.
(b) Determine las reacciones en los soportes.



P5.8

5.9 Considere la viga del problema 5.8. Un ingeniero determina que cada soporte resistirá con seguridad una fuerza de 7.5 kN. ¿Cuál es el intervalo de valores de la distancia x a la cual se puede aplicar con seguridad la fuerza de 10 kN?

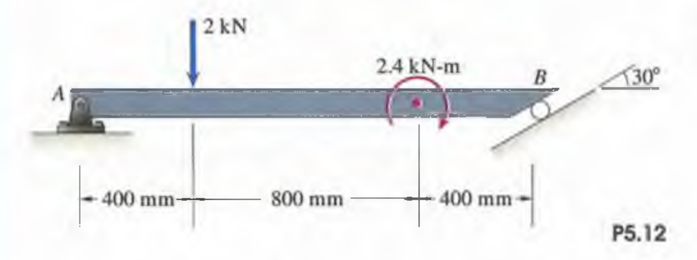
5.10 (a) Dibuje el diagrama de cuerpo libre de la viga. (b) Determine las reacciones en los soportes.



P5.10

5.11 Considere la viga del problema 5.10. Primero represente las cargas (fuerza de 100 lb, fuerza de 400 lb y par de 900 lb-pie) con una sola fuerza equivalente y luego determine las reacciones en los soportes.

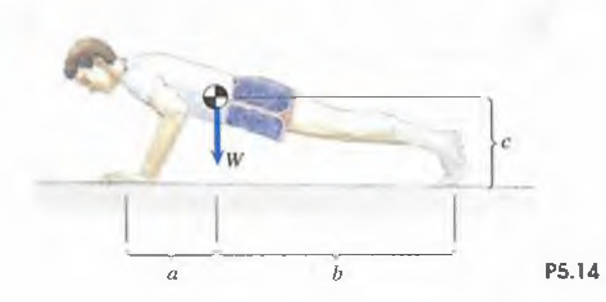
5.12 (a) Dibuje el diagrama de cuerpo libre de la viga. (b) Determine las reacciones en los soportes.



P5.12

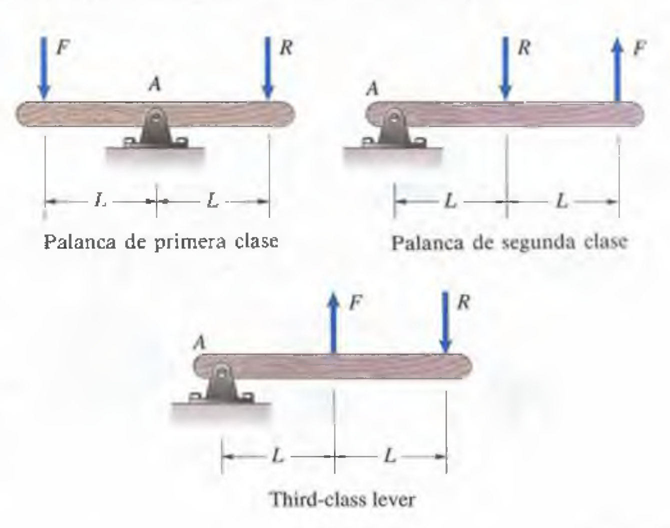
5.13 Considere la viga del problema 5.12. Primero represente las cargas (la fuerza de 2 kN y el par de 24 kN-m) con una sola fuerza equivalente y luego determine las reacciones en los soportes.

5.14 Un hombre que hace planchas se detiene en la posición mostrada. Su peso es $W = 175$ lb. Las distancias son $a = 10$ pulg, $b = 29$ pulg y $c = 12$ pulg. Determine la fuerza normal ejercida por el piso (a) sobre cada mano; (b) sobre cada pie.



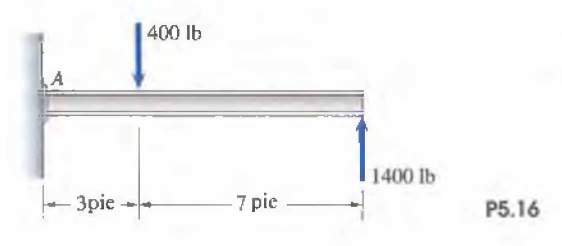
P5.14

5.15 Con cada uno de los dispositivos mostrados se puede soportar una carga R aplicando una fuerza F. Estos dispositivos se denominan palancas de primera, segunda y tercera clases.
(a) La razón R/F se llama "ventaja mecánica". Determine la ventaja mecánica de cada palanca.
(b) Determine la magnitud de la reacción en A para cada palanca. (Exprese sus respuestas en términos de F.)



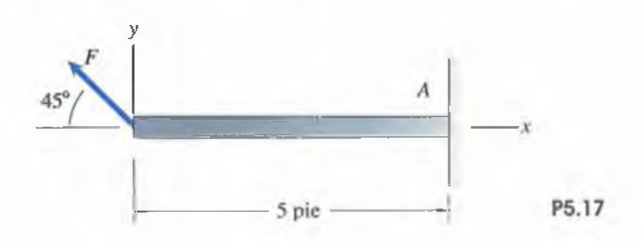
P5.15

5.16 (a) Dibuje el diagrama de cuerpo libre de la viga mostrada. (b) Determine las reacciones en el soporte.



P5.16

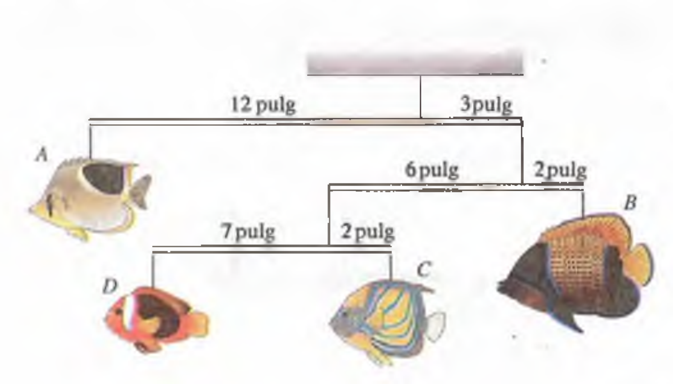
5.17 La fuerza F mostrada tiene una magnitud de 500 lb. Determine las reacciones en el soporte.



P5.17

5.18 Considere la viga del problema 5.17. Un ingeniero determina que el empotramiento fallará si la magnitud de la fuerza total ejercida sobre él excede de 1000 lb o si la magnitud del par ejercido sobre él excede de 3000 lb-pie. Con base en estos criterios, ¿cuál es la fuerza máxima F que se puede aplicar?

5.19 En la figura P5.19, el móvil está en equilibrio. El cuerpo B pesa 27 onzas. Determine los pesos de los cuerpos A, C y D. (Desprecie los pesos de las barras.)

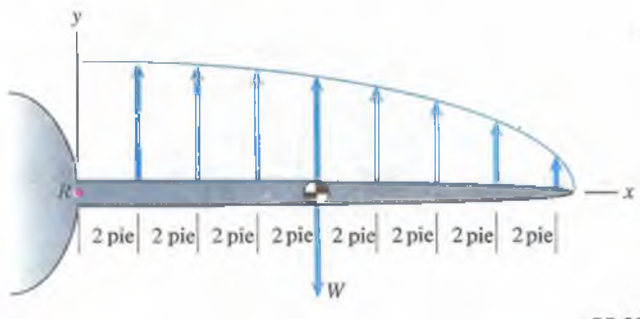


P5.19

5.20 Las fuerzas de sustentación sobre el ala de un aeroplano están representadas por ocho fuerzas. La magnitud de cada fuerza está dada, en función de su posición x sobre el ala, por

$$200\sqrt{1-(x/17)^2}\ \text{lb}.$$

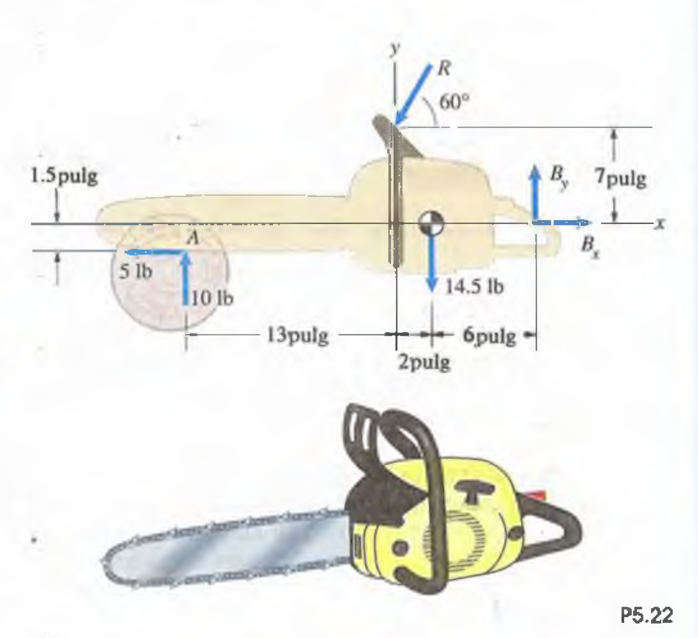
El peso del ala es $W = 400$ lb. Determine las reacciones sobre el ala en el punto de unión R.



P5.20

5.21 (Véase Fig. P5.20.) Represente las ocho fuerzas de sustentación con una sola fuerza equivalente; determine las reacciones sobre el ala en el punto de unión R.

5.22 La sierra de cadena, que pesa 14.5 lb, está sometida a las cargas en A por el tronco. Determine las reacciones R, B_x y B_y que se deben aplicar para mantener la sierra en equilibrio.



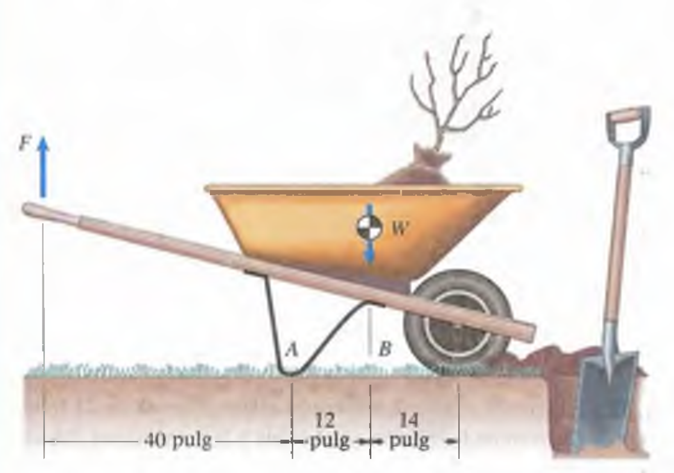
P5.22

5.23 La masa del remolque es de 2.2 Mg (megagramos). Las distancias son $a = 2.5$ m y $b = 5.5$ m. La camioneta está en reposo, y las ruedas del remolque pueden girar libremente (el suelo no ejerce ninguna fuerza horizontal sobre ellas). El enganche en B se puede representar como un soporte de pasador.
(a) Dibuje el diagrama de cuerpo libre del remolque.
(b) Determine la fuerza normal total ejercida sobre las ruedas posteriores en A y las reacciones ejercidas sobre el remolque en el soporte de pasador B.



P5.23

5.24 En la figura P5.24, el peso total de la carretilla y su carga es $W = 100$ lb.
(a) Si $F = 0$, ¿qué valor tienen las reacciones verticales en A y B?
(b) ¿Qué fuerza F es necesaria para levantar del suelo el soporte en A?



P5.24

5.25 El peso del aeroplano es $W = 2400$ lb. Sus frenos mantienen bloqueadas las ruedas posteriores. La rueda frontal puede girar libremente (el suelo no ejerce ninguna fuerza horizontal sobre ella). La fuerza T ejercida por la hélice del aeroplano es horizontal. (a) Dibuje el diagrama de cuerpo libre del aeroplano. Determine la reacción ejercida sobre la rueda frontal y la reacción normal total ejercida sobre las ruedas posteriores (b) cuando $T = 0$; (c) cuando $T = 250$ lb.

5.26 El montacargas se encuentra en reposo. Las ruedas frontales pueden girar pero las posteriores no. Las distancias son: $a = 1.25$ m, $b = 0.50$ m y $c = 1.40$ m. El peso de la carga es $W_L = 2$ kN y el peso del vehículo con su operador es $W_F = 8$ kN. ¿Qué valor tienen las reacciones en A y B?



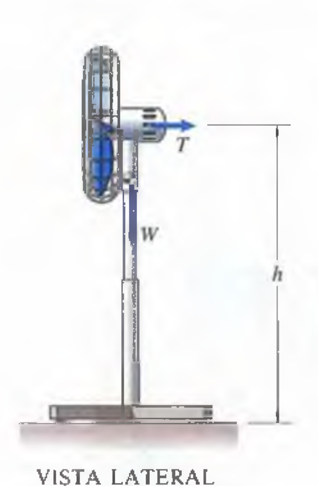
P5.26

5.27 Considere el montacargas en reposo mostrado en el problema 5.26. Las ruedas frontales están en libertad de rodar y las traseras están bloqueadas. Las distancias son $a = 45$ pulg, $b = 20$ pulg y $c = 50$ pulg. El peso del vehículo junto con el operador es $W_F = 3000$ lb. Por razones de seguridad, se ha establecido que la reacción en las ruedas traseras debe ser de 400 lb por lo menos. Si el peso W_L de la carga actúa en la posición mostrada, ¿qué valor tiene la máxima carga segura?

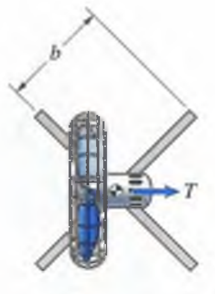


P5.25

5.28 El peso del ventilador mostrado es $W = 20$ lb. Su base tiene cuatro patas igualmente espaciadas de longitud $b = 12$ pulg y $h = 36$ pulg. ¿Qué valor tiene el máximo empuje T ejercido por la hélice del ventilador si éste permanece en equilibrio?



VISTA LATERAL



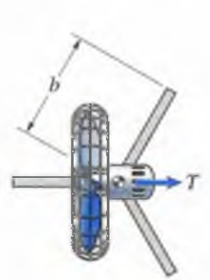
VISTA SUPERIOR

P5.28

5.29 (Véase Fig. P5.28.) Por seguridad, un ingeniero decide que la reacción vertical en cualquiera de las patas del ventilador no debe ser menor que el 20% del peso de éste. Si el empuje T es de 1 lb cuando el ventilador tiene su velocidad máxima, ¿cuál es el valor máximo seguro de h?

5.30 Para disminuir costos, se considera soportar un ventilador con tres patas igualmente espaciadas en vez de usar el sistema de cuatro patas (Prob. 5.28). Para los mismos valores de b, h y W, demuestre que el empuje máximo T para el cual el ventilador permanecerá en equilibrio con tres patas está relacionado con el valor para el ventilador con cuatro patas por

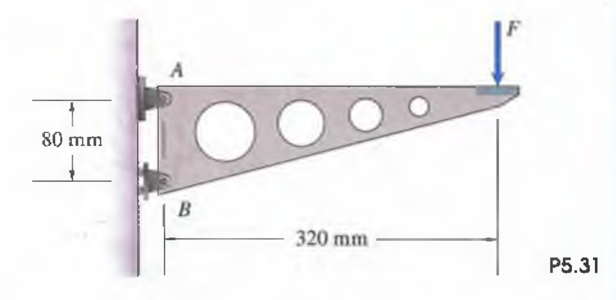
$$T_{(\text{tres patas})} = (1/\sqrt{2})T_{(\text{cuatro patas})}.$$





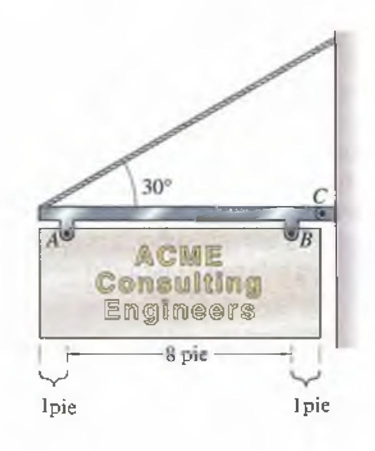
P5.30

5.31 Una fuerza $F = 400$ N actúa sobre la ménsula mostrada. ¿Qué valor tienen las reacciones en A y B?



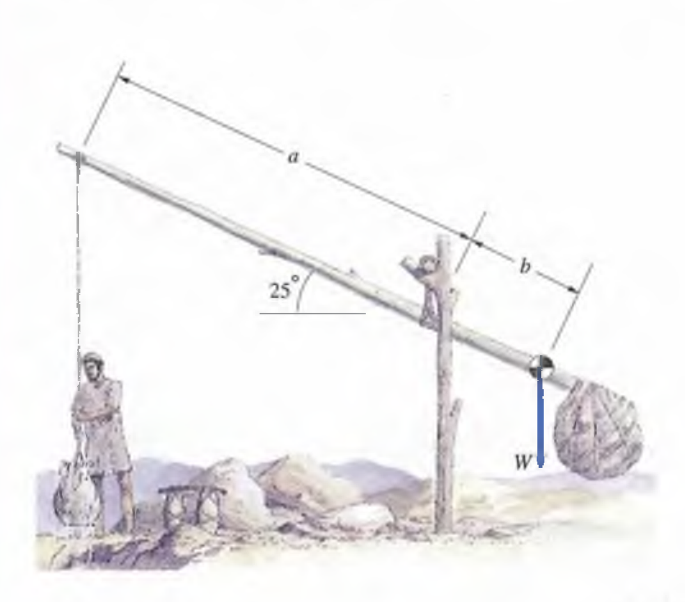
P5.31

5.32 El letrero colgante mostrado ejerce fuerzas de 25 lb en A y B. Determine la tensión en el cable y las reacciones del soporte en C.



P5.32

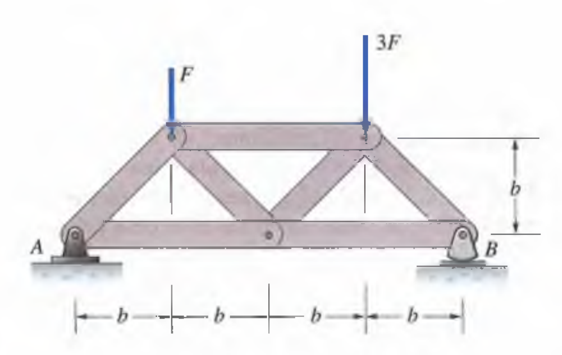
5.33 El dispositivo mostrado ayuda a una persona a levantar cargas pesadas (se usó en Egipto alrededor del año 1550 A.C. y continúa en uso en varias partes del mundo). Las distancias son $a = 12$ pies y $b = 4$ pies. Si la carga que se está levantando pesa 100 lb y $W = 200$ lb, determine la fuerza vertical que la persona debe ejercer para soportar la carga en reposo (a) cuando la carga está justo sobre el terreno (la posición mostrada); (b) cuando la carga está a tres pies sobre el terreno (suponga que la cuerda permanece vertical).



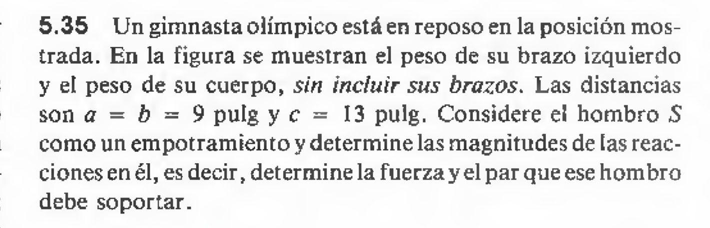
P5.33

5.34 La estructura mostrada, llamada *armadura*, tiene un soporte de pasador en A y un soporte de rodillo en B, y está cargada por dos fuerzas. Determine las reacciones en los apoyos.

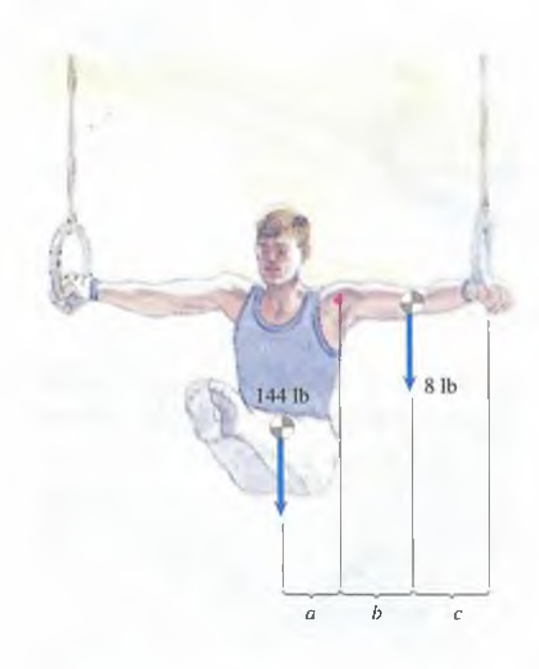
Estrategia: Dibuje un diagrama de cuerpo libre, tratando la armadura entera como un solo cuerpo.



P5.34

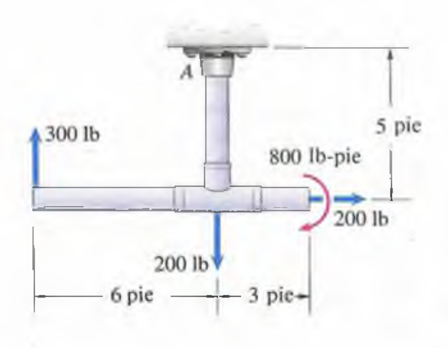


5.35 Un gimnasta olímpico está en reposo en la posición mostrada. En la figura se muestran el peso de su brazo izquierdo y el peso de su cuerpo, *sin incluir sus brazos*. Las distancias son $a = b = 9$ pulg y $c = 13$ pulg. Considere el hombro S como un empotramiento y determine las magnitudes de las reacciones en él, es decir, determine la fuerza y el par que ese hombro debe soportar.



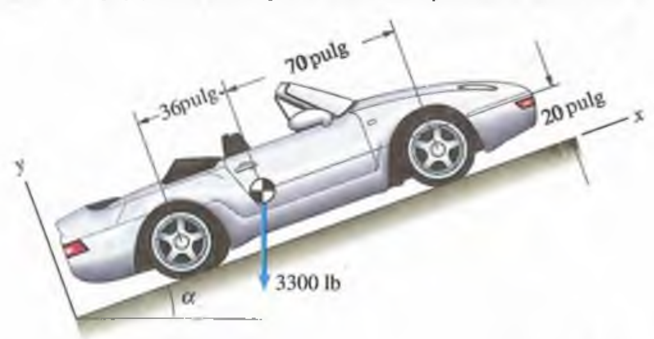
P5.35

5.36 Determine las reacciones en A de la figura P5.36.



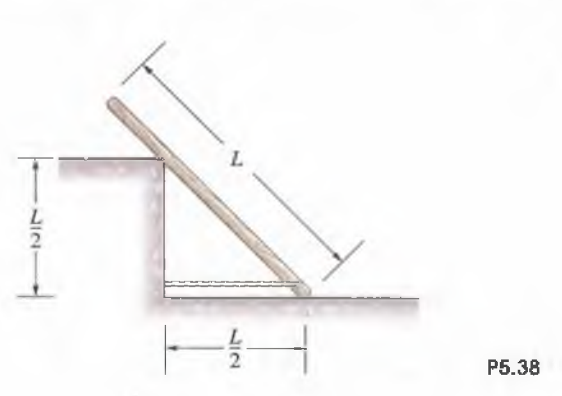
P5.36

5.37 Los frenos del auto inmovilizan las ruedas traseras, pero las ruedas frontales pueden girar. Determine las fuerzas ejercidas por el suelo sobre las ruedas frontales y traseras cuando el auto está estacionado (a) sobre una pendiente de subida con $\alpha = 15°$ y (b) sobre una pendiente de bajada con $\alpha = -15°$.



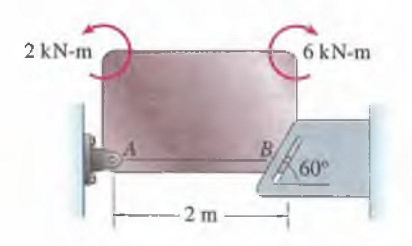
P5.37

5.38 El peso W de la barra mostrada actúa en su centro. Las superficies son lisas. ¿Cuál es la tensión en la cuerda horizontal?



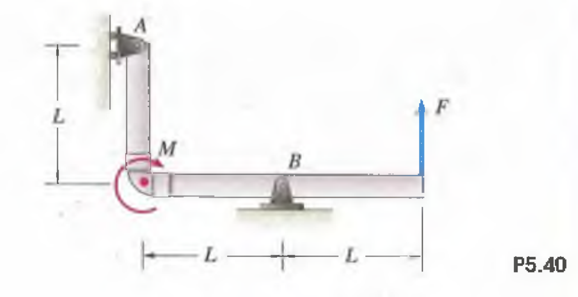
P5.38

5.39 La placa de la figura está soportada por un pasador en una ranura lisa en B. ¿Qué valor tienen las reacciones en los soportes?



P5.39

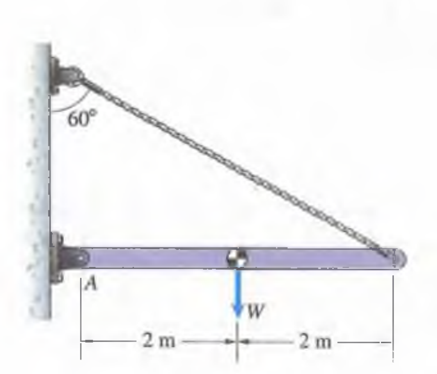
5.40 En la figura 5.40, la fuerza $F = 800$ N y el par $M = 200$ N-m. La distancia $L = 2$ m. ¿Qué valor tienen las reacciones en A y B?



P5.40

5.41 Considere la barra en L del problema 5.40. La fuerza $F = 300$ lb y la distancia $L = 6$ pies. Suponga que los objetivos de su diseño requieren que el par M se ajuste en forma tal que la reacción en A sea nula. Determine M y las reacciones en B.

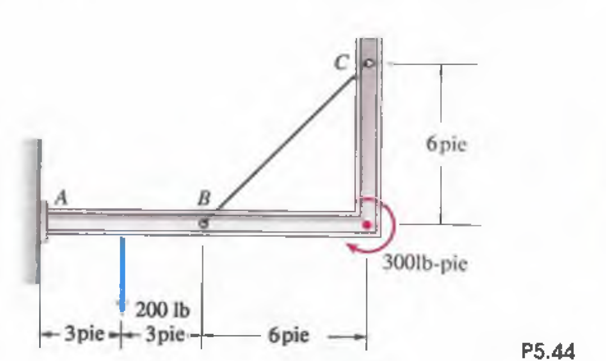
5.42 En la figura P5.42, $W = 1.2$ kN. Determine la tensión en el cable y las reacciones en A.



P5.42

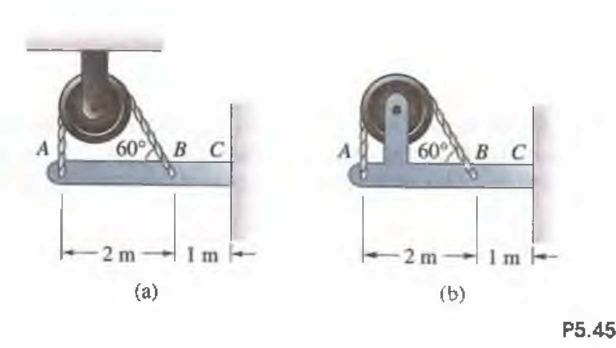
5.43 Considere la viga del problema 5.42. Un ingeniero determina que el cable soportará con seguridad una tensión de 3 kN y que el soporte en A resistirá con seguridad una fuerza de 2.4 kN. Con base en esos criterios, ¿cuál es el peso máximo de la viga que puede soportarse?

5.44 La tensión en el cable BC mostrado es de 100 lb. Determine las reacciones en el soporte empotrado.



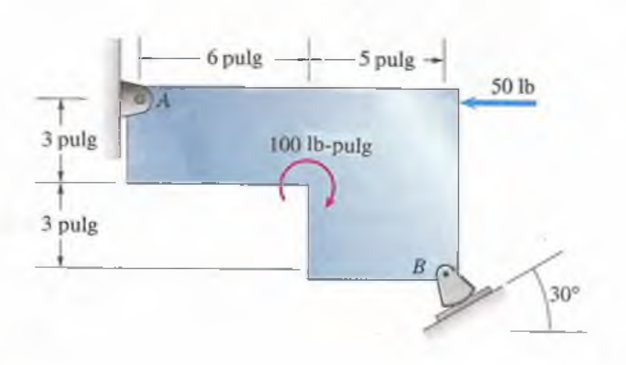
P5.44

5.45 La tensión en el cable AB mostrado es de 2 kN. ¿Qué valor tienen las reacciones en C en cada caso?



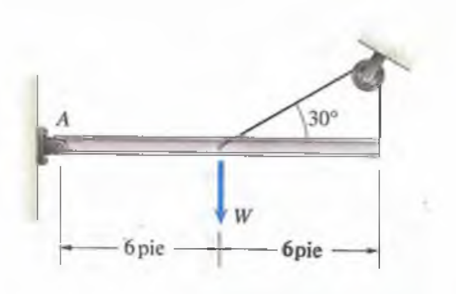
P5.45

5.46 Determine las reacciones en los soportes mostrados.



P5.46

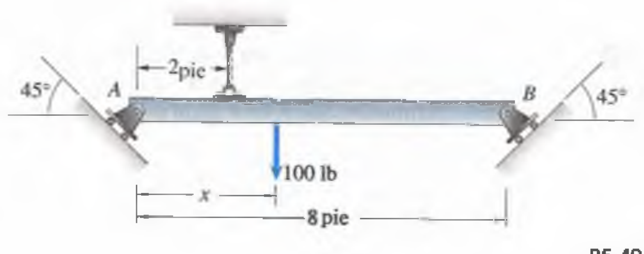
5.47 En la figura P5.47, $W = 1000$ lb. Determine la tensión en el cable y las reacciones en A.



P5.47

5.48 (Véase Fig. P5.47.) Un ingeniero determina que el cable resistirá con seguridad una tensión de 1000 lb. ¿Cuál es el peso W máximo de la viga que puede soportarse con seguridad?

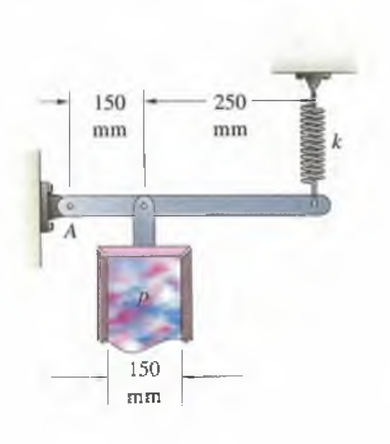
5.49 En la figura P5.49, la distancia $x = 3$ pies. Determine la tensión en el cable y las reacciones en A y B.



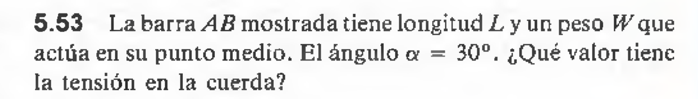
P5.49

5.50 Considere la viga del problema 5.49. Determine el intervalo de valores de la distancia x para la cual la viga puede estar en equilibrio en la posición mostrada.

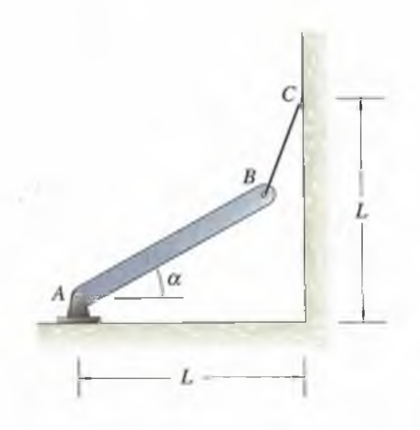
5.51 Se quiere diseñar una válvula de seguridad de manera que ésta se abra cuando la diferencia entre la presión p en el tubo circular (diámetro = 150 mm) y la presión atmosférica sea de 10 MPa (megapascales; un pascal es 1 N/m^2). El resorte está comprimido 20 mm cuando la válvula se encuentra cerrada. ¿Qué valor debe tener la constante del resorte?



P5.51



5.53 La barra AB mostrada tiene longitud L y un peso W que actúa en su punto medio. El ángulo $\alpha = 30°$. ¿Qué valor tiene la tensión en la cuerda?



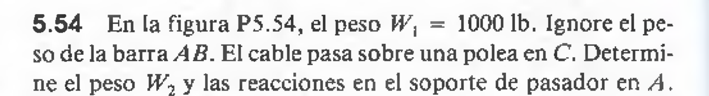
P5.53

5.52 La placa rectangular mostrada se mantiene en equilibrio por medio de la fuerza horizontal F. El peso W actúa en el punto medio de la placa. Demuestre que F está dada por la ecuación

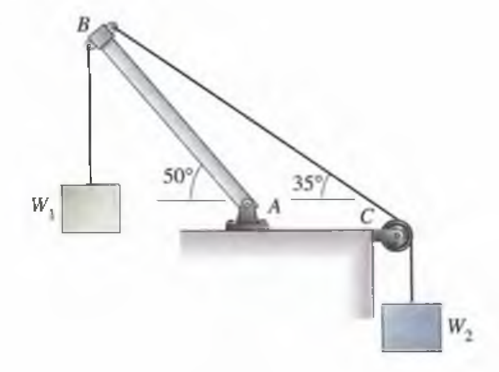
$$F = \frac{(b \cos \alpha - h \operatorname{sen} \alpha)}{2(h \cos \alpha + b \operatorname{sen} \alpha)} W.$$



P5.52

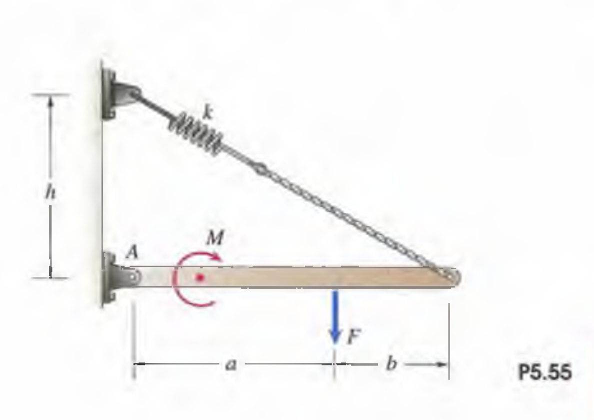


5.54 En la figura P5.54, el peso W_1 = 1000 lb. Ignore el peso de la barra AB. El cable pasa sobre una polea en C. Determine el peso W_2 y las reacciones en el soporte de pasador en A.



P5.54

5.55 Las distancias son $a = 6$ pies y $b = 3$ pies. El par $M = 200$ lb-pie. La constante del resorte $k = 1000$ lb/pie. El resorte no se encontraría estirado si $h = 0$. El sistema está en equilibrio cuando $h = 4$ pies y la viga se halla en posición horizontal. Determine la fuerza F y las reacciones en A.



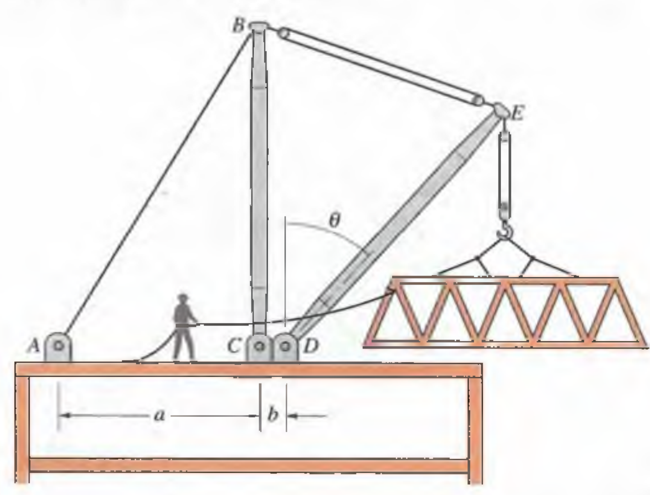
P5.55

5.56 La barra tiene una longitud de 1 m y su peso W actúa en su punto medio. La distancia $b = 0.75$ m y el ángulo $\alpha = 30°$. La constante del resorte es $k = 100$ N/m, y el resorte no está estirado cuando la barra se encuentra en posición vertical. Determine W y las reacciones en A.



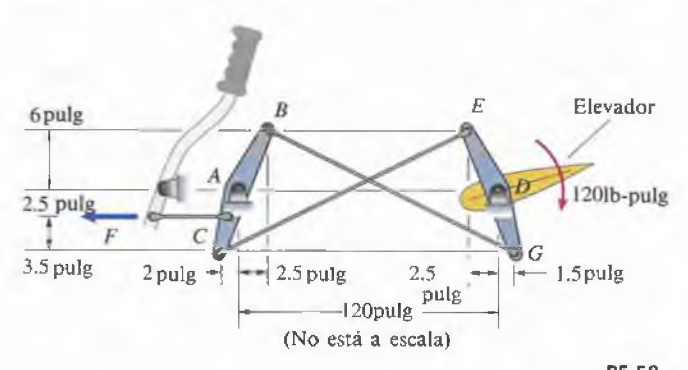
P5.56

5.57 El pescante de la grúa soporta una carga suspendida de 15 klb. Cada una de las barras BC y DE tiene 20 pies de longitud. Las distancias son $a = 15$ pies y $b = 2$ pies, y el ángulo $\theta = 30°$. Determine la tensión en el cable AB y las reacciones en los soportes de pasador C y D.



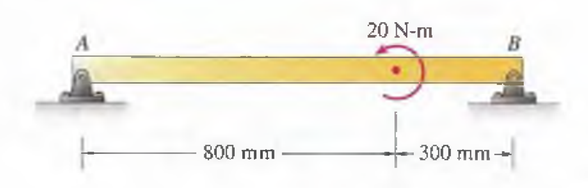
P5.57

5.58 El dispositivo controla los elevadores de un aeroplano (las superficies de control horizontal en la cola del avión). Los elevadores están unidos al elemento EDG. Las presiones aerodinámicas sobre los elevadores ejercen un par horario de 120 lb-pulg. El cable BG está flojo y su tensión se puede ignorar. Determine la fuerza F y las reacciones en el soporte de pasador en A.



P5.58

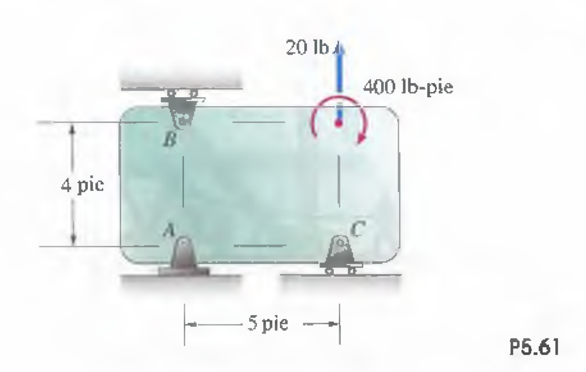
5.59 (a) Dibuje el diagrama de cuerpo libre de la viga de la figura P5.59 y demuestre que ésta es estáticamente indeterminada. (b) Determine tantas reacciones como le sea posible.



P5.59

5.60 Considere la viga del problema 5.59. Escoja soportes en A y B tales que la viga no sea estáticamente indeterminada. Determine las reacciones en los soportes.

5.61 (a) Dibuje el diagrama de cuerpo libre de la placa de la figura P5.61 y demuestre que dicha placa es estáticamente indeterminada.
(b) Determine tantas reacciones como le sea posible.

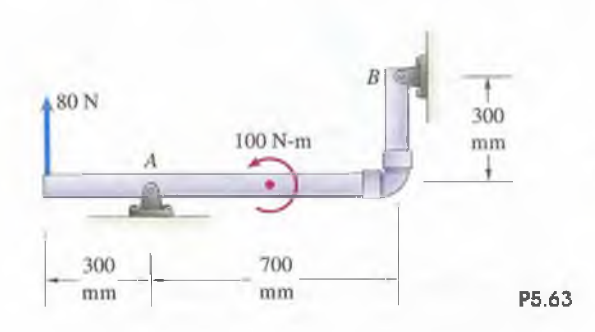


P5.61

5.62 Considere la placa del problema 5.61. Escoja soportes en A, B y C tales que la placa no sea estáticamente indeterminada. Determine las reacciones en los soportes.

5.63 Dibuje el diagrama de cuerpo libre del tubo en forma de L de la figura y demuestre que es estáticamente indeterminado. Determine tantas reacciones como le sea posible.

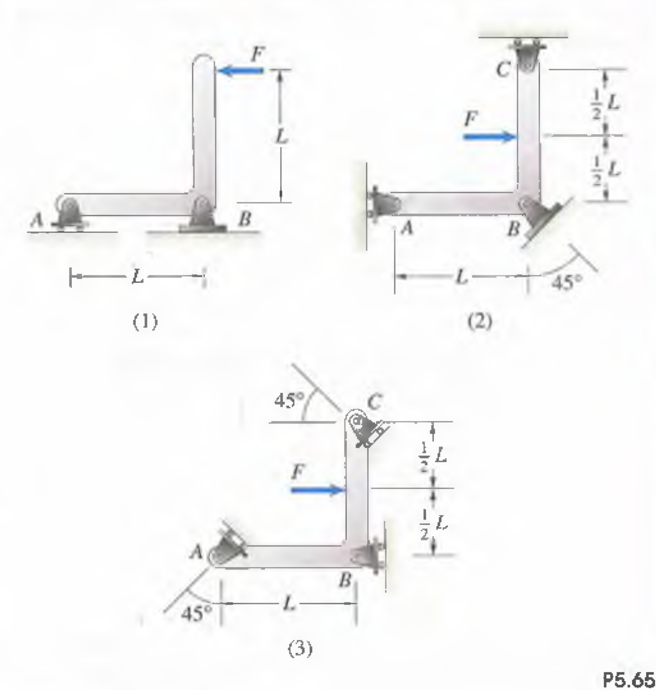
Estrategia: Coloque el sistema coordenado de modo que el eje x pase por los puntos A y B.



P5.63

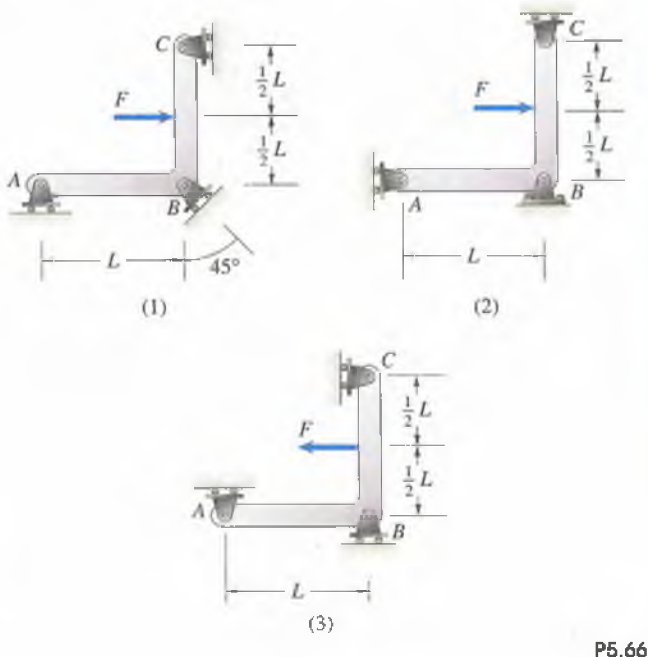
5.64 Considere el tubo del problema 5.63. Elija los soportes en A y B de modo que el tubo no sea estáticamente indeterminado. Determine las reacciones en los soportes.

5.65 Indique si cada una de las barras en L mostradas está propia o impropiamente soportada. Si una barra está propiamente soportada, determine las reacciones en sus soportes.



P5.65

5.66 Indique si cada una de las barras en L mostradas está propia o impropiamente soportada. Si cualquiera de las barras está propiamente soportada, determine las reacciones en sus soportes.



P5.66

Los problemas 5.67 a 5.70 están relacionados con el ejemplo 5.7.

5.67 Suponga que $\alpha = 40°$, $d = 1$ m, $a = 200$ mm, $b = 500$ mm, $R = 75$ mm, y la masa del equipaje es de 40 kg. Determine F y N.

5.68 Suponga que $\alpha = 35°$, $d = 46$ pulg, $a = 10$ pulg, $b = 14$ pulg, $R = 3$ pulg, y que no se quiere que el usuario ejerza una fuerza F superior a 20 lb. ¿Cuál es el peso máximo de equipaje que se puede colocar sobre el portaequipaje?

5.69 Una de las dificultades al tomar decisiones de diseño es que no se sabe cómo colocará el usuario el equipaje sobre el vehículo del ejemplo 5.7. Suponga que el punto en que el peso actúa puede estar dentro de la "envolvente" $R \leq a \leq 0.75c$ y $0 \leq b \leq 0.75d$. Si $\alpha = 30°$, $c = 14$ pulg, $d = 48$ pulg, $R = 3$ pulg y $W = 80$ lb, ¿cuál es la fuerza F máxima que el usuario tendrá que ejercer para cualquier posición del equipaje?

5.70 En el diseño del portaequipaje del ejemplo 5.7 supusimos que un usuario sostiene la agarradera a $h = 36$ pulg sobre el piso. Supusimos que $R = 3$ pulg, $a = 6$ pulg, $b = 12$ pulg, y escogimos $d = 4$ pies. La razón resultante entre la fuerza que el usuario debe ejercer y el peso del equipaje es $F/W = 0.132$. Suponga que personas de diferente altura van a usar el portaequipaje. Obtenga una gráfica de F/W como función de h para $24 \leq h \leq 36$ pulg.

5.4 Aplicaciones tridimensionales

Hemos visto que cuando un cuerpo en equilibrio está sometido a un sistema bidimensional de fuerzas y momentos, no se pueden obtener más de tres ecuaciones independientes de equilibrio. En el caso de un sistema tridimensional de fuerzas y momentos, se pueden obtener hasta seis ecuaciones independientes de equilibrio: las tres componentes de la suma de las fuerzas deben ser nulas y las tres componentes de la suma de los momentos respecto a cualquier punto deben también ser iguales a cero. El procedimiento para determinar las reacciones sobre cuerpos sometidos a sistemas tridimensionales de fuerzas y momentos —dibujar el diagrama de cuerpo libre y aplicar las ecuaciones de equilibrio— es el mismo que para el de dos dimensiones. Sólo se requiere familiarizarse con las convenciones de soporte usadas en las aplicaciones tridimensionales.

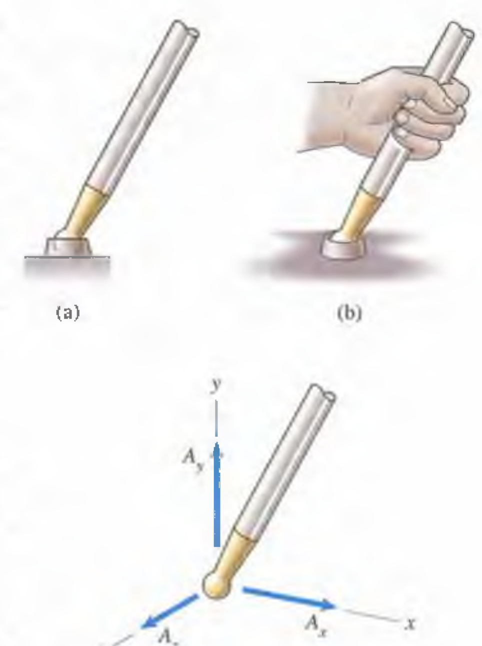


Figura 5.26
(a) Soporte de bola y cuenca.
(b) Sujetando una barra soportada.
(c) El soporte de bola y cuenca puede generar tres componentes de fuerza.

Soportes

Presentamos cinco convenciones que suelen utilizarse en problemas tridimensionales. De nuevo, aun cuando los soportes reales no se parezcan físicamente a esos modelos, los representaremos con los modelos si éstos ejercen las mismas (o aproximadamente las mismas) reacciones.

Soporte de bola y cuenca En el **soporte de bola y cuenca**, el cuerpo soportado está unido a una bola encerrada dentro de una cuenca esférica (Fig. 5.26a). La cuenca permite que la bola gire libremente (se desprecia la fricción) pero impide que se traslade en cualquier dirección.

Suponga que usted sostiene una barra unida a un soporte de bola y cuenca (Fig. 5.26b). Si trata de trasladar la barra (moverla sin girarla) en cualquier dirección, el soporte ejercerá una fuerza reactiva que impedirá el movimiento. Sin embargo, usted puede girar la barra respecto al soporte. El soporte no puede generar un par para evitar la rotación. El soporte **de bola y cuenca no puede entonces ejercer un par pero sí tres componentes de fuerza (Fig. 5.26c). Se trata del modelo tridimensional del soporte de pasador bidimensional.**

La rótula de la cadera es un ejemplo de soporte de bola y cuenca (Fig. 5.27). El soporte de la palanca de velocidades de un auto se puede modelar como soporte de bola y cuenca en el intervalo de su movimiento.

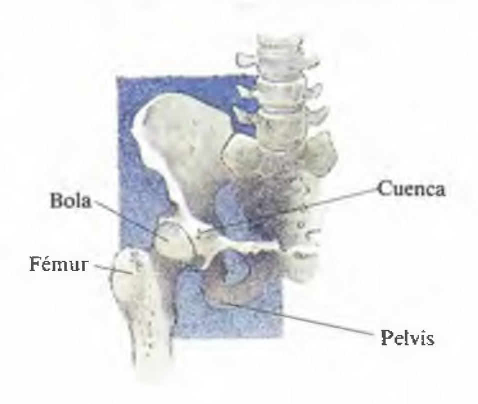


Figura 5.27
El fémur humano está unido a la pelvis por medio de un soporte de bola y cuenca.

Soporte de rodillo El **soporte de rodillo** (Fig. 5.28a) es un soporte de bola y cuenca que puede rodar sobre una superficie de apoyo. Un soporte de rodillo sólo puede ejercer una fuerza normal a la superficie de apoyo (Fig. 5.28b). Las ruedas de los muebles son soportes de este tipo.

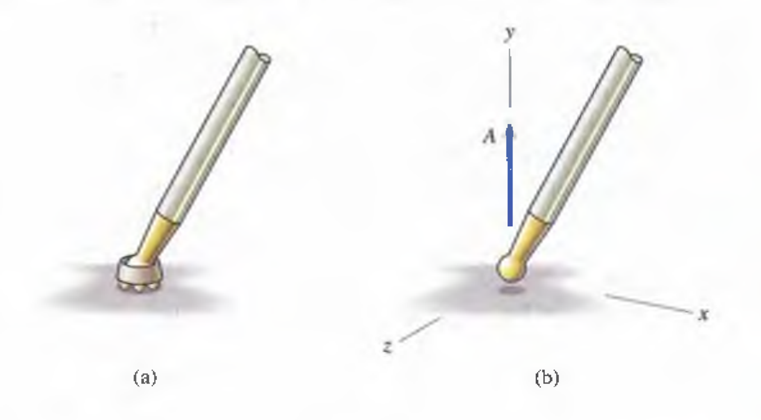


Figura 5.28
(a) Soporte de rodillo.
(b) La reacción es normal a la superficie de soporte.

Articulación El soporte de articulación es el usado para soportar puertas. Permite que el cuerpo soportado gire respecto a una línea o **eje de la articulación.** La figura 5.29(a) es un cuerpo unido a una articulación. El eje z del sistema coordenado está alineado con el eje de la articulación.

Si sujetamos una barra unida a una articulación (Fig. 5.29b), podemos hacer girar la barra alrededor del eje de la articulación. Ésta no puede generar un par respecto a su eje (el eje z) para impedir la rotación. Sin embargo, no se puede hacer girar la barra respecto a los ejes x o y, porque la articulación puede generar pares respecto a esos ejes para impedir el movimiento. Además, no se puede trasladar la barra en ninguna dirección. En la figura 5.29(c) se muestran las reacciones que una articulación puede generar sobre un cuerpo. Hay tres componentes de fuerza, A_x, A_y y A_z y pares respecto a los ejes x y y, M_x^A y M_y^A.

En algunos casos una articulación no genera pares sobre el cuerpo que soporta, o éstos son suficientemente pequeños y se pueden despreciar. Un ejemplo del último caso es cuando las articulaciones que soportan una puerta están apropiadamente alineadas. Aquí la articulación genera sólo fuerzas sobre el cuerpo (Fig. 5.29d). Se presentan también casos en que una articulación no genera pares sobre el cuerpo ni fuerza en la dirección de su eje (la articulación puede de hecho estar diseñada para que no soporte una fuerza paralela a su eje). La articulación genera entonces reacciones sólo en las direcciones perpendiculares a su eje (Fig. 5.29e). En los ejemplos y en los problemas indicaremos cuándo una articulación no genera las cinco reacciones mostradas en la figura 5.29(c).

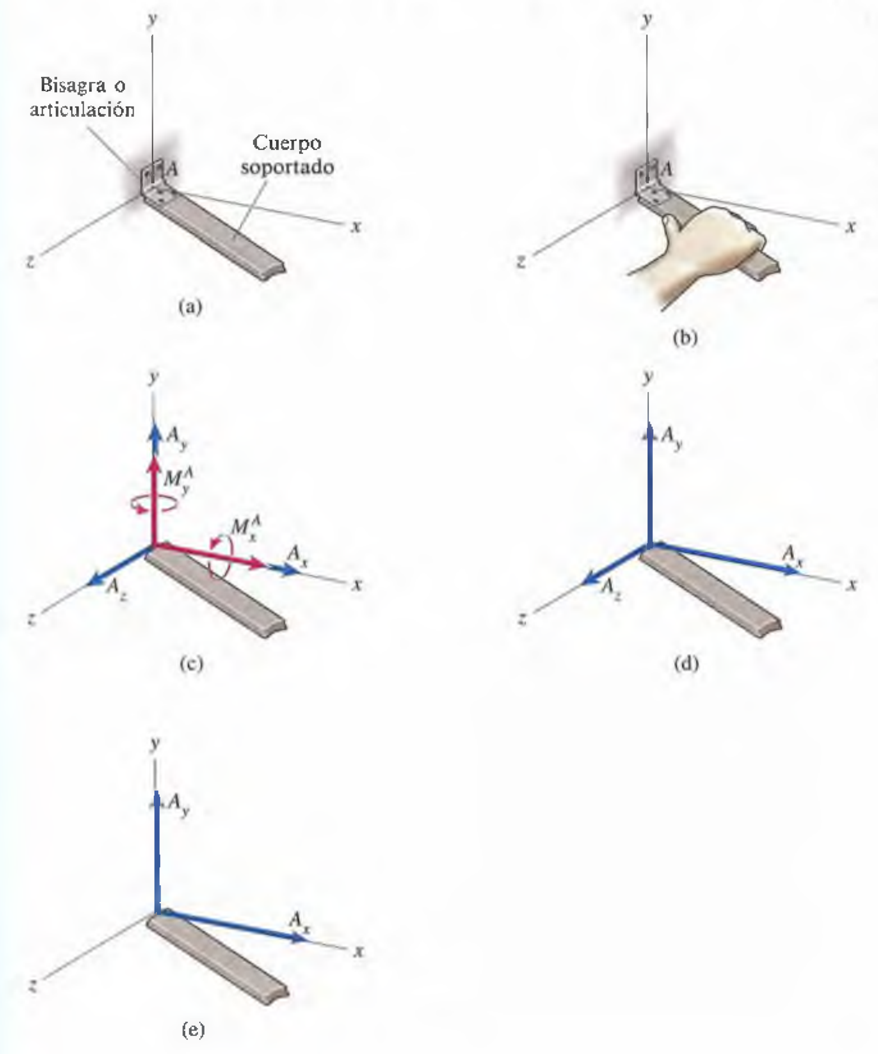


Figura 5.29

(a) Articulación o bisagra. El eje z está alineado con el eje de la articulación.
(b) Sujetando una barra soportada.
(c) En general, una articulación o bisagra puede generar cinco reacciones: tres componentes de fuerza y dos pares.
(d) Las reacciones cuando la bisagra no genera pares.
(e) Las reacciones cuando la bisagra no genera pares ni una fuerza paralela al eje de ella.

Cojinete El tipo de **cojinete** mostrado en la figura 5.30(a) soporta un árbol (o eje, o flecha) circular que puede girar alrededor de su eje. Las reacciones son idénticas a las generadas por una articulación. En el caso más general (Fig. 5.30b), el cojinete puede generar tanto una fuerza sobre el árbol soportado en cada dirección coordenada, como pares respecto a ejes perpendiculares al árbol, pero no un par respecto al eje del árbol.

Como con la articulación, puede haber casos en que el cojinete no genere pares (Fig. 5.30c) o no genere ni pares ni fuerza paralela al eje del árbol (Fig. 5.30d). Algunos cojinetes están diseñados así para aplicaciones específicas. En los ejemplos y problemas indicaremos cuándo un cojinete no ejerce todas las reacciones mostradas en la figura 5.30(b).

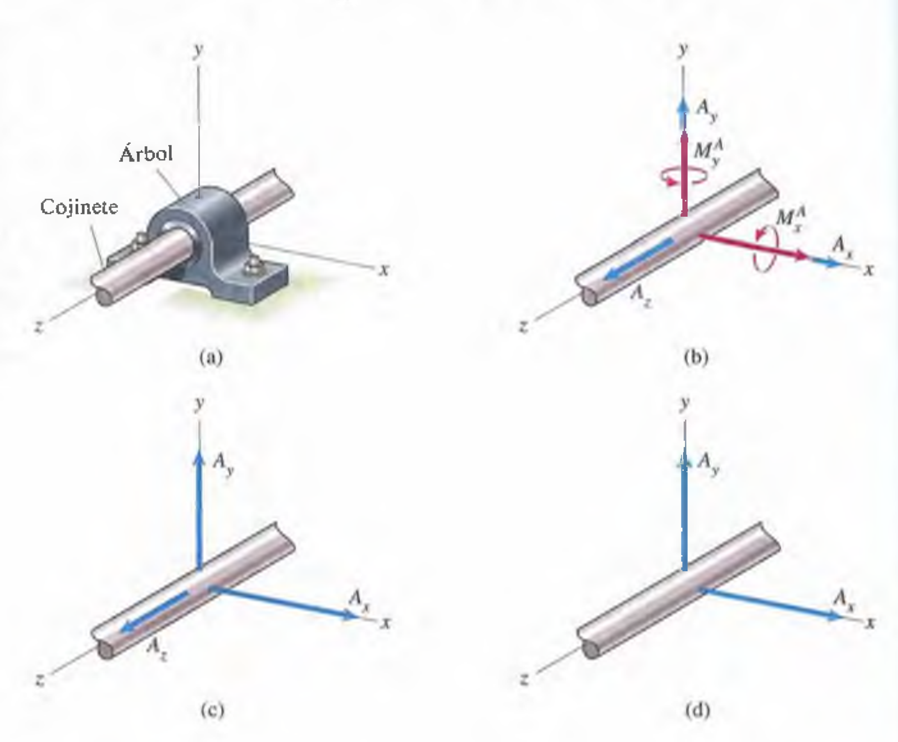


Figura 5.30
(a) Cojinete. El eje z está alineado con el eje del árbol.
(b) En general, un cojinete puede generar cinco reacciones: tres componentes de fuerza y dos pares.
(c) Las reacciones cuando el cojinete no genera pares.
(d) Reacciones cuando el cojinete no genera pares ni una fuerza paralela al eje del árbol.

Soporte de empotramiento Ya hemos visto el soporte empotrado (Fig. 5.31a). Supongamos que sujetamos una barra empotrada (Fig. 5.31b). No podemos trasladarla en ninguna dirección ni hacerla girar respecto a algún eje. El empotramiento puede generar fuerzas A_x, A_y y A_z en cada dirección coordenada, así como pares M_x, M_y y M_z respecto a cada eje coordenado (Fig. 5.31c).

En la tabla 5.2 se resumen las convenciones de soportes usados comúnmente en las aplicaciones tridimensionales.

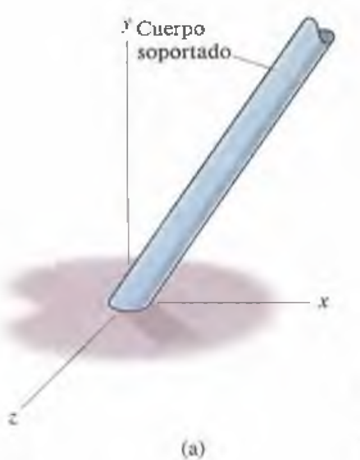


Figura 5.31
(a) Empotramiento.

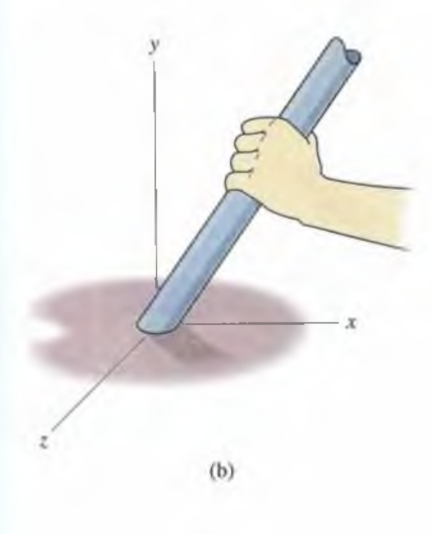
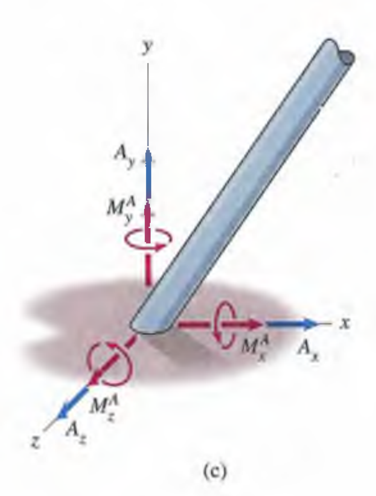


Figura 5.31

(b) Sujetando una barra empotrada.
(c) Un empotramiento puede generar seis reacciones: tres componentes de fuerza y tres pares.



Ecuaciones escalares de equilibrio

Las cargas y reacciones sobre un cuerpo en equilibrio satisfacen las seis ecuaciones escalares de equilibrio,

$$\Sigma F_x = 0, \tag{5.16}$$

$$\Sigma F_y = 0, \tag{5.17}$$

$$\Sigma F_z = 0, \tag{5.18}$$

$$\Sigma M_x = 0, \tag{5.19}$$

$$\Sigma M_y = 0, \tag{5.20}$$

$$\Sigma M_z = 0. \tag{5.21}$$

Es posible evaluar las sumas de los momentos respecto a cualquier punto. Aunque se pueden obtener otras ecuaciones sumando los momentos respecto a puntos adicionales, no serán independientes de las primeras ecuaciones. No se pueden obtener más de seis ecuaciones *independientes* de equilibrio de un diagrama de cuerpo libre, por lo que se pueden encontrar a lo sumo seis fuerzas o pares desconocidos.

Tabla 5.2 Soportes utilizados en tres dimensiones

Soportes	Reacciones
Cuerda o cable	Una fuerza colineal
Contacto con una superficie lisa	Una fuerza normal
Contacto con una superficie rugosa	Tres componentes de fuerza
Soporte de bola y cuenca	Tres componentes de fuerza
Soporte de rodillos	Una fuerza normal

Tabla 5.2 *Continuación*

Soportes	Reacciones
Articulación (el eje z es paralelo al eje de la articulación)	Tres componentes de fuerza, dos componentes de par
Cojinete (El eje z es paralelo al eje del árbol soportado)	(Cuando no se generan pares) (Cuando no se generan pares ni fuerza axial)
Soporte empotrado	Tres componentes de fuerza, Tres componentes de par

En los ejemplos siguientes determinaremos las reacciones sobre cuerpos con varios tipos de cargas y soportes. Los pasos requeridos son ya conocidos gracias a nuestra experiencia con las aplicaciones bidimensionales:

1. Dibujar el diagrama de cuerpo libre. *El diagrama de cuerpo libre se debe obtener aislando el cuerpo de sus soportes y mostrando las cargas y las reacciones que los soportes pueden generar sobre el cuerpo.*
2. Aplicar las ecuaciones de equilibrio. *Se usan las ecuaciones (5.16)-(5.21) para determinar las reacciones.*

Ejemplo 5.8

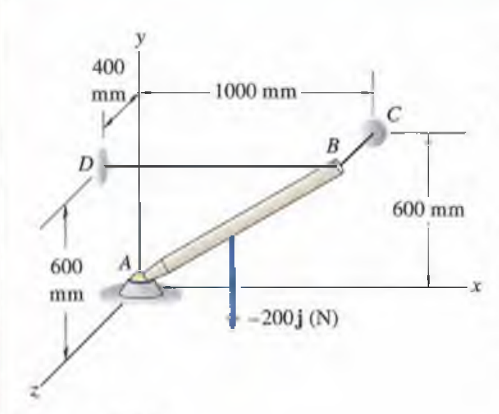


Figura 5.32

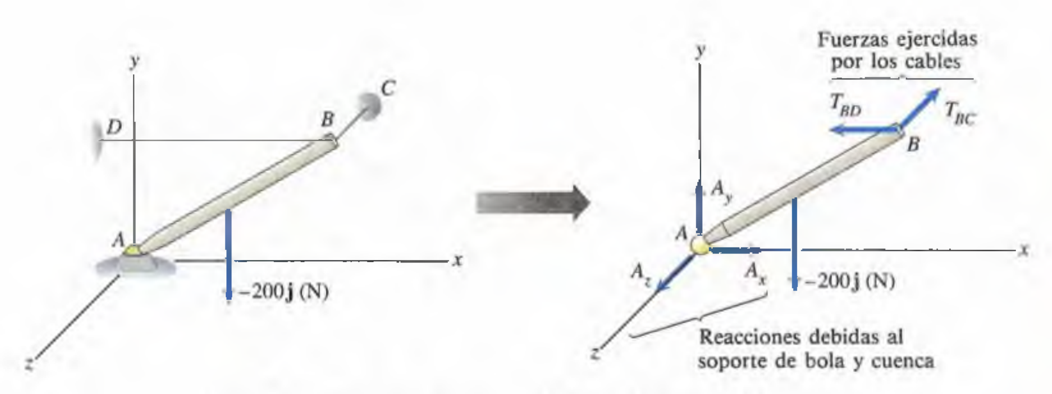
La barra AB de la figura 5.32 está soportada por los cables BC y BD y por un soporte de bola y cuenca en A. El cable BC es paralelo al eje z y el cable BD es paralelo al eje x. El peso de 200 N de la barra actúa en su punto medio. ¿Qué valor tienen las tensiones en los cables y las reacciones en A?

ESTRATEGIA

Debemos obtener el diagrama de cuerpo libre de la barra AB aislándola del soporte en A y de los dos cables. Podemos entonces usar las ecuaciones de equilibrio para determinar las reacciones en A y las tensiones en los cables.

SOLUCIÓN

Dibujo del diagrama de cuerpo libre En la figura (a) aislamos la barra y mostramos las reacciones que se pueden generar sobre ella. El soporte de bola y cuenca puede generar tres componentes de fuerza, A_x, A_y y A_z. Los términos T_{BC} y T_{BD} representan las tensiones en los cables.



(a) Obtención del diagrama de cuerpo libre de la barra.

Aplicación de las ecuaciones de equilibrio Las sumas de las fuerzas en cada dirección coordenada son iguales a cero:

$$\Sigma F_x = A_x - T_{BD} = 0,$$

$$\Sigma F_y = A_y - 200 = 0, \qquad (5.22)$$

$$\Sigma F_z = A_z - T_{BC} = 0.$$

Sea $\mathbf{r}_{AB}$ el vector de posición de A a B. La suma de los momentos respecto a A es

$$\Sigma \mathbf{M}_{(\text{punto } A)} = \mathbf{r}_{AB} \times (-T_{BC}\,\mathbf{k}) + \mathbf{r}_{AB} \times (-T_{BD}\,\mathbf{i}) + \tfrac{1}{2}\mathbf{r}_{AB} \times (-200\,\mathbf{j})$$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0.6 & 0.4 \\ 0 & 0 & -T_{BC} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0.6 & 0.4 \\ -T_{BD} & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0.5 & 0.3 & 0.2 \\ 0 & -200 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (-0.6T_{BC} + 40)\,\mathbf{i} + (T_{BC} - 0.4T_{BD})\,\mathbf{j}$$

$$+ (0.6T_{BD} - 100)\,\mathbf{k}.$$

Cada una de las componentes de este vector (las sumas de los momentos respecto a los tres ejes coordenados) es igual a cero:

$$\Sigma M_x = -0.6T_{BC} + 40 = 0,$$

$$\Sigma M_y = T_{BC} - 0.4T_{BD} = 0,$$

$$\Sigma M_z = 0.6T_{BD} - 100 = 0.$$

Resolviendo estas ecuaciones obtenemos las tensiones en los cables:

$$T_{BC} = 66.7 \text{ N}, \qquad T_{BD} = 166.7 \text{ N}.$$

(Observe que necesitamos sólo dos de las tres ecuaciones para obtener las dos tensiones. La tercera ecuación es redundante.)

De las ecuaciones (5.22), obtenemos las reacciones en el soporte de bola y cuenca:

$$A_x = 166.7 \text{ N}, \qquad A_y = 200 \text{ N}, \qquad A_z = 66.7 \text{ N}.$$

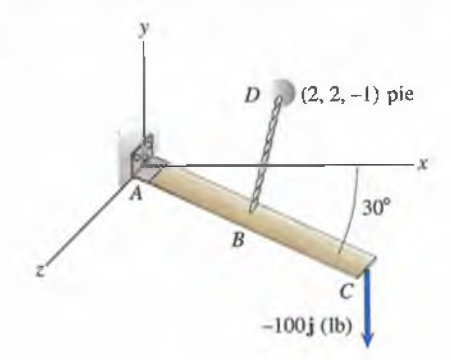
COMENTARIO

Observe que al sumar momentos respecto a A obtuvimos ecuaciones en las cuales no aparecen las reacciones desconocidas A_x, A_y y A_z. A menudo la obtención de las soluciones se puede simplificar de esta manera.

Ejemplo 5.9

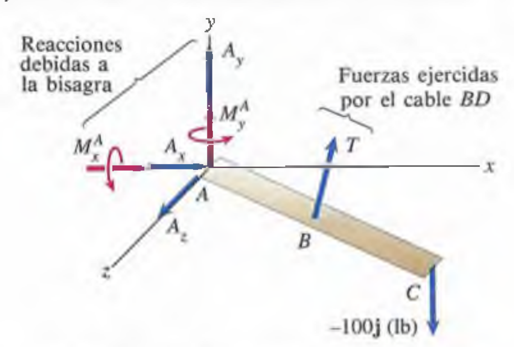
La barra AC tiene 4 pies de largo y la soportan una bisagra en A y el cable BD. El eje de la bisagra corre por el eje z. La línea central de la barra está en el plano x-y, y el punto B de conexión del cable es el punto medio de la barra. Halle la tensión en el cable y las reacciones generadas en la barra por la bisagra.

Figura 5.33



SOLUCIÓN

Dibujar diagrama de cuerpo libre Aislamos la barra de la bisagra y del cable y mostramos las reacciones que generan (Fig. a). Los términos A_x, A_y y A_z son las componentes de fuerza generadas por la bisagra y los términos M_x^A y M_y^A son los pares ejercidos por la bisagra respecto a los ejes x y y. (Recuerde que la bisagra no puede generar un par sobre la barra respecto al eje de la bisagra.) El término T es la tensión en el cable.



(a) Diagrama de cuerpo libre de la barra.

Aplicar ecuaciones de equilibrio Primero expresamos la fuerza en el cable en función de sus componentes. Las coordenadas del punto B son (2 cos 30°, −2 sen 30°, 0) pies, de manera que el vector de posición de B a D es

$$\mathbf{r}_{BD} = [2 - 2\cos 30°]\mathbf{i} + [2 - (-2 \operatorname{sen} 30°)]\mathbf{j} + [-1 - (0)]\mathbf{k}$$

$$= 0.268\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - k.$$

Dividimos este vector entre su magnitud para obtener un vector unitario $\mathbf{e}_{BD}$ que apunta del punto B al punto D:

$$\mathbf{e}_{BD} = \frac{\mathbf{r}_{BD}}{|\mathbf{r}_{BD}|} = 0.084\,\mathbf{i} + 0.945\,\mathbf{j} - 0.315\,\mathbf{k}.$$

Podemos escribir ahora la fuerza del cable como el producto de su magnitud y $\mathbf{e}_{BD}$:

$$T\,\mathbf{e}_{BD} = T(0.084\,\mathbf{i} + 0.945\,\mathbf{j} - 0.315\,\mathbf{k}).$$

Las sumas de las fuerzas en cada dirección coordenada deben ser iguales a cero:

$$\Sigma F_x = A_x + 0.084T = 0,$$

$$\Sigma F_y = A_y + 0.945T - 100 = 0, \qquad (5.23)$$

$$\Sigma F_z = A_z - 0.315T = 0.$$

Si sumamos momentos respecto a A, las ecuaciones resultantes no contienen las reacciones desconocidas A_x, A_y y A_z. Los vectores de posición de A a B y de A a C son

$$\mathbf{r}_{AB} = 2\cos 30°\,\mathbf{i} - 2\,\mathrm{sen}\,30°\,\mathbf{j},$$

$$\mathbf{r}_{AC} = 4\cos 30°\,\mathbf{i} - 4\,\mathrm{sen}\,30°\,\mathbf{j}.$$

La suma de los momentos respecto a A es

$$\Sigma \mathbf{M}_{(\text{punto } A)} = M_x^A\mathbf{i} + M_y^A\mathbf{j} + \mathbf{r}_{AB} \times (T\,\mathbf{e}_{BD}) + \mathbf{r}_{AC} \times (-100\,\mathbf{j})$$

$$= M_x^A\mathbf{i} + M_y^A\mathbf{j} + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1.732 & -1 & 0 \\ 0.084T & 0.945T & -0.315T \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3.464 & -2 & 0 \\ 0 & -100 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (M_x^A + 0.315T)\,\mathbf{i} + (M_y^A + 0.546T)\,\mathbf{j}$$

$$+ (1.72T - 346)\,\mathbf{k} = \mathbf{0}.$$

De esta ecuación vectorial obtenemos las ecuaciones escalares

$$\Sigma M_x = M_x^A + 0.315T = 0,$$

$$\Sigma M_y = M_y^A + 0.546T = 0,$$

$$\Sigma M_z = 1.72T - 346 = 0.$$

Al resolver estas ecuaciones obtenemos las reacciones

$$T = 201 \text{ lb}, \quad M_x^A = -63.4 \text{ lb-pie}, \quad M_y^A = -109.8 \text{ lb-pie}.$$

Entonces, de las ecuaciones (5.23) obtenemos las fuerzas ejercidas sobre la barra por la bisagra:

$$A_x = -17.0 \text{ lb}, \; A_y = -90.2 \text{ lb}, \; A_z = 63.4 \text{ lb}.$$

Ejemplo 5.10

La placa de la figura 5.34 está soportada por bisagras en A y B y por el cable CE. Las bisagras, propiamente alineadas, no generan pares sobre la placa, y la bisagra en A no genera una fuerza sobre la placa en la dirección del eje de la bisagra. Determine las reacciones en las bisagras y la tensión en el cable.

Figura 5.34

SOLUCIÓN

Dibujo del diagrama de cuerpo libre Aislamos la placa y mostramos las reacciones en las bisagras y la fuerza ejercida por el cable (Fig. a). El término T es la fuerza ejercida sobre la placa por el cable CE.

Aplicación de las ecuaciones de equilibrio Como conocemos las coordenadas de los puntos C y E, podemos expresar la fuerza en el cable como el producto de su magnitud T y un vector unitario dirigido de C a E. El resultado es

$$T(-0.842\,\mathbf{i} + 0.337\,\mathbf{j} + 0.421\,\mathbf{k}).$$

Las sumas de las fuerzas en cada dirección coordenada deben ser iguales a cero:

$$\sum F_x = A_x + B_x - 0.842T = 0,$$

$$\sum F_y = A_y + B_y + 0.337T - 400 = 0, \qquad (5.24)$$

$$\sum F_z = B_z + 0.421T = 0.$$

Si sumamos los momentos respecto a B, las ecuaciones resultantes no contendrán las tres reacciones desconocidas en B. La suma de los momentos respecto a B es

$$\Sigma \mathbf{M}_{(\text{punto } B)} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0.2 & 0 & 0 \\ -0.842T & 0.337T & 0.421T \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & 0.2 \\ A_x & A_y & 0 \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0.2 & 0 & 0.2 \\ 0 & -400 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (-0.2A_y + 80)\,\mathbf{i} + (-0.0842T + 0.2A_x)\,\mathbf{j}$$

$$+ (0.0674T - 80)\,\mathbf{k} = \mathbf{0}.$$

(a) Diagrama de cuerpo libre de la placa.

Las ecuaciones escalares son

$$\Sigma M_x = -0.2A_y + 80 = 0,$$

$$\Sigma M_y = -0.0842T + 0.2A_x = 0,$$

$$\Sigma M_z = 0.0674T - 80 = 0.$$

Al resolver estas ecuaciones obtenemos las reacciones

$$T = 1187\text{ N}, \quad A_x = 500\text{ N}, \quad A_y = 400\text{ N}.$$

Luego, de las ecuaciones (5.24), las reacciones en B son

$$B_x = 500 \text{ N}, \quad B_y = -400 \text{ N}, \quad B_z = -500 \text{ N}.$$

COMENTARIO

Si nuestro único objetivo hubiese sido determinar la tensión T, podríamos haberlo hecho con facilidad estableciendo que la suma de los momentos respecto a la línea AB (el eje z) es igual a cero. Como las reacciones en las bisagras no ejercen momento respecto al eje z, obtendríamos la ecuación

$$(0.2)(0.337T) - (0.2)(400) = 0,$$

que da como resultado $T = 1187$ N.

Problemas

5.71 En la figura P5.71, la barra ABC está empotrada en A y cargada por las fuerzas

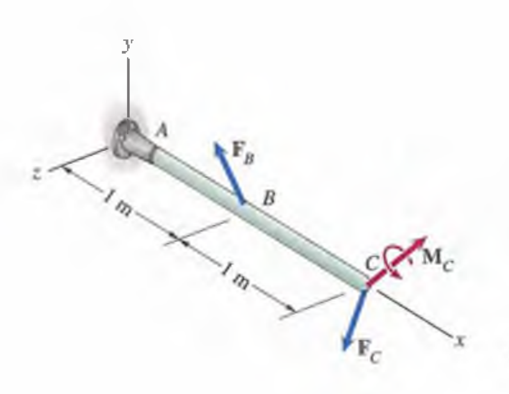
$$F_B = 2\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + 3\mathbf{k} \text{ (kN)},$$
$$F_C = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k} \text{ (kN)},$$

y el par

$$\mathbf{M}_C = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k} \text{ (kN-m)}.$$

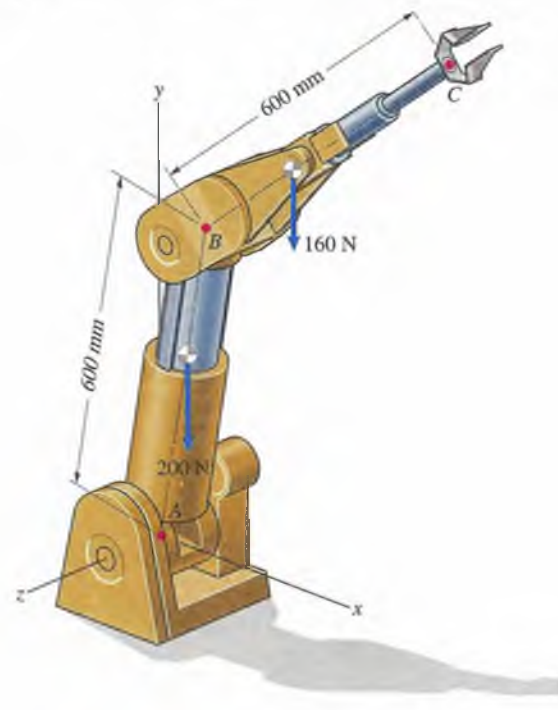
(a) Dibuje el diagrama de cuerpo libre de la barra.
(b) Determine las reacciones en A.

Estrategia: Aísle la barra del soporte empotrado y muestre las cargas y las reacciones en el soporte. Use las ecuaciones (5.16)-(5.21) para determinar las reacciones (recuerde que se pueden sumar los momentos respecto a cualquier punto).



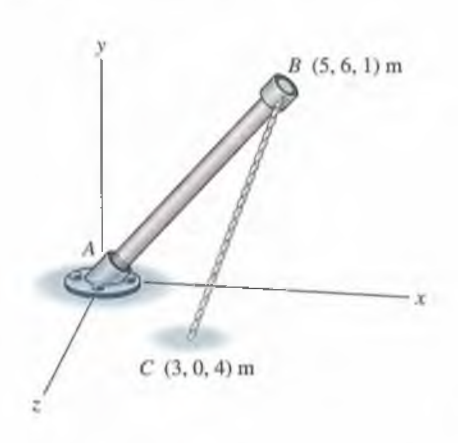
P5.71

5.72 El operador robótico mostrado está en reposo. Los pesos de los brazos AB y BC actúan en sus puntos medios. Los cosenos directores de la línea central del brazo AB son: $\cos\theta_x = 0.500$, $\cos\theta_y = 0.866$, $\cos\theta_z = 0$, y los cosenos directores de la línea central del brazo BC son: $\cos\theta_x = 0.707$, $\cos\theta_y = 0.619$, $\cos\theta_z = -0.342$. El soporte en A se comporta como un empotramiento. ¿Qué valor tienen las reacciones en A?



P5.72

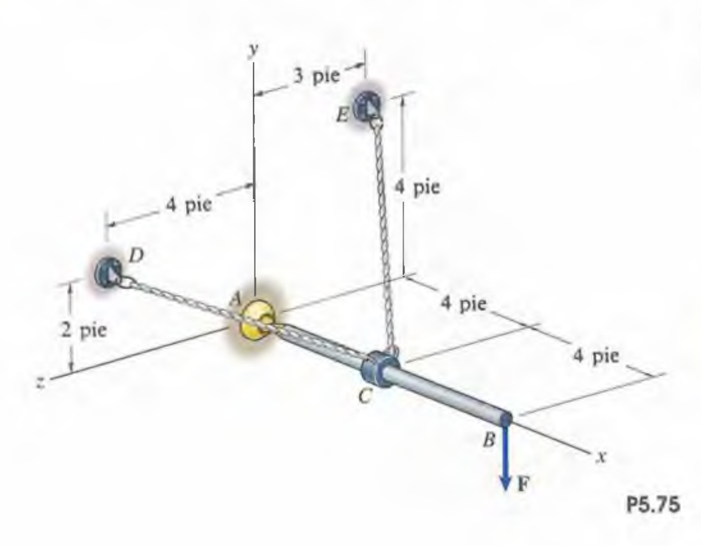
5.73 La barra AB mostrada tiene un soporte de empotramiento en A. La tensión en el cable BC es de 10 kN.
(a) Dibuje el diagrama de cuerpo libre de la barra.
(b) Determine las reacciones en A.



P5.73

5.74 Considere la barra del problema 5.73. La magnitud del par ejercido sobre la barra por el soporte empotrado es de 100 kN-m. ¿Qué valor tiene la tensión en el cable?

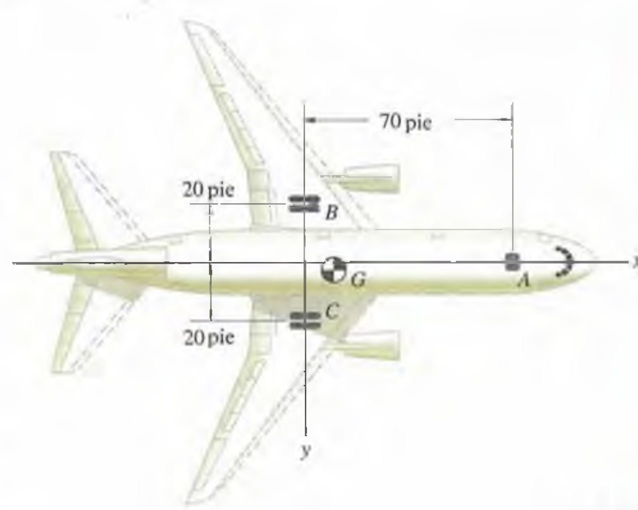
5.75 El pescante AB de la figura P5.75 está sometido a una fuerza $\mathbf{F} = -1000\mathbf{j}$ (lb) en B y está sostenido por un soporte de bola y cuenca en A y por los cables CD y CE.
(a) Dibuje el diagrama de cuerpo libre del pescante.
(b) Determine las tensiones en los cables y las reacciones en A.



P5.75

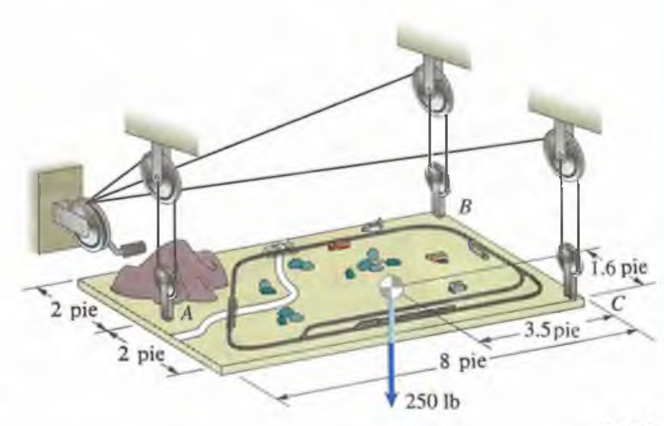
5.76 (Véase Fig. P5.75.) La fuerza **F** apunta hacia abajo (paralela al eje y). Cada uno de los cables CD y CE resiste con seguridad una tensión de 5000 lb. Con base en este criterio, ¿cuál es la magnitud máxima segura de **F**?

5.77 El avión mostrado está en reposo sobre el piso ($z = 0$ es el nivel del piso). Su tren de aterrizaje está apoyado en los puntos A, B y C. Las coordenadas del punto G donde actúa el peso de 350 klb del avión son (10, 1.5, −15) pies. ¿Qué valor tienen las reacciones normales ejercidas por el piso sobre el tren de aterrizaje del avión?



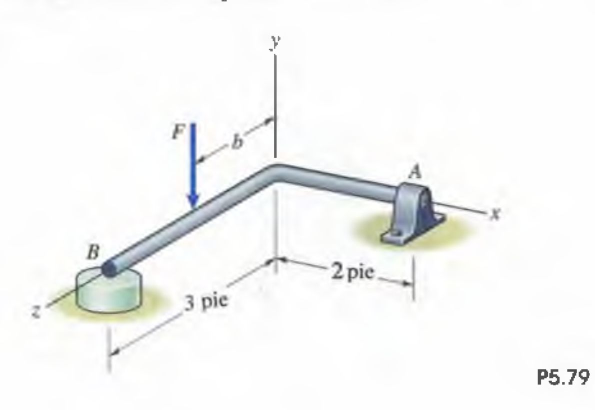
P5.77

5.78 Un ingeniero diseña un sistema de poleas para desplazar sus trenes modelo hacia arriba y hacia un lado cuando éstos no se encuentran en uso. ¿Qué valor tienen las tensiones en las tres cuerdas cuando el sistema está en equilibrio?



P5.78

5.79 La barra en L de la figura P5.79 está soportada por un cojinete en A y descansa sobre una superficie horizontal en B. La fuerza vertical $F = 800$ lb y la distancia $b = 1.5$ pies. Determine las reacciones en A y B.

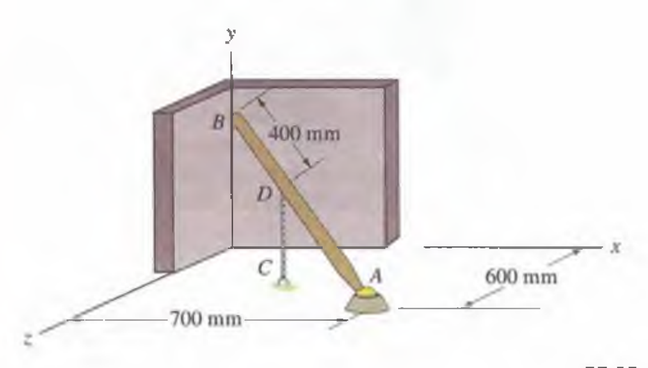


P5.79

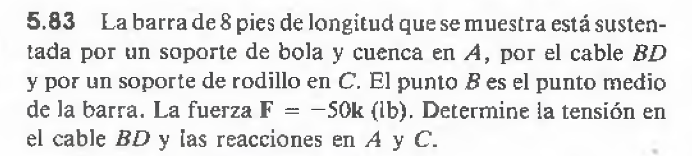
5.80 Considere el sistema del problema 5.79. La fuerza vertical $F = 800$ lb y la distancia $b = 1.5$ pies. Si las reacciones ejercidas en A y B se representan con una sola fuerza equivalente, ¿qué valor tiene la fuerza y en qué punto corta su línea de acción el eje central de la barra?

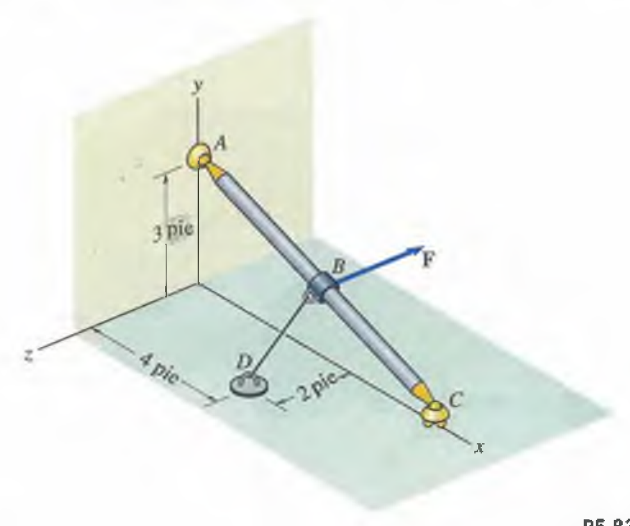
5.81 Considere el sistema del problema 5.79. La fuerza vertical $F = 800$ lb. El cojinete en A soportará con seguridad una fuerza de 500 lb y un par de 1000 lb-pie. El soporte en B resistirá con seguridad una fuerza de 500 lb. Con base en esos criterios, ¿cuál es el intervalo admisible para la distancia b?

5.82 En la figura P5.82, la barra de 1.1 m de longitud está soportada en A por un soporte de bola y cuenca y las dos paredes son lisas. La tensión en el cable vertical CD es de 1 kN.
(a) Dibuje el diagrama de cuerpo libre de la barra.
(b) Determine las reacciones en A y B.



P5.82

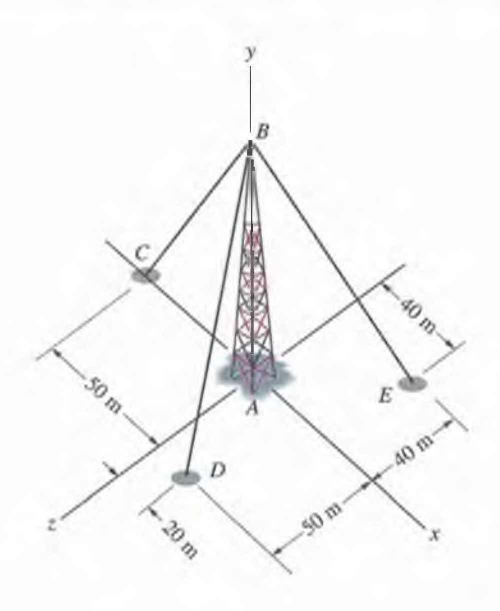

5.83 La barra de 8 pies de longitud que se muestra está sustentada por un soporte de bola y cuenca en A, por el cable BD y por un soporte de rodillo en C. El punto B es el punto medio de la barra. La fuerza $\mathbf{F} = -50\mathbf{k}$ (lb). Determine la tensión en el cable BD y las reacciones en A y C.



P5.83

5.84 Considere la barra de 8 pies del problema 5.83. La fuerza $\mathbf{F} = F_y\mathbf{j} - 50\mathbf{k}$ (lb). ¿Cuál es el valor máximo de F_y para el cual el soporte de rodillo en C permanecerá en el suelo?

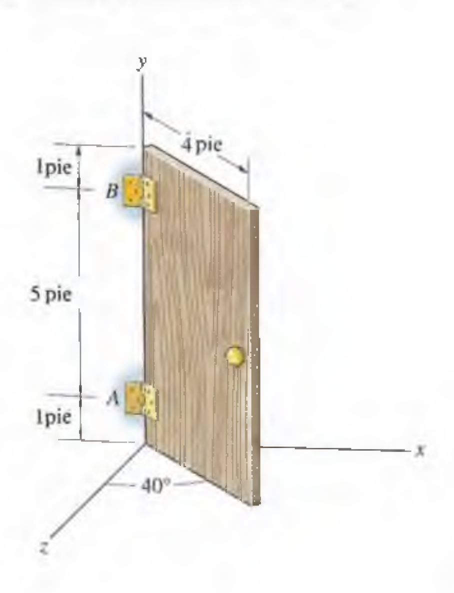
5.85 La torre tiene 70 m de altura. La tensión en cada cable es de 2 kN. Considere la base de la torre A como un soporte de empotramiento. ¿Qué valores tienen las reacciones en A?



P5.85

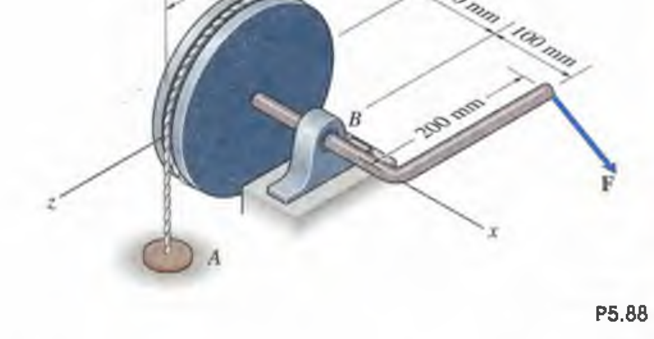
5.86 (Véase Fig. P5.85.) Si la tensión en el cable BC es de 2 kN, ¿cuáles deben ser las tensiones en BD y BE para que el par generado sobre la torre por el empotramiento en A sea igual a cero? ¿Qué valor tienen las reacciones resultantes en A?

5.87 La puerta de 40 lb está soportada por bisagras en A y B. El eje y es vertical. Las bisagras no generan pares sobre la puerta y la bisagra en B no genera una fuerza paralela al eje de la bisagra. El peso de la puerta actúa en su punto medio. ¿Qué valor tienen las reacciones en A y B?



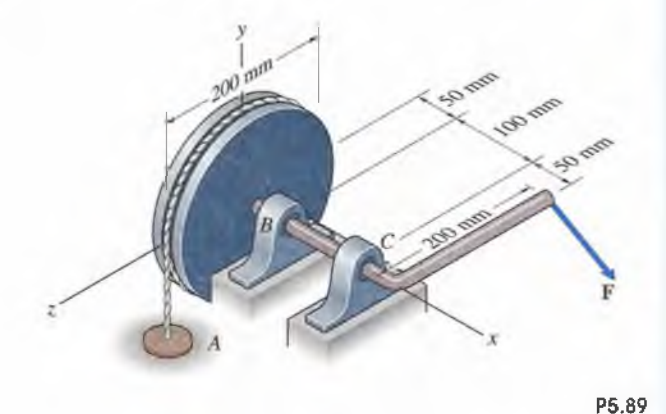
P5.87

5.88 El cable vertical que se muestra en la figura está conectado en A. Determine la tensión en el cable y las reacciones en el cojinete B debido a la fuerza $\mathbf{F} = 10\mathbf{i} - 30\mathbf{j} - 10\mathbf{k}$ (N).



P5.88

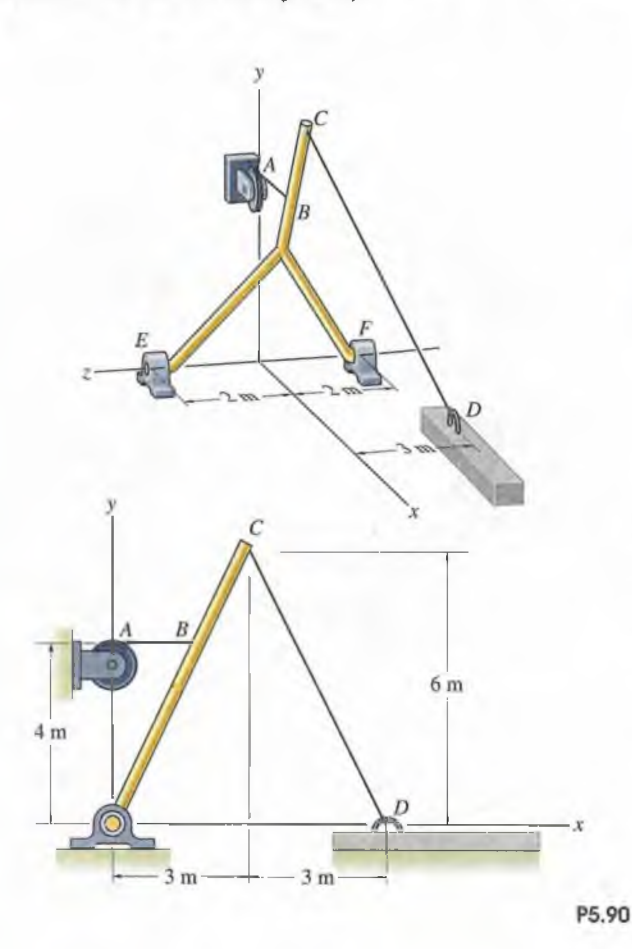
5.89 El dispositivo del problema 5.88 está mal diseñado porque los pares que deben ser soportados por el cojinete en B ocasionan que éste se "amarre". (Imagine que trata de abrir una puerta soportada por una sola bisagra.) En el diseño mejorado que se muestra en seguida, los cojinetes en B y C no soportan pares y el cojinete en C no genera una fuerza en la dirección x. Si la fuerza $\mathbf{F} = 10\mathbf{i} - 30\mathbf{j} - 10\mathbf{k}$ (N), ¿qué valor tienen la tensión en el cable vertical y las reacciones en los cojinetes B y C?



P5.89

5.90 El cable *CD* de la grúa de la figura está unido a un cuerpo en reposo en *D*. La grúa está soportada por los cojinetes *E* y *F* y el cable horizontal *AB*. La tensión en el cable *AB* es de 8 kN. Determine la tensión en el cable *CD*.

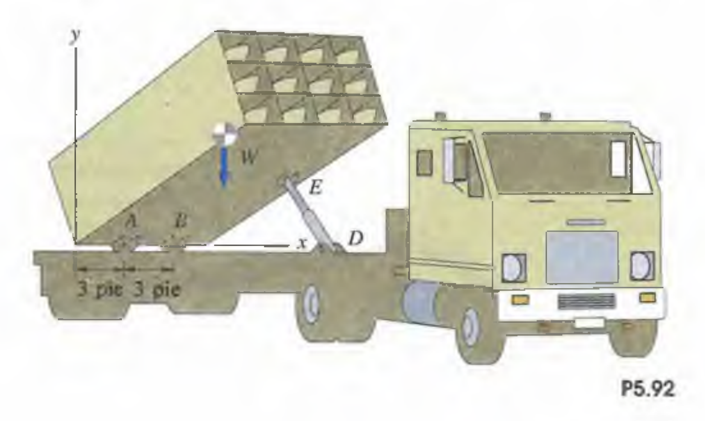
Estrategia: Como las reacciones ejercidas sobre la grúa por los cojinetes no generan momentos respecto al eje *z*, la suma de los momentos respecto a este eje debidos a las fuerzas ejercidas sobre la grúa por los cables *AB* y *CD*, es igual a cero (véase el comentario al final del Ej. 5.10).



P5.90

5.91 La grúa del problema 5.90 está soportada por el cable horizontal *AB* y los cojinetes en *E* y *F*. Los cojinetes no generan pares, y el cojinete en *F* no genera fuerza alguna en la dirección *z*. La tensión en el cable *AB* es de 8 kN. Determine las reacciones en *E* y *F*.

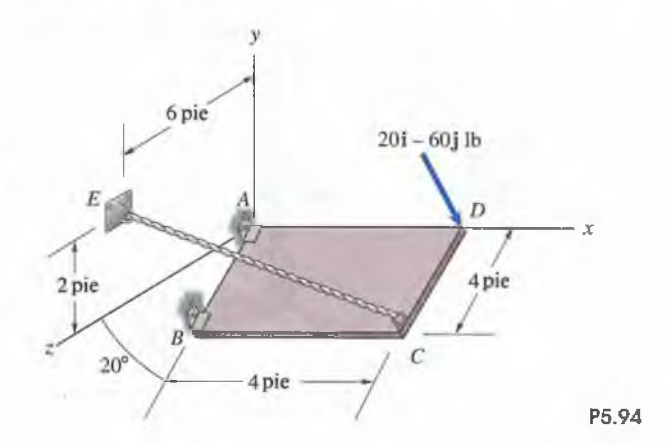
5.92 El lanzador de cohetes está soportado por el gato hidráulico *DE* y los cojinetes *A* y *B*. Éstos están sobre el eje *x* y soportan árboles paralelos a él. El cilindro hidráulico *DE* ejerce una fuerza sobre el lanzador que apunta a lo largo de la línea de *D* a *E*. Las coordenadas de *D* son (7, 0, 7) pies y las de *E* son (9, 6, 4) pies. El peso $W = 30$ klb actúa en el punto (4.5, 5, 2) pies. ¿Qué valor tiene la reacción sobre el lanzador en *E*?



P5.92

5.93 Considere el lanzador de cohetes descrito en el problema 5.92. Los cojinetes en *A* y *B* no generan pares, y el cojinete *B* no genera fuerza alguna en la dirección *x*. Determine las reacciones en *A* y *B*.

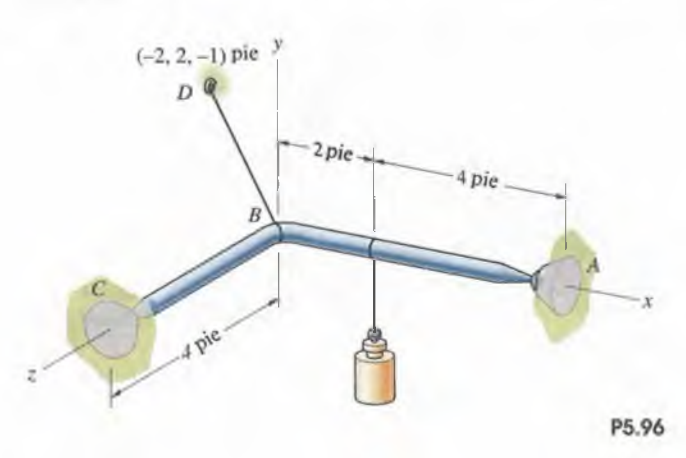
5.94 La placa de la figura está soportada por bisagras en *A* y *B* y por el cable *CE*; está cargada por una fuerza en *D*. Las bisagras no generan pares sobre la placa. ¿Qué valor tiene la tensión en el cable *CE*?



P5.94

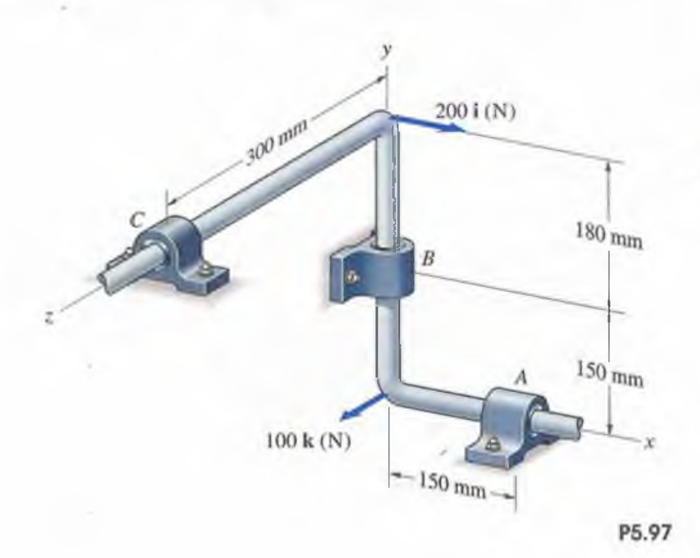
5.95 Considere la placa del problema 5.94. Las bisagras no generan pares sobre la placa, y la bisagra en B no genera una fuerza paralela al eje de la bisagra. Determine las magnitudes de las fuerzas ejercidas sobre la placa en A y B.

5.96 La barra ABC de la figura está sustentada por soportes de bola y cuenca en A y C y por el cable BD; está cargada por el peso suspendido de 200 lb. ¿Qué valor tiene la tensión en el cable BD?



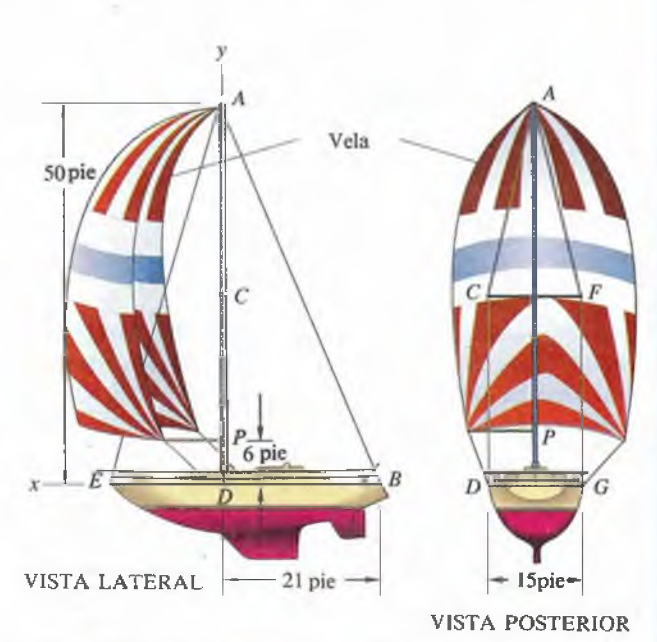
P5.96

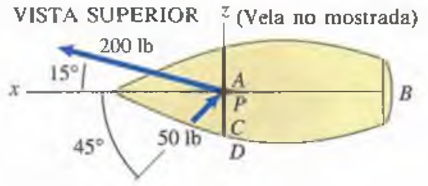
5.97 En la figura P5.97, los cojinetes en A, B y C no generan pares sobre la barra ni fuerzas en la dirección del eje de ésta. Determine las reacciones en los cojinetes debido a las dos fuerzas que actúan sobre la barra.



P5.97

5.98 El soporte que conecta el mástil del bote de vela a la cubierta se comporta como un soporte de bola y cuenca. La cuerda que une la pértiga (la vela) a la parte superior del mástil ejerce una fuerza de 200 lb sobre éste. La fuerza está en un plano horizontal a 15° del eje central del bote (vista superior). La pértiga de la vela ejerce una fuerza de 50 lb sobre el mástil en P. Esta fuerza se ubica en un plano horizontal a 45° del eje del bote (vista superior). El mástil está soportado por los cables AB y ACD (los cables AE y AFG están flojos y sus tensiones se pueden ignorar). Determine las tensiones en los cables AB y CD y las reacciones en la base del mástil.





P5.98

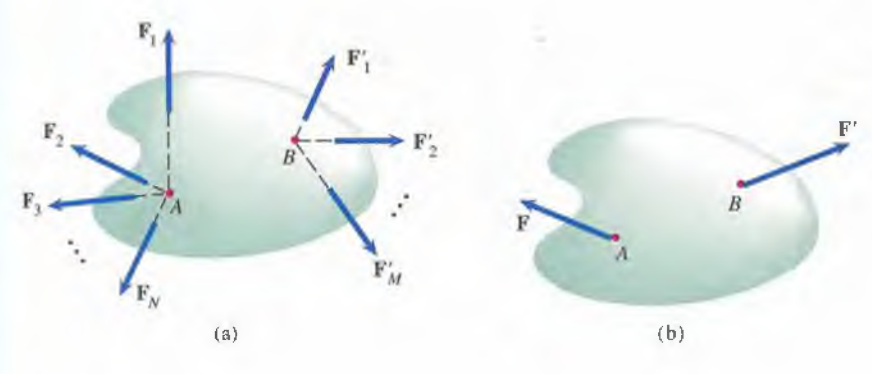
5.5 *Miembros sometidos a dos y tres fuerzas*

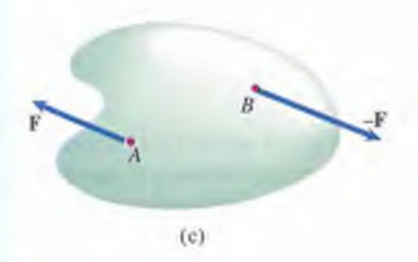
Hemos visto cómo se usan las ecuaciones de equilibrio para analizar cuerpos soportados y cargados de diferentes maneras. Aquí analizaremos dos casos particulares que ocurren con tanta frecuencia que es necesario familiarizarse con ellos. El primero es especialmente importante, y en el siguiente capítulo tiene un papel central en el análisis de estructuras.

Miembros de dos fuerzas

Si el sistema de fuerzas y momentos que actúa sobre un cuerpo equivale a dos fuerzas actuando en puntos diferentes, el cuerpo es un **miembro de dos fuerzas**. Por ejemplo, el cuerpo de la figura 5.35(a) está sometido a dos conjuntos de fuerzas concurrentes cuyas líneas de acción se intersecan en A y B. Como podemos representarlas con fuerzas únicas que actúan en A y B (Fig. 5.35b), donde $\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \cdots + \mathbf{F}_N$ y $\mathbf{F}' = \mathbf{F}_1' + \mathbf{F}_2' + \cdots + \mathbf{F}_M'$, este cuerpo es un miembro de dos fuerzas.

Si el cuerpo está en equilibrio, ¿qué podemos inferir acerca de las fuerzas $\mathbf{F}$ y $\mathbf{F}'$? La suma de las fuerzas es igual a cero sólo si $\mathbf{F}' = -\mathbf{F}$ (Fig. 5.35c). Además, las fuerzas $\mathbf{F}$ y $-\mathbf{F}$ forman un par, por lo que la suma de los momentos no es cero a menos que las líneas de acción de las fuerzas se encuentren a lo largo de la línea que pasa por los puntos A y B (Fig. 5.35d). Por tanto, **la condición de equilibrio nos dice que las dos fuerzas son iguales en magnitud y opuestas en dirección, y que tienen la misma línea de acción.** No obstante, sin información adicional no podemos determinar su magnitud.





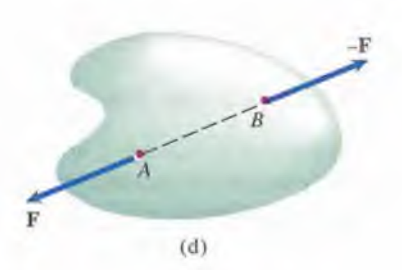


Figura 5.35

(a) Cuerpo sometido a dos conjuntos de fuerzas concurrentes.
(b) Representación de las fuerzas concurrentes mediante dos fuerzas $\mathbf{F}$ y $\mathbf{F}'$.
(c) Si el cuerpo está en equilibrio, las fuerzas deben ser iguales y opuestas.
(d) Las fuerzas forman un par a menos que tengan la misma línea de acción.

Un cable unido en dos puntos (Fig. 5.36a) es un ejemplo común de un miembro de 2 fuerzas (Fig. 5.36b). El cable ejerce fuerzas sobre los puntos de conexión, las cuales están dirigidas a lo largo de la línea entre ellos (Fig. 5.36c).

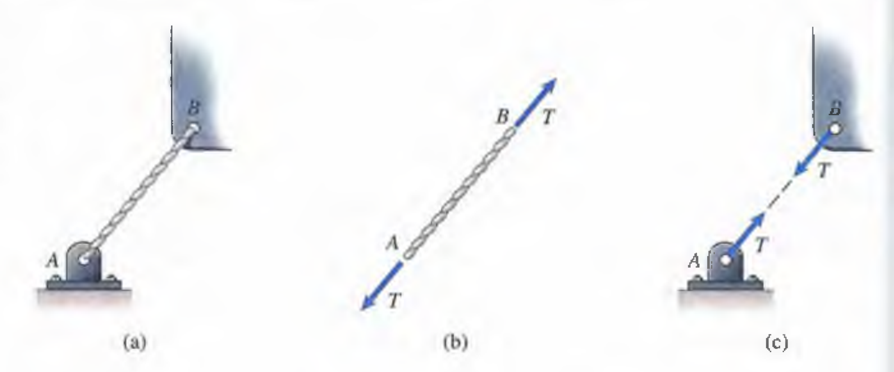


Figura 5.36
(a) Cable sostenido en A y en B.
(b) El cable es un miembro de dos fuerzas.
(c) Fuerzas ejercidas por el cable.

Una barra con dos soportes que ejercen sólo fuerzas sobre ella (ningún momento), y que no está sometida a ninguna carga intermedia, es un miembro de dos fuerzas (Fig. 5.37a). Tales barras suelen usarse como soportes para otros cuerpos. Como la barra es un miembro de dos fuerzas, las líneas de acción de las fuerzas ejercidas sobre la barra deben coincidir con la línea entre los soportes (Fig. 5.37b). Note que, a diferencia de un cable, la barra puede ejercer fuerzas en A y B en las direcciones mostradas en la figura (c) o en las direcciones opuestas (o sea, el cable sólo puede tirar de sus soportes, mientras que la barra puede tirar de ellos o empujarlos).

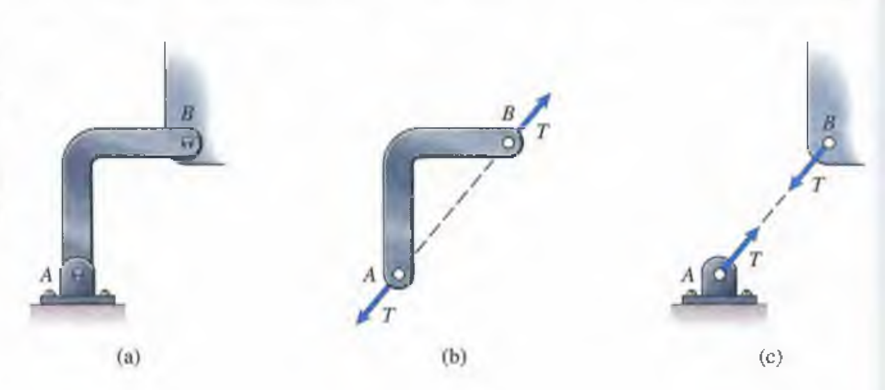


Figura 5.37
(a) La barra AB conecta el cuerpo al soporte de pasador.
(b) La barra AB es un miembro de dos fuerzas.
(c) Fuerza ejercida sobre el cuerpo soportado por la barra AB.

Hemos supuesto que los pesos del cable y de la barra se pueden despreciar en comparación con las fuerzas ejercidas sobre ellos por sus soportes. Cuando no es éste el caso, entonces no son miembros de dos fuerzas.

Miembros de tres fuerzas

Si el sistema de fuerzas y momentos que actúan sobre un cuerpo equivale a tres fuerzas actuando en puntos diferentes, es un **miembro de tres fuerzas**. Podemos demostrar que si un miembro de tres fuerzas está en equilibrio, las fuerzas son coplanares y además paralelas o concurrentes.

Demostraremos primero que las fuerzas son coplanares. Sean ellas $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$ y $\mathbf{F}_3$, y sea P el plano que contiene los tres puntos de aplicación (Fig. 5.38a). Sea L la línea que pasa por los puntos de aplicación de $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$. Como los momentos debidos a $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$ respecto a L son cero, el momento debido a $\mathbf{F}_3$ respecto a L debe también ser cero (Fig. 5.38b):

$$[\mathbf{e} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{F}_3)]\mathbf{e} = [\mathbf{F}^3 \cdot (\mathbf{e} \times \mathbf{r})]\mathbf{e} = \mathbf{0}.$$

Esta ecuación requiere que $\mathbf{F}_3$ sea perpendicular a $\mathbf{e} \times \mathbf{r}$, de modo que $\mathbf{F}_3$ está contenida en P. Esto mismo muestra que $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$ están contenidas en P, así que las fuerzas son coplanares. (La demostración es diferente si los puntos de aplicación están sobre una línea recta, pero el resultado es el mismo.)

Si las tres fuerzas coplanares no son paralelas, habrá puntos en que sus líneas de acción se corten. Supongamos que las líneas de acción de dos de las fuerzas se cortan en un punto P. Entonces los momentos de esas dos fuerzas respecto a P son cero y la suma de los momentos respecto a P es cero sólo si la línea de acción de la tercera fuerza también pasa por P. Por tanto, las fuerzas son paralelas o bien concurrentes.

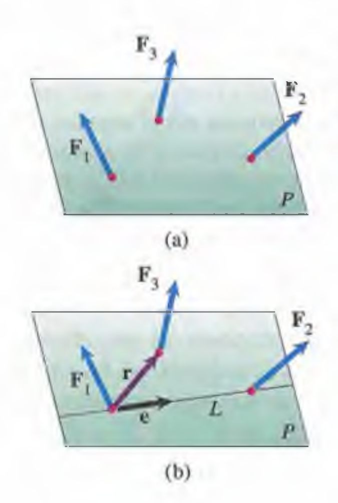


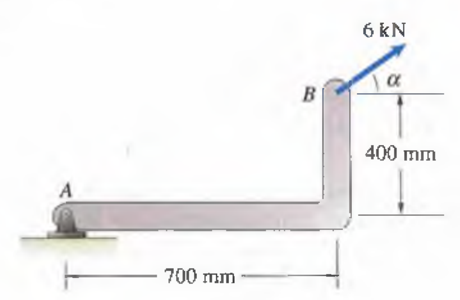
Figura 5.38
(a) Las tres fuerzas y el plano P.
(b) Determinación del momento debido a $\mathbf{F}_3$ respecto a L.

Advertir que un cuerpo en equilibrio es un miembro de dos o tres fuerzas brinda información sobre su diagrama de cuerpo libre, lo cual puede simplificar el análisis, como lo demostraremos en los ejemplos siguientes.

Ejemplo 5.11

La barra en L de la figura 5.39 tiene un soporte de pasador en A y una carga de 6 kN en B. El peso de la barra se puede despreciar. Determine el ángulo α y las reacciones en A.

Figura 5.39

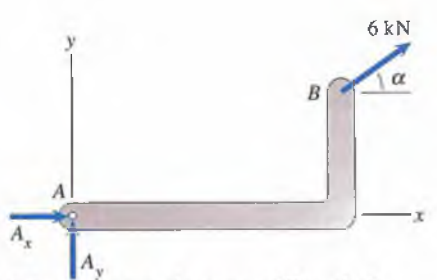


ESTRATEGIA

La barra es un miembro de dos fuerzas, ya que está sometida sólo a la fuerza de 6 kN en B y a la fuerza ejercida por el soporte de pasador. (Si no se pudiese despreciar el peso de la barra, ésta no sería un miembro de dos fuerzas.) Determinaremos de dos maneras el ángulo α y las reacciones en A: primero aplicando las ecuaciones de equilibrio y luego aprovechando el hecho de que la barra es un miembro de dos fuerzas.

SOLUCIÓN

Aplicación de las ecuaciones de equilibrio Dibujamos el diagrama de cuerpo libre de la barra de la figura (a), mostrando las reacciones en el soporte de pasador. Sumando momentos respecto al punto A, las ecuaciones de equilibrio son



(a) Diagrama de cuerpo libre de la barra.

$$\Sigma F_x = A_x + 6 \cos \alpha = 0,$$

$$\Sigma F_y = A_y + 6 \text{ sen } \alpha = 0,$$

$$\Sigma M_{(\text{punto } A)} = (6 \text{ sen } \alpha)(0.7) - (6 \cos \alpha)(0.4) = 0.$$

De la tercera ecuación vemos que $\alpha = \arctan(0.4/0.7)$. En el intervalo $0 \leq \alpha \leq 360°$, esta ecuación tiene dos soluciones: $\alpha = 29.7°$ y $\alpha = 209.7°$. Conocida α, podemos determinar A_x y A_y de las dos primeras ecuaciones de equilibrio. Las soluciones para los dos valores de α son

$$\alpha = 29.7°, \quad A_x = -5.21 \text{ kN}, \quad A_y = -2.98 \text{ kN},$$

y

$$\alpha = 209.7°, \quad A_x = 5.21 \text{ Kn}, \quad A_y = 2.98 \text{ kN}.$$

Consideración de la barra como miembro de dos fuerzas Sabemos que la fuerza de 6 kN en B y la fuerza ejercida por el soporte de pasador deben ser iguales en magnitud, opuestas en dirección, y dirigidas a lo largo de la línea que pasa por A y B. En las figuras (b) y (c) se muestran las dos posibilidades. Reconociendo entonces que la barra es un miembro de dos fuerzas, conocemos de inmediato las posibles direcciones de las fuerzas y la magnitud de la reacción en A.

En la figura (b) podemos ver que tan $\alpha = 0.4/0.7$, por lo que $\alpha = 29.7°$ y las componentes de la reacción en A son

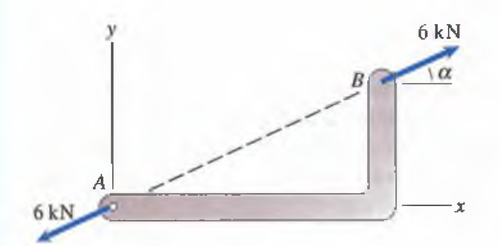
$$A_x = -6 \cos 29.7° = -5.21 \text{ kN},$$

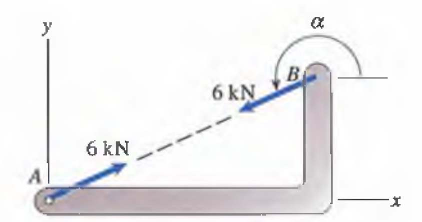
$$A_y = -6 \operatorname{sen} 29.7° = -2.98 \text{ kN}.$$

En la figura (c), $\alpha = 180° + 29.7° = 209.7°$, y las componentes de la reacción en A son

$$A_x = 6 \cos 29.7° = 5.21 \text{ kN},$$

$$A_y = 6 \operatorname{sen} 29.7° = 2.98 \text{ kN}.$$



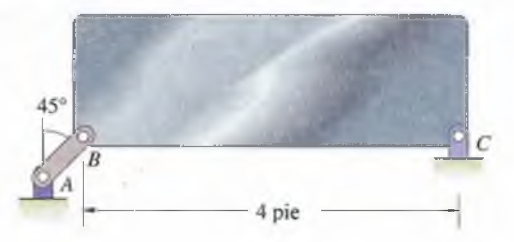


(b), (c) Posibles direcciones de las fuerzas.

Ejemplo 5.12

El peso de 100 lb de la placa rectangular en la figura 5.40 actúa en su punto medio. Determine las reacciones ejercidas sobre la placa en B y en C.

Figura 5.40



ESTRATEGIA

La placa está sometida a su peso y a las reacciones generadas por los soportes de pasador en B y en C, por lo que es un miembro de tres fuerzas. Además, la barra AB es un miembro de dos fuerzas, por lo que sabemos que la línea de acción de la reacción que genera sobre la placa en B está dirigida a lo largo de la línea de A a B. Podemos usar esta información para simplificar el diagrama de cuerpo libre de la placa.

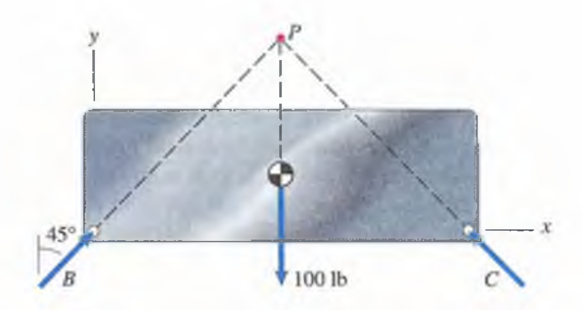
SOLUCIÓN

La reacción generada sobre la placa por el miembro AB de dos fuerzas debe estar dirigida a lo largo de la línea de A a B, y la línea de acción del peso es vertical. Como las tres fuerzas que actúan sobre la placa deben ser paralelas o concurrentes, sus líneas de acción se deben cortar en el punto P mostrado en la figura (a). De las ecuaciones de equilibrio

$$\Sigma F_x = B \text{ sen } 45° - C \text{ sen } 45° = 0,$$

$$\Sigma F_y = B \cos 45° + C \cos 45° - 100 = 0,$$

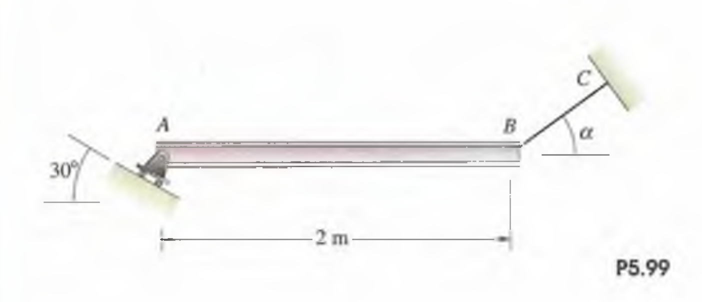
obtenemos las reacciones $B = C = 70.7$ lb.



(a) Diagrama de cuerpo libre de la placa. Las tres fuerzas deben ser concurrentes.

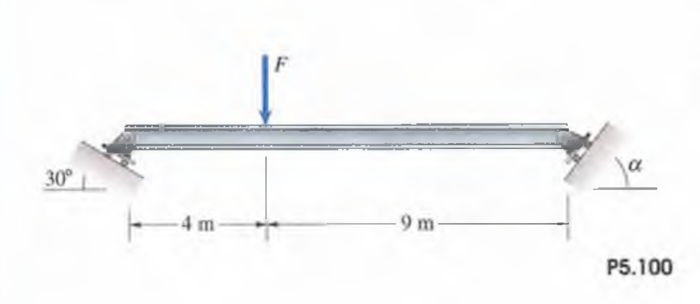
Problemas

5.99 La barra horizontal mostrada tiene una masa de 10 kg. Su peso actúa en el punto medio, y está soportada por un soporte de rodillo en A y por el cable BC. Use el hecho de que la barra es un miembro de tres fuerzas para determinar el ángulo α, la tensión en el cable BC y la magnitud de la reacción en A.



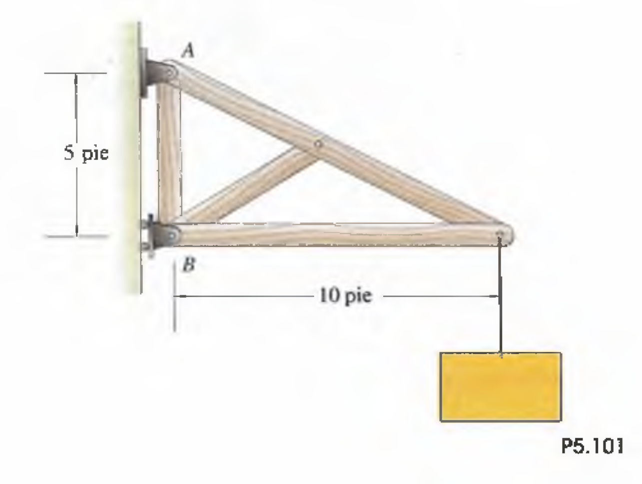
P5.99

5.100 La barra horizontal mostrada tiene un peso insignificante. Use el hecho de que la barra es un miembro de tres fuerzas a fin de determinar el ángulo α necesario para el equilibrio.



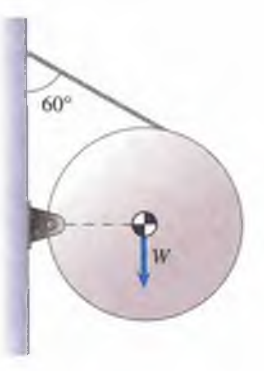
P5.100

5.101 En la figura P5.101, el peso suspendido es de 1000 lb. Si se ignora su peso, la estructura es un miembro de tres fuerzas. Use este hecho para determinar las magnitudes de las reacciones en A y B.



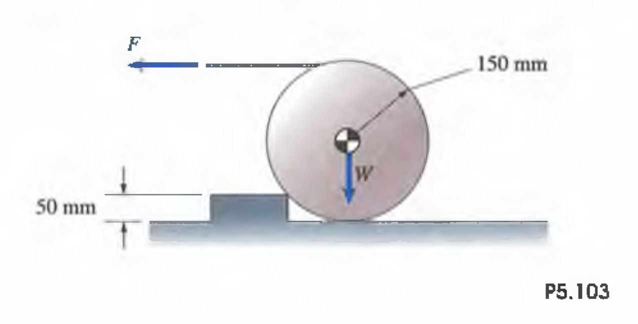
P5.101

5.102 En la figura P5.102, el peso $W = 50$ lb actúa en el centro del disco. Use el hecho de que el disco es un miembro de tres fuerzas para determinar la tensión en el cable y la magnitud de la reacción en el soporte de pasador.



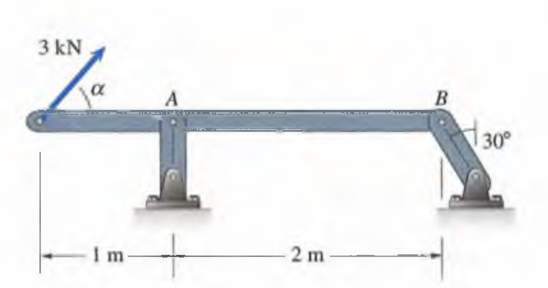
P5.102

5.103 El peso $W = 40$ N actúa en el centro del disco mostrado. Las superficies son rugosas. ¿Qué fuerza F es necesaria para levantar el disco del suelo?



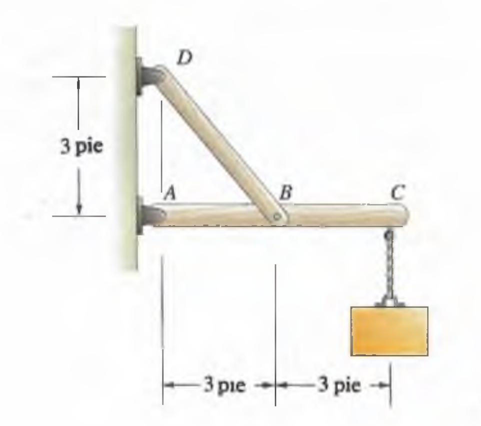
P5.103

5.104 Use el hecho de que la barra horizontal mostrada es un miembro de tres fuerzas para determinar el ángulo α y las magnitudes de las reacciones en A y B.



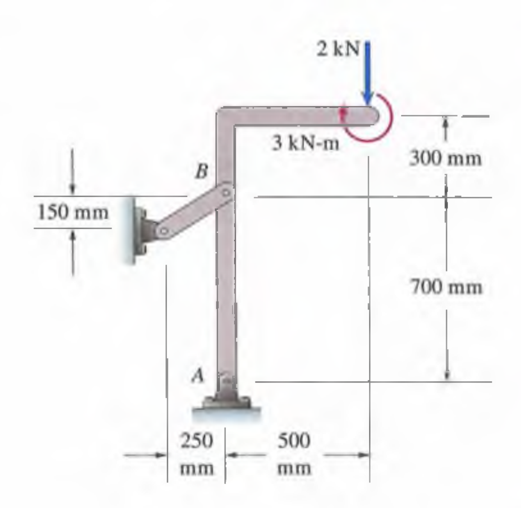
P5.104

5.105 En la figura P5.105, el peso suspendido es de 600 lb. Use el hecho de que el elemento ABC es un miembro de tres fuerzas para determinar las magnitudes de las reacciones en A y B.



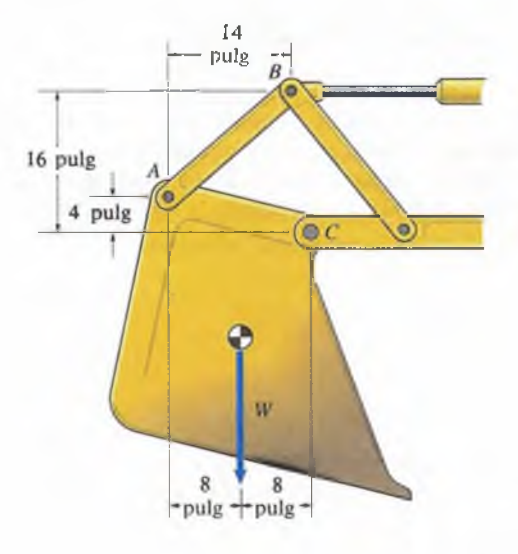
P5.105

5.106 (a) ¿Es la barra en L mostrada un miembro de tres fuerzas? (b) Determine las magnitudes de las reacciones en A y B. (c) ¿Son concurrentes las tres fuerzas que actúan en la barra en L?



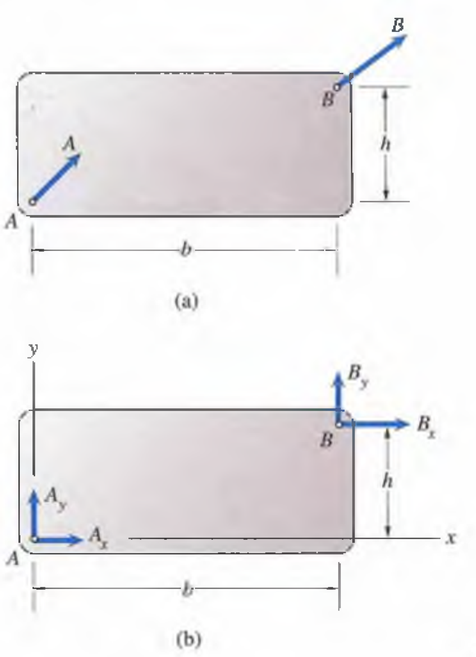
P5.106

5.107 El cangilón de excavadora que se muestra está soportado por el miembro AB de dos fuerzas y el soporte de pasador en C. Su peso es $W = 1500$ lb. ¿Qué valor tienen las reacciones en C?



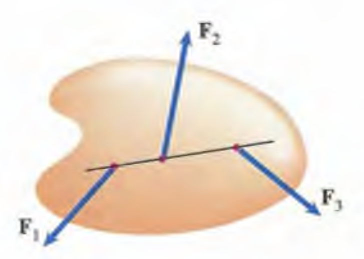
P5.107

5.108 Una placa rectangular está sometida a dos fuerzas, A y B (Fig. a). En la figura (b), las dos fuerzas están separadas en sus componentes. Escribiendo las ecuaciones de equilibrio en función de las componentes A_x, A_y, B_x y B_y, demuestre que las fuerzas A y B son iguales en magnitud y opuestas en dirección, y están dirigidas a lo largo de la línea que pasa por sus puntos de aplicación.



P5.108

5.109 Un cuerpo en equilibrio está sometido a tres fuerzas cuyos puntos de aplicación se encuentran sobre una línea recta. Demuestre que las fuerzas son coplanares.



P5.109

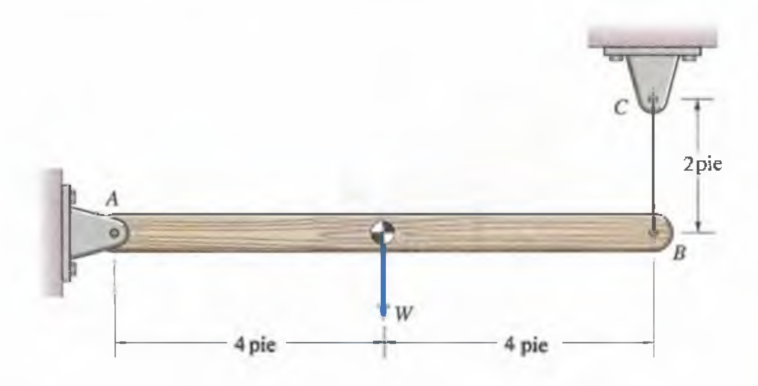
Ejemplos con computador

El siguiente ejemplo y los problemas están diseñados para resolverlos con ayuda de una calculadora o de un computador.

Ejemplo 5.13

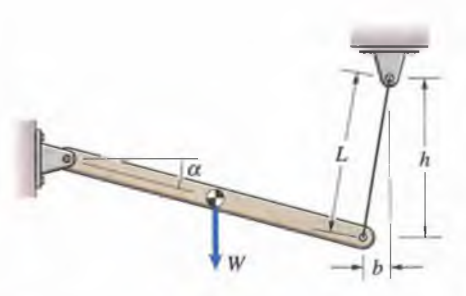
La viga pesa 200 lb y la sujeta un soporte de pasador en A y el alambre BC. Éste se comporta como un resorte lineal con constante de resorte $k = 60$ lb/pie y no está estirado si la viga se encuentra en la posición mostrada. Determine las reacciones en A y la tensión en el alambre cuando la viga está en equilibrio.

Figura 5.41



ESTRATEGIA

Cuando la viga está en equilibrio, la suma de los momentos respecto a A debidos al peso de la viga y a la fuerza ejercida por el alambre es igual a cero. Obtendremos una gráfica de la suma de los momentos como función del ángulo de giro de la viga respecto a la horizontal, para determinar la posición de la viga cuando ésta se halla en equilibrio. Una vez conocida la posición, podemos determinar la tensión en el alambre y las reacciones en A.



(a) Giro de la viga a través de un ángulo α.

SOLUCIÓN

Sea α el ángulo entre la horizontal y la línea central de la viga (Fig. a). Las distancias b y h son

$$b = 8(1 - \cos\alpha),$$

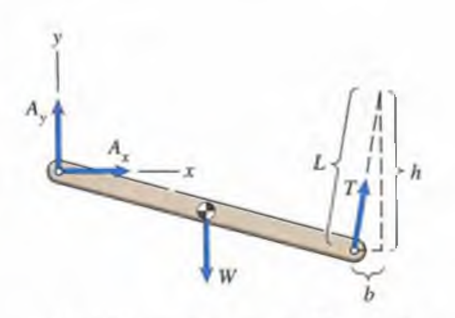
$$h = 2 + 8 \operatorname{sen}\alpha,$$

y la longitud del alambre estirado es

$$L = \sqrt{b^2 + h^2}.$$

La tensión en el alambre es

$$T = k(L - 2).$$



(b) Diagrama de cuerpo libre de la viga.

Dibujamos el diagrama de cuerpo libre de la viga de la figura (b). En función de las componentes de la fuerza ejercida por el alambre,

$$T_x = \frac{b}{L}T, \qquad T_y = \frac{h}{L}T,$$

y la suma de los momentos respecto a A es

$$\Sigma M_A = (8 \text{ sen } \alpha)T_x + (8 \cos \alpha)T_y - (4 \cos \alpha)W.$$

Si escogemos un valor de α, podemos calcular de manera sucesiva esas cantidades. Calculando ΣM_A como función de α, obtenemos la gráfica mostrada en la figura 5.42. De la gráfica estimamos que $\Sigma M_A = 0$ cuando $\alpha = 12°$. Examinando los resultados calculados cerca de 12°,

α	M_A,lb-pie
11.87°	−1.2600
11.88°	−0.5925
11.89°	0.0750
11.90°	0.7424
11.91°	1.4099

estimamos que la viga está en equilibrio cuando $\alpha = 11.89°$. El valor correspondiente de la tensión en el alambre es $T = 99.1$ lb.

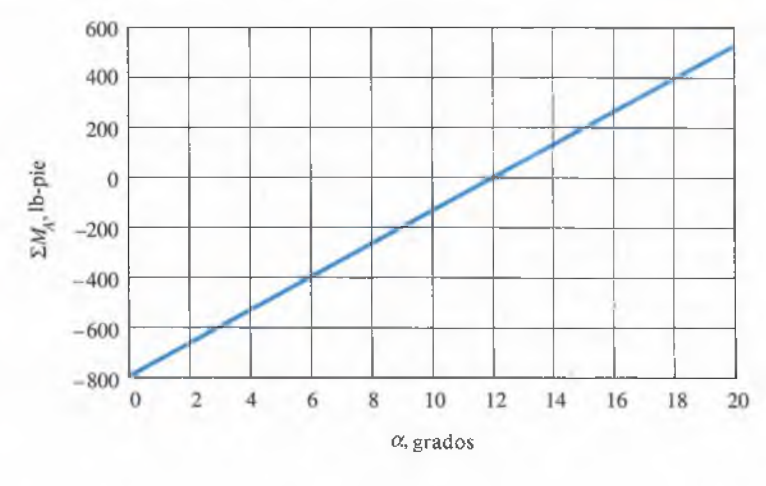


Figura 5.42
Suma de los momentos en función de α.

Para determinar las reacciones en A, planteamos las ecuaciones de equilibrio

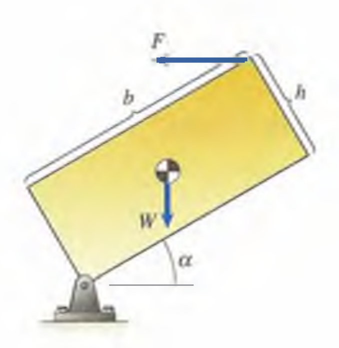
$$\Sigma F_x = A_x + T_x = 0,$$

$$\Sigma F_y = A_y + T_y - W = 0,$$

y obtenemos $A_x = -4.7$ lb y $A_y = 101.0$ lb.

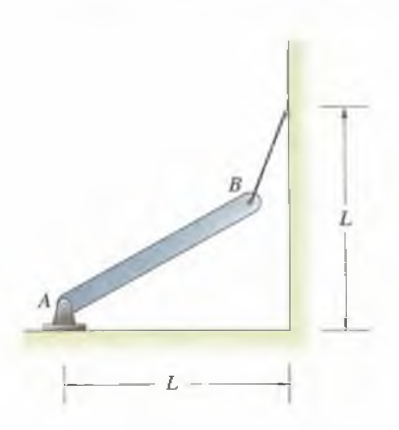
Problemas

5.110 La placa rectangular mostrada se mantiene en equilibrio gracias a la fuerza horizontal F. El peso W actúa en el punto medio de la placa, y $b/h = 4$. Determine el ángulo α bajo el cual la placa está en equilibrio para cinco valores de la razón F/W: 0, 0.5, 1.0, 1.5 y 2. (Suponga que $0 \leq \alpha \leq 90°$.)



P5.110

5.111 La barra AB mostrada tiene una longitud L y un peso W que actúa en su punto medio. La tensión en la cuerda es $T = 1.2\ W$. ¿Cuál es la longitud de la cuerda?



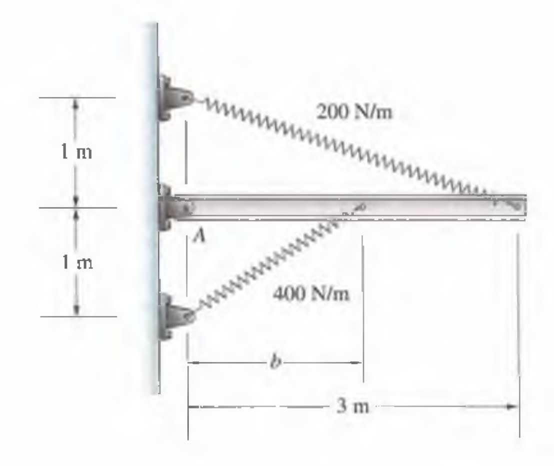
P5.111

5.112 Considere el sistema mostrado en el problema 5.55. Las distancias son $a = 2$ m y $b = 1$ m. El par $M = 1$ kN-m y la fuerza $F = 2$ kN. La constante del resorte es $k = 3$ kN/m. El resorte no está estirado cuando $h = 0$. Determine la distancia h para que la barra horizontal esté en equilibrio, así como las reacciones en A.

5.113 Considere el sistema mostrado en el problema 5.56. La barra tiene 1 m de longitud y su peso $W = 35$ N actúa en su punto medio. La distancia $b = 0.75$ m. La constante del resorte es $k = 100$ N/m, y el resorte no está estirado cuando la barra se halla en posición vertical. Determine el ángulo α y las reacciones en A.

5.114 Considere el sistema mostrado en el problema 5.126. El actuador hidráulico BC ejerce una fuerza en C que apunta a lo largo de la línea de B a C. Considere el punto A como un soporte de pasador. La masa de la carga suspendida es de 4000 kg. Si el actuador BC puede ejercer una fuerza máxima de 80 kN, ¿cuál es el valor mínimo admisible de α?

5.115 La viga está en equilibrio en la posición mostrada. Cada resorte sin estirar tiene una longitud de 1 m. Determine la distancia b y las reacciones en A.



P5.115

Resumen del capítulo

Cuando un cuerpo está en equilibrio, se cumplen las siguientes condiciones:

1. La suma de las fuerzas es cero,

$$\Sigma \mathbf{F} = \mathbf{0}. \qquad \text{Ec. (5.1)}$$

2. La suma de los momentos respecto a cualquier punto es cero,

$$\Sigma \mathbf{M}_{(\text{cualquier punto})} = \mathbf{0}. \qquad \text{Ec. (5.2)}$$

Las fuerzas y los pares ejercidos sobre un cuerpo por sus soportes se llaman **reacciones**. Las otras fuerzas y pares que actúan sobre el cuerpo son las **cargas**. Los soportes comunes se representan por medio de modelos llamados **convenciones de soporte**.

Aplicaciones bidimensionales

Cuando las cargas y las reacciones sobre un cuerpo en equilibrio forman un sistema bidimensional de fuerzas y momentos, quedan relacionadas por tres ecuaciones escalares de equilibrio:

$$\Sigma F_x = 0,$$

$$\Sigma F_y = 0, \qquad \text{Ecs. (5.4)-(5.6)}$$

$$\Sigma M_{(\text{cualquier punto})} = 0.$$

No más de tres ecuaciones independientes de equilibrio se pueden obtener de un diagrama de cuerpo libre bidimensional.

En la tabla 5.1 se resumen las convenciones de soporte que suelen utilizarse en aplicaciones bidimensionales.

Aplicaciones tridimensionales

Las cargas y las reacciones sobre un cuerpo en equilibrio satisfacen las seis ecuaciones escalares de equilibrio

$$\Sigma F_x = 0, \quad \Sigma F_y = 0, \quad \Sigma F_z = 0,$$

$$\Sigma M_x = 0, \quad \Sigma M_y = 0, \quad \Sigma M_z = 0. \qquad \text{Ecs. (5.16)-(5.21)}$$

No más de seis ecuaciones independientes de equilibrio se pueden obtener de un diagrama de cuerpo libre dado.

En la tabla 5.2 se resumen las convenciones de soportes que suelen utilizarse en aplicaciones tridimensionales.

Cuerpos estáticamente indeterminados

Un cuerpo tiene **soportes redundantes** cuando cuenta con más soportes que el número mínimo necesario para mantenerse en equilibrio, y **soportes impropios** cuando sus soportes están impropiamente diseñados para mantener el equilibrio bajo las cargas aplicadas. En ambas situaciones, el cuer-

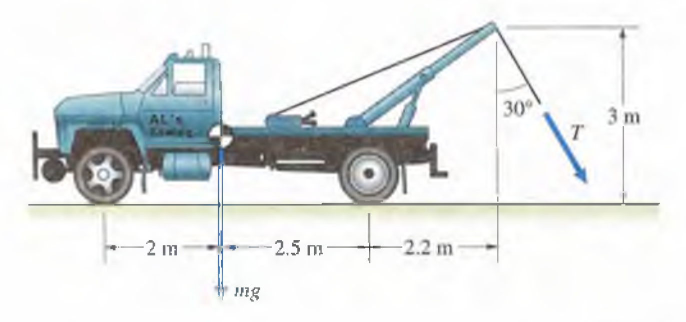
po es **estáticamente indeterminado**. La diferencia entre el número de reacciones y el número de ecuaciones independientes de equilibrio se llama **grado de redundancia**. Aun si un cuerpo es estáticamente indeterminado debido a soportes redundantes, puede ser posible determinar algunas de las reacciones a partir de las ecuaciones de equilibrio.

Miembros de dos y tres fuerzas

Si el sistema de fuerzas y momentos que actúan sobre un cuerpo equivale a dos fuerzas actuando en puntos diferentes, el cuerpo es un **miembro de dos fuerzas**. Si el cuerpo está en equilibrio, las dos fuerzas son iguales en magnitud y opuestas en dirección, y están dirigidas a lo largo de la línea que pasa por sus puntos de aplicación. Si el sistema de fuerzas y momentos que actúa sobre un cuerpo equivale a tres fuerzas actuando en puntos diferentes, se trata de un **miembro de tres fuerzas**. Si el cuerpo se encuentra en equilibrio, las tres fuerzas son coplanares y paralelas o concurrentes.

Problemas de repaso

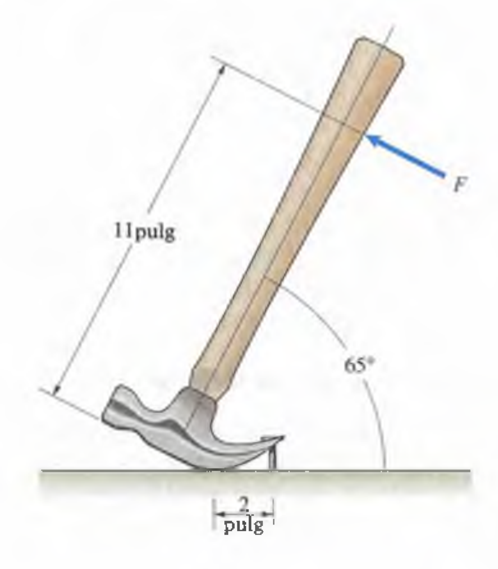
5.116 La masa del camión mostrado es de 4 Mg. Sus ruedas están bloqueadas y la tensión en su cable es $T = 10$ kN.
(a) Dibuje el diagrama de cuerpo libre del camión.
(b) Determine las fuerzas normales ejercidas sobre las ruedas del camión por el terreno.



P5.116

5.117 En el problema 5.116, ¿cuál es el mayor valor de la tensión T sin que se levanten las ruedas frontales?

5.118 En la figura P5.118, suponga que la fuerza ejercida por el martillo sobre la cabeza del clavo es vertical, e ignore su peso.
(a) Dibuje el diagrama de cuerpo libre del martillo.
(b) Si $F = 10$ lb, ¿qué valor tienen la fuerza ejercida por el martillo sobre el clavo y las fuerzas normal y de fricción ejercidas por el martillo sobre el piso?

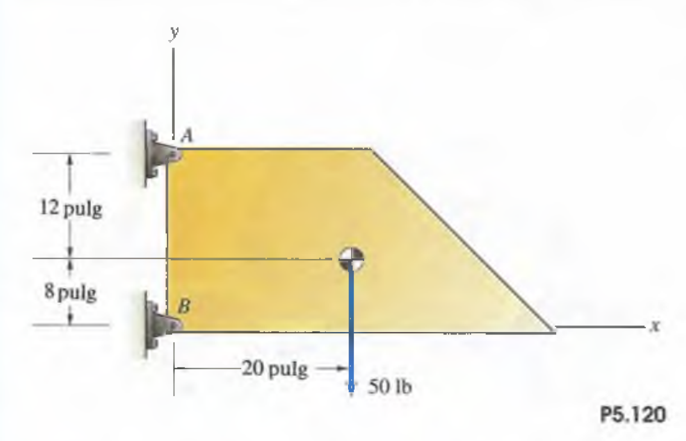


P5.118

5.119 Los paleontólogos especulan que el estegosaurio podía apoyarse sobre sus patas traseras por cortos periodos de tiempo para alimentarse. Con base en el diagrama de cuerpo libre mostrado y suponiendo $m = 2000$ kg, determine las magnitudes de las fuerzas B y C ejercidas por el ligamento del músculo y por la columna vertebral; calcule también el ángulo α.

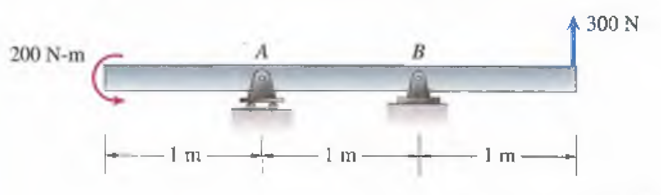
P5.119

5.120 (a) Dibuje el diagrama de cuerpo libre de la placa de 50 lb y explique por qué es estáticamente indeterminada. (b) Determine tantas reacciones en A y B como sea posible.



P5.120

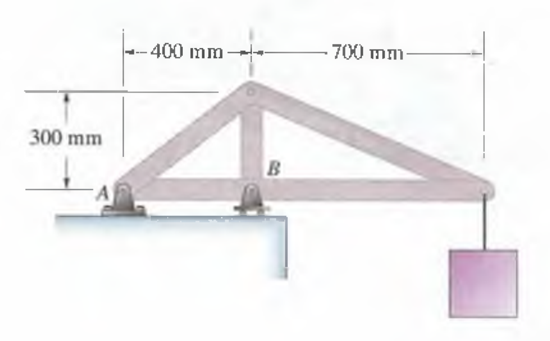
5.121 (a) Dibuje el diagrama de cuerpo libre de la viga. (b) Determine las reacciones en los soportes.



P5.121

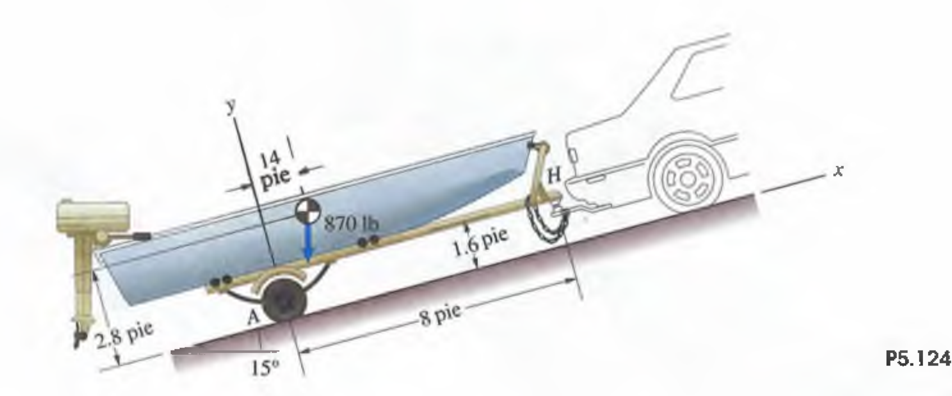
5.122 Considere la viga mostrada en el problema 5.121. Represente las cargas (la fuerza de 300 N y el par de 200 N-m) con una sola fuerza equivalente y determine las reacciones en los soportes.

5.123 La armadura mostrada soporta un cuerpo suspendido de 90 kg. ¿Qué valor tienen las reacciones en los soportes A y B?



P5.123

5.124 El remolque está en una pendiente de 15°. Sus ruedas pueden girar. La conexión en H se comporta como un soporte de pasador. Determine las reacciones en A y H.

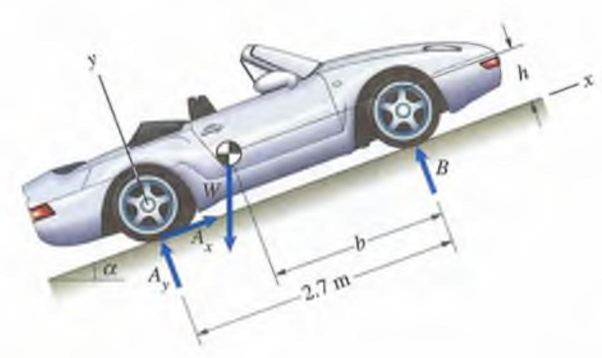


P5.124

5.125 Para determinar la posición del punto en que actúa el peso del automóvil mostrado (el *centro de masa* o *centro de gravedad*) un ingeniero monta el automóvil sobre básculas y mide las reacciones normales en las ruedas para dos valores de α, obteniendo los siguientes resultados:

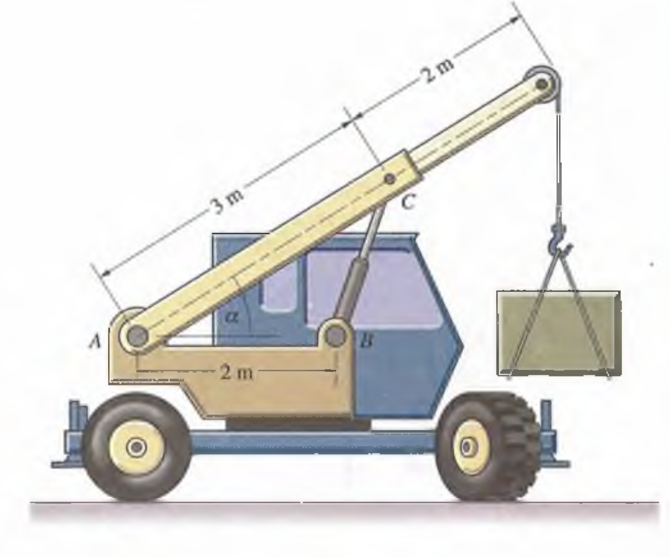
α	A_y, kN	B, kN
10°	10.134	4.357
20°	10.150	3.677

¿Qué valor tienen las distancias b y h?



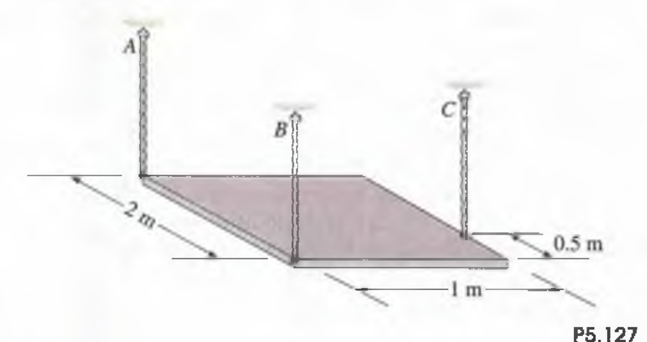
P5.125

5.126 En la figura P5.126, el actuador hidráulico BC ejerce una fuerza en C en la dirección de B a C. Trate el punto A como un soporte de pasador. El ángulo $\alpha = 50°$. La masa de la carga suspendida es de 4000 kg. Determine la fuerza ejercida en C y las reacciones en A.



P5.126

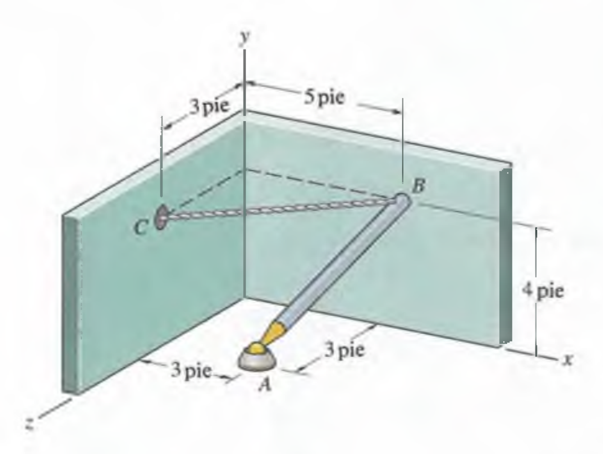
5.127 La placa rectangular horizontal mostrada pesa 800 N y está suspendida de tres cables verticales. El peso de la placa actúa en su punto medio. ¿Qué valor tienen las tensiones en los cables?



P5.127

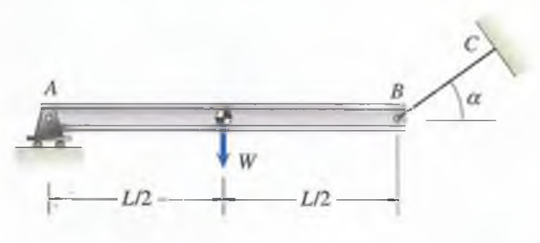
5.128 Considere la placa suspendida de 800 N del problema 5.127. El peso de la placa actúa en su punto medio. Si las reacciones ejercidas sobre la placa por los tres cables se representan con una sola fuerza equivalente, ¿qué valor tiene la fuerza y en qué punto corta su línea de acción la placa?

5.129 La barra de 80 lb está sostenida por un soporte de bola y cuenca en A, por la pared lisa sobre la que se apoya y por el cable BC. El peso de la barra actúa en su punto medio.
(a) Dibuje el diagrama de cuerpo libre de la barra.
(b) Determine la tensión en el cable BC y las reacciones en A.



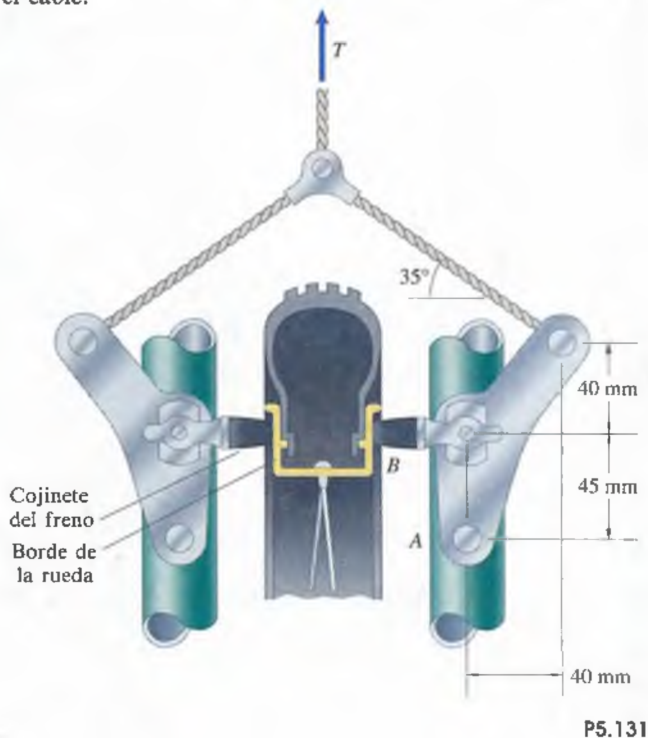
P5.129

5.130 La barra horizontal de peso W está sostenida por un soporte de rodillos en A y por el cable BC. Use el hecho de que la barra es un miembro de tres fuerzas para determinar el ángulo α, la tensión en el cable y la magnitud de la reacción en A.



P5.130

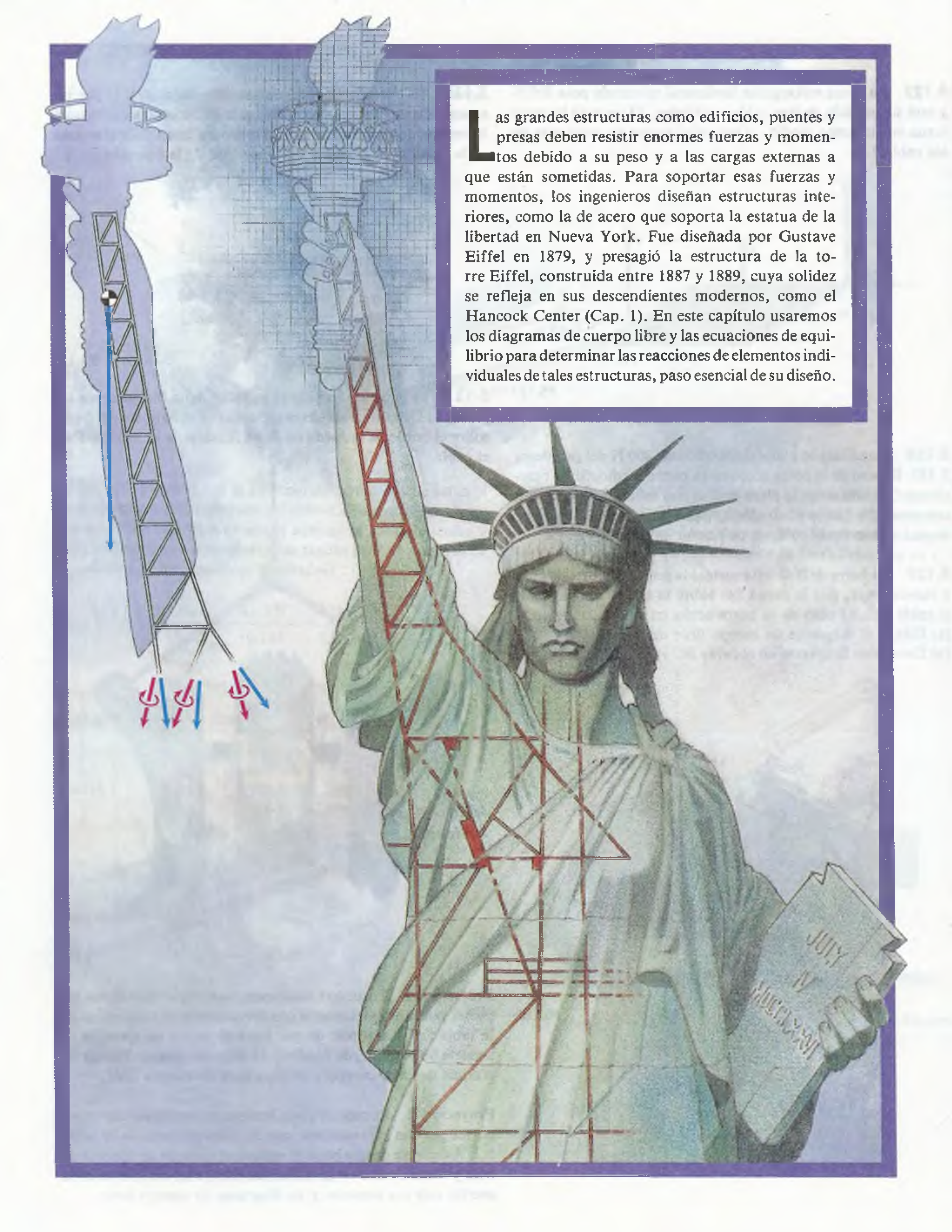
5.131 El freno está unido al bastidor de la bicicleta por un pasador. Determine la fuerza ejercida por el cojinete del freno sobre el borde de la rueda en B, en función de la tensión T en el cable.



P5.131

Proyecto 5.1 Encuentre cinco cuerpos en equilibrio cuyos soportes puedan representarse con las convenciones indicadas de la tabla 5.1. Asegúrese de que haya al menos un ejemplo de soporte de pasador, de rodillo y de empotramiento. Dibuje un croquis de cada cuerpo y su diagrama de cuerpo libre.

Proyecto 5.2 Encuentre cinco cuerpos en equilibrio cuyos soportes puedan representarse con las convenciones de la tabla 5.2. Asegúrese de que haya al menos un ejemplo de soporte de bola y cuenca y uno de articulación. Dibuje un croquis de cada cuerpo con sus soportes y su diagrama de cuerpo libre.

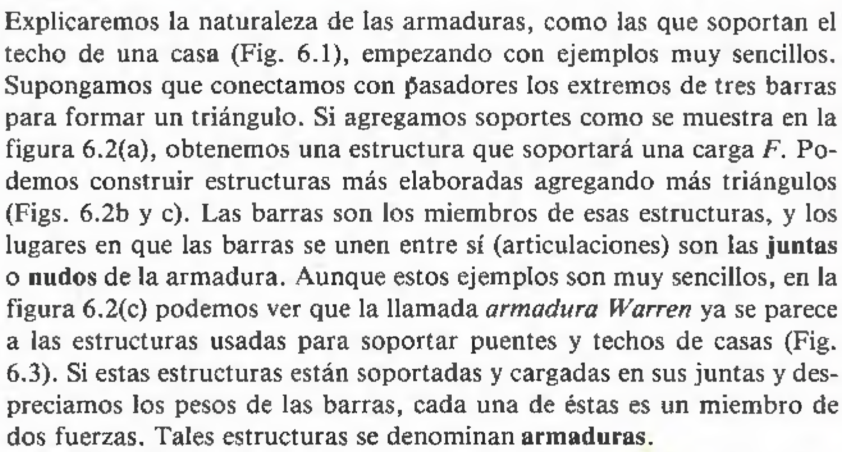


Las grandes estructuras como edificios, puentes y presas deben resistir enormes fuerzas y momentos debido a su peso y a las cargas externas a que están sometidas. Para soportar esas fuerzas y momentos, los ingenieros diseñan estructuras interiores, como la de acero que soporta la estatua de la libertad en Nueva York. Fue diseñada por Gustave Eiffel en 1879, y presagió la estructura de la torre Eiffel, construida entre 1887 y 1889, cuya solidez se refleja en sus descendientes modernos, como el Hancock Center (Cap. 1). En este capítulo usaremos los diagramas de cuerpo libre y las ecuaciones de equilibrio para determinar las reacciones de elementos individuales de tales estructuras, paso esencial de su diseño.

Capítulo 6

Estructuras en equilibrio

EN ingeniería, el término **estructura** se puede referir a cualquier objeto que tiene la capacidad de soportar y ejercer cargas. En este capítulo consideraremos estructuras compuestas de partes interconectadas o **miembros** (o barras, o elementos). Para diseñar tal estructura, o para determinar si una ya construida es adecuada, se deben determinar las fuerzas y los pares que actúan sobre ella en su totalidad así como en sus miembros individuales. Demostraremos primero cómo se hace esto en las estructuras llamadas armaduras, las cuales están compuestas enteramente de miembros de dos fuerzas. Las estructuras de miembros de acero que soportan algunos puentes carreteros son armaduras. Luego consideraremos otras estructuras, llamadas bastidores si son estacionarias y soportan cargas, y máquinas si son diseñadas para tener movimiento y ejercer cargas. Por ejemplo, la estructura de miembros de acero que soporta la Estatua de la Libertad a la entrada del puerto de Nueva York es un bastidor, mientras que un par de tenazas es una máquina. El material que estudiaremos aquí servirá de base para aplicaciones estructurales más avanzadas.



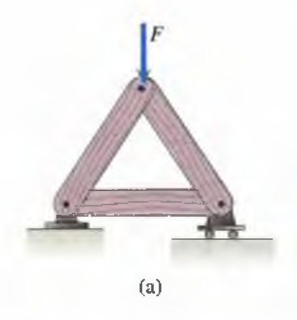
6.1 Armaduras

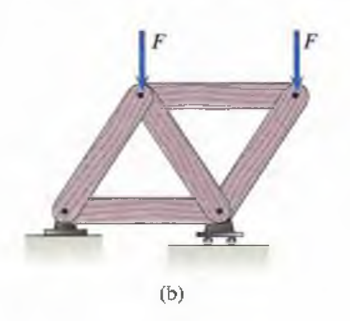


Figura 6.1
Una casa típica está soportada por armaduras de madera.

Explicaremos la naturaleza de las armaduras, como las que soportan el techo de una casa (Fig. 6.1), empezando con ejemplos muy sencillos. Supongamos que conectamos con pasadores los extremos de tres barras para formar un triángulo. Si agregamos soportes como se muestra en la figura 6.2(a), obtenemos una estructura que soportará una carga F. Podemos construir estructuras más elaboradas agregando más triángulos (Figs. 6.2b y c). Las barras son los miembros de esas estructuras, y los lugares en que las barras se unen entre sí (articulaciones) son las **juntas** o **nudos** de la armadura. Aunque estos ejemplos son muy sencillos, en la figura 6.2(c) podemos ver que la llamada *armadura Warren* ya se parece a las estructuras usadas para soportar puentes y techos de casas (Fig. 6.3). Si estas estructuras están soportadas y cargadas en sus juntas y despreciamos los pesos de las barras, cada una de éstas es un miembro de dos fuerzas. Tales estructuras se denominan **armaduras**.

En la figura 6.4(a) dibujamos el diagrama de cuerpo libre de una barra de armadura. Como es un miembro de dos fuerzas, las fuerzas en los extremos, que son las sumas de las fuerzas ejercidas sobre la barra en sus juntas, deben ser iguales en magnitud, opuestas en dirección y dirigidas





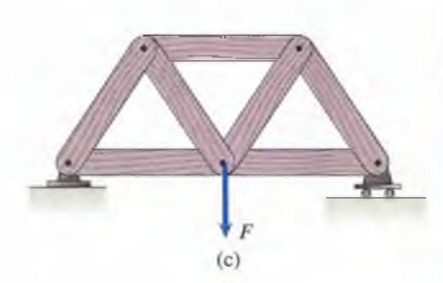
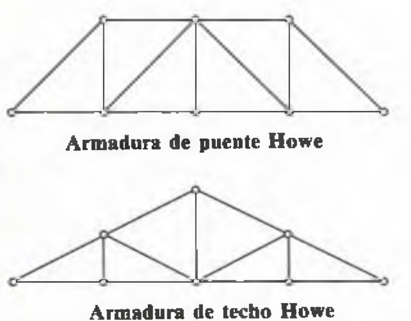


Figura 6.2
Estructura con barras articuladas formando triángulos.





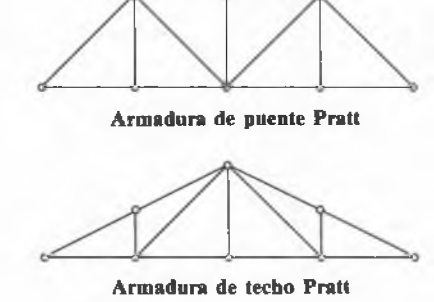


Figura 6.3
Ejemplos sencillos de estructuras de puentes y techos. (Las líneas representan barras y los círculos representan juntas.)

a lo largo de la línea entre las juntas. Llamamos T a la **fuerza axial** en la barra. Cuando T es positiva en la dirección mostrada (es decir, cuando las fuerzas se alejan una de otra), la barra está trabajando a **tensión.** Cuando las fuerzas se acercan entre sí, la barra está a **compresión.**

En la figura 6.4(b) "cortamos" la barra con un plano y dibujamos el diagrama de cuerpo libre de la parte situada a un lado del plano. El sistema de fuerzas y momentos internos ejercidos por la parte no incluida en el diagrama se representa con una fuerza **F** que actúa en el punto P donde el plano corta al eje de la barra, y un par **M**. La suma de los momentos respecto a P debe ser cero, de modo que $\mathbf{M} = \mathbf{0}$. Así, tenemos un miembro de dos fuerzas, lo cual significa que **F** debe ser igual en magnitud y opuesta en dirección a la fuerza T que actúa en la junta (Fig. 6.4c). La fuerza interna es una tensión o compresión igual a la ejercida en la junta. Observe el parecido con un cable, en el cual la fuerza interna es una tensión igual a la tensión aplicada en sus extremos.

Muchas estructuras reales, incluidas las "armaduras de techo" y las "armaduras de puente", consisten en barras conectadas en los extremos, pero muy pocas de ellas tienen juntas articuladas con pasadores. Por ejemplo, si se observa la junta de una armadura de puente, se verá que las barras están atornilladas o remachadas, por lo que no pueden girar con libertad en la junta (Fig. 6.5). Es claro que tal junta puede ejercer pares sobre las barras. ¿Por qué se llaman armaduras tales estructuras?

La razón es que están diseñadas para funcionar como armaduras: soportan cargas sometiendo sus miembros a cargas axiales. Por lo general se pueden representar como armaduras, o sea que sus juntas se representan como juntas articuladas bajo el supuesto de que los pares ejercidos por las juntas sobre las barras son pequeños en comparación con las fuerzas axiales. Cuando llamamos armaduras a tales estructuras, queremos decir que se pueden representar como armaduras.

En las siguientes secciones describimos dos métodos para determinar las fuerzas axiales en las barras de armaduras. El método de las juntas es el preferido cuando se requiere determinar las fuerzas axiales en todas las barras de una armadura. Cuando sólo se requiere determinar las fuerzas axiales en unas pocas barras, a menudo el método de las secciones conduce a soluciones más rápidas que el método de las juntas.

T
T
(a)
T
F
P
M
T
T
(b)
T
T
(c)

Figura 6.4
(a) Cada barra de una armadura es un miembro de dos fuerzas.
(b) Obtención del diagrama de cuerpo libre de una parte de la barra.
(c) La fuerza interna es igual y opuesta a la fuerza que actúa en la junta; el par interno es igual a cero.

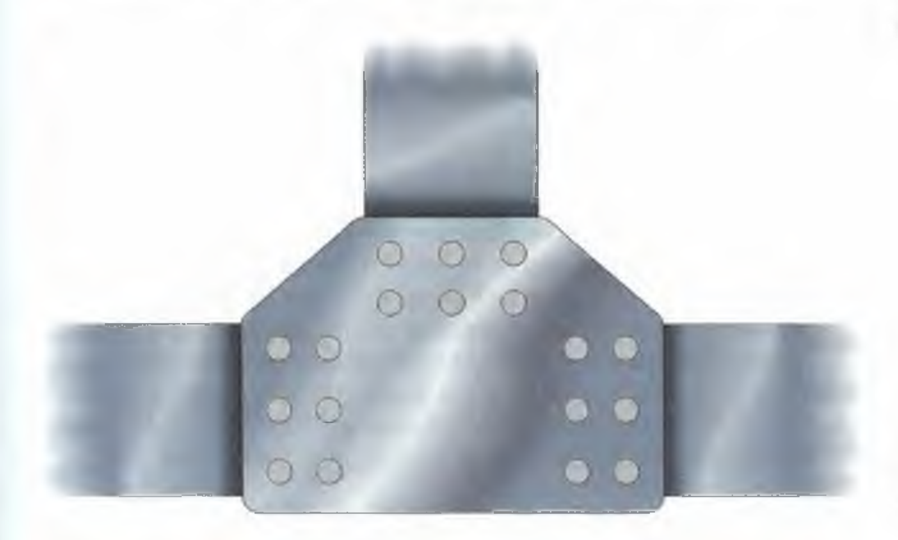


Figura 6.5
Junta de la armadura de un puente.

6.2 Método de las juntas o nudos

El método de las juntas implica dibujar diagramas de cuerpo libre de las juntas de una armadura, una por una, y usar las ecuaciones de equilibrio para determinar las fuerzas axiales en las barras. Por lo general, antes debemos dibujar un diagrama de toda la armadura (es decir, tratar la armadura como un solo cuerpo) y calcular las reacciones en sus soportes. Por ejemplo, la armadura Warren de la figura 6.6(a) tiene barras de 2 m de longitud y soporta cargas en B y D. En la figura 6.6(b) dibujamos su diagrama de cuerpo libre. De las ecuaciones de equilibrio,

$$\Sigma F_x = A_x = 0,$$

$$\Sigma F_y = A_y + E - 400 - 800 = 0,$$

$$\Sigma M_{(\text{punto } A)} = -(1)(400) - (3)(800) + (4)E = 0,$$

obtenemos las reacciones $A_x = 0$, $A_y = 500$ N y $E = 700$ N.

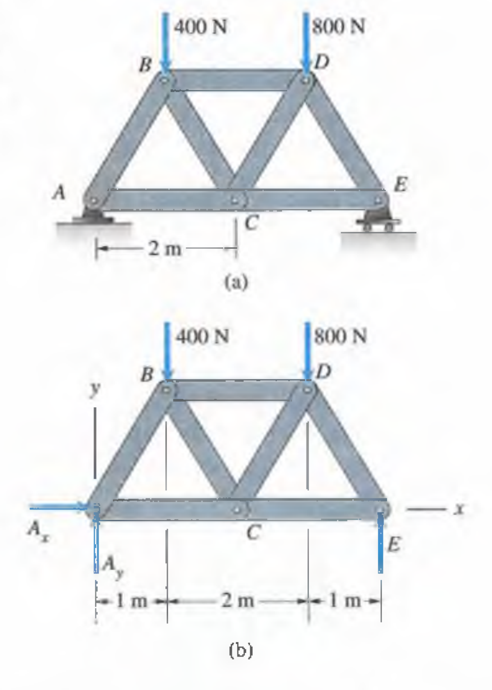


Figura 6.6
(a) Armadura Warren soportando dos cargas.
(b) Diagrama de cuerpo libre de la armadura.

El siguiente paso es elegir una junta y dibujar su diagrama de cuerpo libre. En la figura 6.7(a) aislamos la junta A cortando las barras AB y AC. Los términos T_{AB} y T_{AC} son las fuerzas axiales en las barras AB y AC respectivamente. Aunque las direcciones de las flechas que representan las fuerzas axiales desconocidas se pueden escoger arbitrariamente, observe que las hemos elegido de manera que una barra estará a tensión si obtenemos un valor positivo para la fuerza axial. Pensamos que escoger consistentemente las direcciones de esta manera ayudará a evitar errores.

Las ecuaciones de equilibrio para la junta A son

$$\Sigma F_x = T_{AC} + T_{AB} \cos 60° = 0,$$

$$\Sigma F_y = T_{AB} \operatorname{sen} 60° + 500 = 0,$$

Resolviendo estas ecuaciones obtenemos las fuerzas axiales $T_{AB} = -577$ N y $T_{AC} = 289$ N. La barra AB está a compresión y la barra AC a tensión (Fig. 6.7b).

Para la junta de la figura 6.7(a) usamos una figura real a fin de visualizar mejor el diagrama de cuerpo libre, aunque es posible usar una figura sencilla con sólo las fuerzas que actúan sobre la junta (Fig. 6.7c).

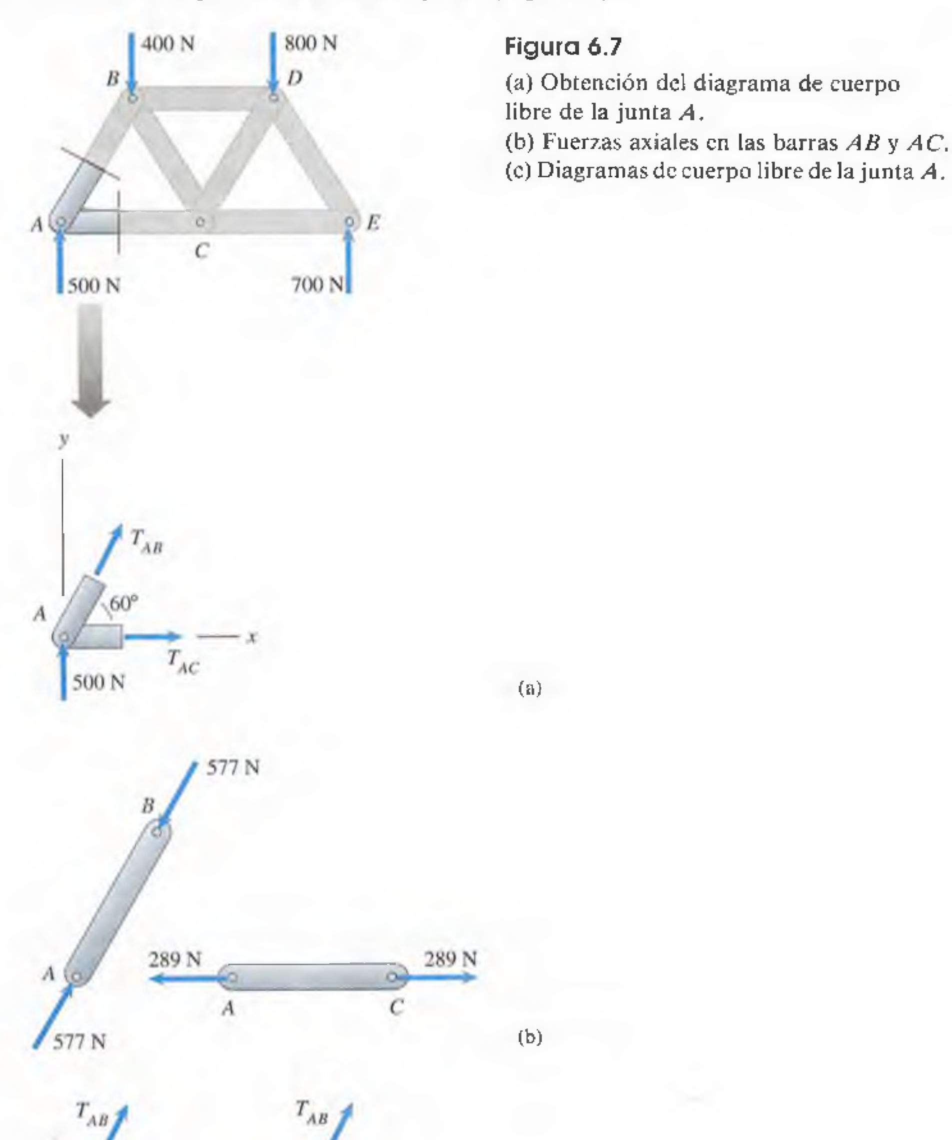


Figura 6.7

(a) Obtención del diagrama de cuerpo libre de la junta A.
(b) Fuerzas axiales en las barras AB y AC.
(c) Diagramas de cuerpo libre de la junta A.

Luego obtenemos un diagrama de la junta *B* cortando las barras *AB*, *BC* y *BD* (Fig. 6.8a). De las ecuaciones de equilibrio para la junta *B*,

$$\Sigma F_x = T_{BD} + T_{BC} \cos 60° + 577 \cos 60° = 0,$$

$$\Sigma F_y = -400 + 577 \text{ sen } 60° - T_{BC} \text{ sen } 60° = 0,$$

obtenemos $T_{BC} = 115$ N y $T_{BD} = -346$ N. La barra *BC* está a tensión y la barra *BD* a compresión (Fig. 6.8b). Si seguimos dibujando diagramas de cuerpo libre de las juntas, podemos determinar las fuerzas axiales en cada una de las barras.

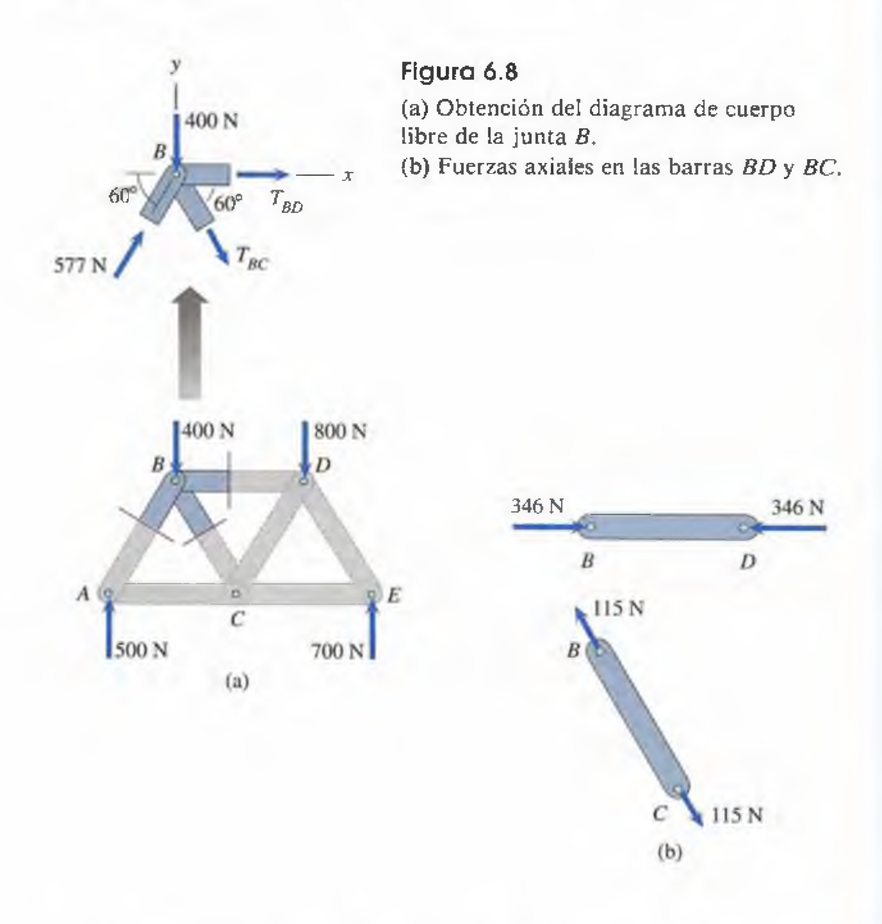


Figura 6.8
(a) Obtención del diagrama de cuerpo libre de la junta *B*.
(b) Fuerzas axiales en las barras *BD* y *BC*.

En dos dimensiones sólo se puede obtener dos ecuaciones de equilibrio independientes de los diagramas de cuerpo libre de una junta. Al sumar los momentos respecto a un punto no se obtiene una ecuación más porque las fuerzas son concurrentes. Por tanto, al aplicar el método de las juntas se debe escoger juntas sometidas a fuerzas conocidas y con no más de dos fuerzas desconocidas. En nuestro ejemplo analizamos primero la junta *A* porque está sometida a la reacción conocida, ejercida por el apoyo, y a dos fuerzas desconocidas, T_{AB} y T_{AC} (Fig. 6.7a). Pudimos luego analizar la junta *B* porque está sometida a dos fuerzas conocidas y a dos desconocidas, T_{BC} y T_{BD} (Fig. 6.8a). Si hubiésemos intentado analizar primero la junta *B*, habríamos tenido tres fuerzas desconocidas.

Al determinar las fuerzas axiales en las barras de una armadura, el trabajo se simplifica si se está familiarizado con tres tipos de juntas.

- **Juntas de armaduras con dos barras colineales y sin carga** (Fig. 6.9). La suma de las fuerzas debe ser cero, $T_1 = T_2$. *Las fuerzas axiales son iguales.*
- **Juntas de armaduras con dos barras no colineales y sin carga** (Fig. 6.10). Como la suma de las fuerzas en x debe ser cero, $T_2 = 0$. Por tanto, T_1 también debe ser cero. *Las fuerzas axiales son cero.*
- **Juntas de armaduras con tres barras, dos de ellas colineales, y sin carga** (Fig. 6.11). Como la suma de las fuerzas en la dirección x debe ser cero, $T_3 = 0$. La suma en la dirección y debe ser cero, por lo que $T_1 = T_2$. *Las fuerzas axiales en las barras colineales son iguales y la fuerza axial en la tercera barra es cero.*

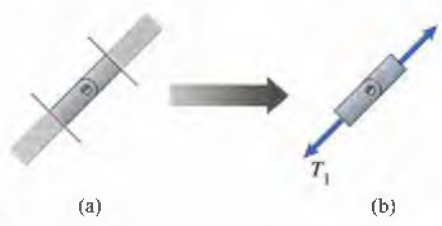


Figura 6.9
(a) Junta con dos barras colineales y sin carga.
(b) Diagramas de cuerpo libre de la junta.



Figura 6.10
(a) Junta con dos barras no colineales y sin carga.
(b) Diagrama de cuerpo libre de la junta.

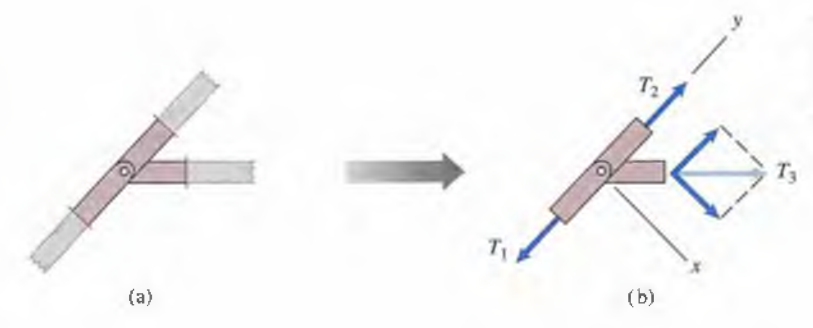


Figura 6.11
(a) Junta con tres barras, dos de las cuales son colineales y sin carga.
(b) Diagrama de cuerpo libre de la junta.

En seguida usaremos el método de las juntas para determinar las fuerzas axiales en las barras de una armadura. Esto implica tres pasos:

1. Determinar las reacciones en los soportes. *Por lo general se requiere dibujar el diagrama de cuerpo libre de toda la armadura y determinar las reacciones en sus soportes.*
2. Identificar juntas especiales. *Examine la armadura para ver si tiene alguno de los tipos de juntas analizadas en la lista anterior. Aunque no es esencial, este paso puede simplificar la solución.*
3. Analizar las juntas. *Dibuje diagramas de cuerpo libre de las juntas y aplique las ecuaciones de equilibrio para determinar las fuerzas axiales en las barras. Escoja juntas que contengan no más de dos fuerzas desconocidas.*

Ejemplo 6.1

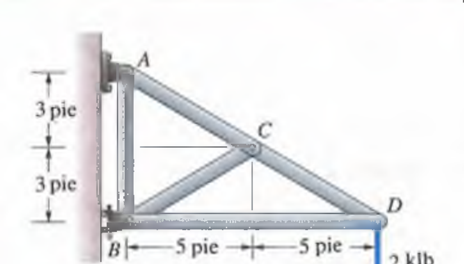


Figura 6.12

Determine las fuerzas axiales en las barras de la armadura de la figura 6.12.

SOLUCIÓN

Determinar reacciones en soportes Dibujamos el diagrama de cuerpo libre de toda la armadura (Fig. a). De las ecuaciones de equilibrio

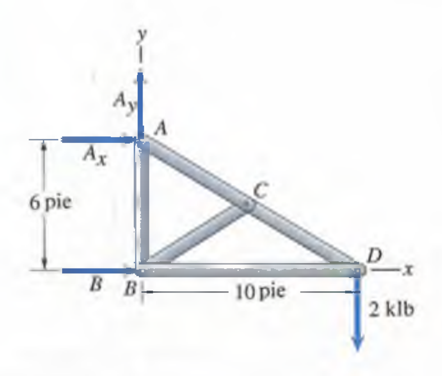
$$\Sigma F_x = A_x + B = 0,$$

$$\Sigma F_y = A_y - 2 = 0,$$

$$\Sigma M_{(\text{punto } B)} = -(6)A_x - (10)(2) = 0,$$

obtenemos las reacciones $A_x = -3.33$ klb, $A_y = 2$ klb y $B = 3.33$ klb.

Identificar juntas especiales Como la junta C tiene tres barras, dos de ellas colineales, y no tiene carga, la fuerza axial en BC es igual a cero, $T_{BC} = 0$, y las fuerzas axiales en las barras colineales son iguales, $T_{AC} = T_{CD}$.



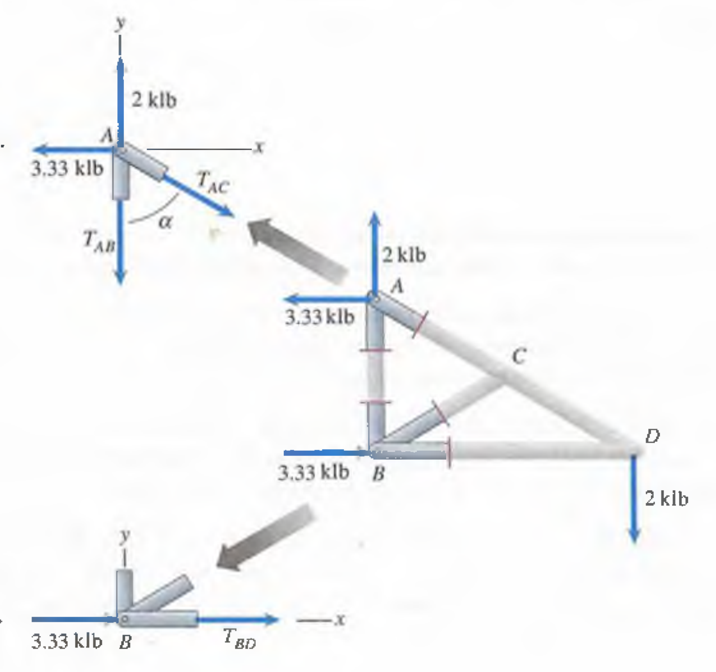
(a) Diagrama de cuerpo libre de toda la armadura.

Dibujar diagramas de las juntas Conocemos la reacción ejercida sobre la junta A por el soporte, y A está sometida a la acción de sólo dos fuerzas desconocidas: las fuerzas axiales en AB y AC. En (b) dibujamos su diagrama de cuerpo libre. El ángulo $\alpha = \arctan(5/3) = 59.0°$. Las ecuaciones de equilibrio para A son

$$\Sigma F_x = T_{AC} \operatorname{sen} \alpha - 3.33 = 0,$$

$$\Sigma F_y = 2 - T_{AB} - T_{AC} \cos \alpha = 0.$$

Al resolver estas ecuaciones obtenemos $T_{AB} = 0$ y $T_{AC} = 3.89$ klb. Como las fuerzas axiales en las barras AC y CD son iguales, $T_{CD} = 3.89$ klb.



(b) Diagrama de cuerpo libre de la junta A.

(c) Diagrama de cuerpo libre de la junta B.

Dibujamos ahora el diagrama de cuerpo libre de la junta B de la figura (c). (Ya sabemos que las fuerzas axiales en las barras AB y BC son nulas.) De la ecuación de equilibrio

$$\Sigma F_x = T_{BD} + 3.33 = 0,$$

obtenemos $T_{BD} = -3.33$ klb. El signo negativo indica que la barra BD está a compresión.

Las fuerzas axiales en las barras son

AB: cero,
AC: 3.89 klb (T),
BC: cero,
BD: 3.33 klb (C),
CD: 3.89 klb (T).

Ejemplo 6.2

Cada barra de la armadura de la figura 6.13 puede soportar con seguridad una fuerza de tensión de 10 klb y una fuerza de compresión de 2 klb. ¿Cuál es la máxima carga F dirigida hacia abajo que la armadura puede soportar con seguridad?

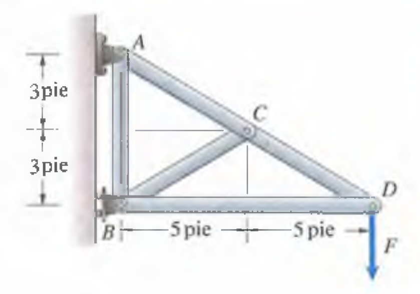


Figura 6.13

ESTRATEGIA

La armadura es idéntica a la analizada en el ejemplo 6.1. Aplicando de la misma manera el método de las juntas, las fuerzas axiales en las barras se pueden determinar en función de la carga F. El valor mínimo de F que genere una fuerza de tensión de 10 klb o una fuerza de compresión de 2 klb en cualquier barra es el valor máximo de F que la armadura puede soportar.

SOLUCIÓN

Utilizando el método de las juntas de la misma manera que en el ejemplo 6.1, obtenemos las fuerzas axiales

AB: cero,
AC: 1.94 F(T),
BC: cero,
BD: 1.67 F(C),
CD: 1.94 F(T).

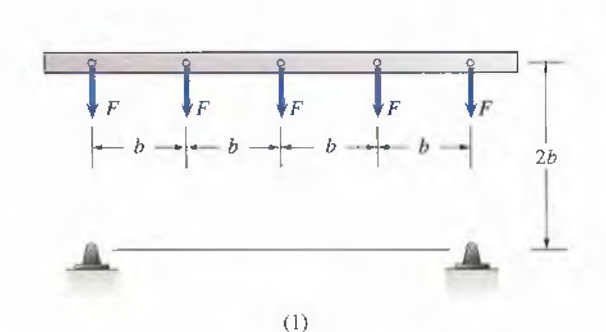
Para una carga F dada, la fuerza máxima de tensión es de 1.94 F (en las barras AC y CD) y la máxima fuerza de compresión es de 1.67 F (en la barra BD). La fuerza máxima de tensión dentro de la seguridad se presentaría cuando 1.94 F = 10 klb, o cuando F = 5.14 klb. La fuerza máxima de compresión dentro de la seguridad se presentaría cuando 1.67 F = 2 klb, o sea cuando F = 1.20 klb. Por tanto, la carga F máxima que la armadura puede soportar con seguridad es de 1.20 klb.

Ejemplo 6.3

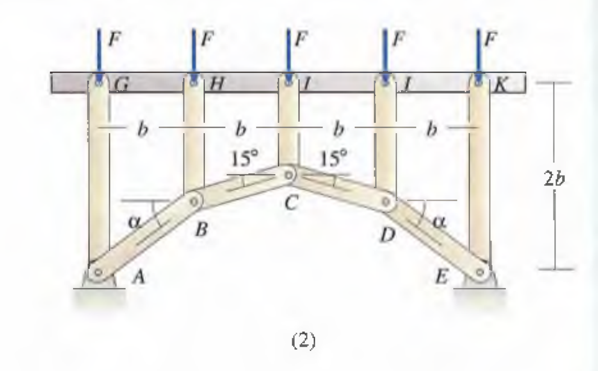
Aplicación a la ingeniería

Diseño de un puente

En la figura 6.14(1) se muestran las cargas que la estructura de un puente debe soportar, así como los soportes de pasador en los cuales se va a apoyar. El encargado del prediseño propone la estructura mostrada en la figura 6.14(2). ¿Qué valor tienen las fuerzas axiales en las barras?



(1)



(2)

Figura 6.14

SOLUCIÓN

Las barras verticales AG, BH, CI, DJ y EK están sometidas a fuerzas a compresión de magnitud F. En la figura (a) dibujamos el diagrama de cuerpo libre de la junta B. De las ecuaciones de equilibrio

$$\Sigma F_x = -T_{AB} \cos \alpha + T_{BC} \cos 15^\circ = 0,$$

$$\Sigma F_y = -T_{AB} \operatorname{sen} \alpha + T_{BC} \operatorname{sen} 15^\circ - F = 0,$$

obtenemos $T_{AB} = -2.39\,F$ y $\alpha = 38.8^\circ$. Por simetría, $T_{DE} = T_{AB}$. Las fuerzas axiales en las barras se indican en la tabla 6.1.

(a) Diagrama de cuerpo libre de la junta A.

Tabla 6.1 Fuerzas axiales en las barras de la estructura del puente

Barras	Fuerza axial	
AG,BH,CI,DJ,EK	F	(C)
AB,DE	$2.39F$	(C)
BC,CD	$1.93F$	(C)

CONSIDERACIONES DE DISEÑO

Los puentes fueron una aplicación temprana de la ingeniería. Una necesidad práctica, el cruce de un río, tuvo una solución tecnológica. Aunque inicialmente la solución fue tan primitiva como colocar un tronco de árbol entre las orillas, en el pasado remoto los ingenieros llegaron a construir puentes sorprendentemente complejos. Los arqueólogos han identificado las cimentaciones de las siete pilas de un puente de 120 m (400 pies) de largo sobre el río Eufrates que existió en la Babilonia de Nabucodonosor II (605-562 A.C.)

La función de un puente es conceptualmente sencilla. Personas y vehículos deben ser soportados en forma continua al pasar por él. La dificultad es que una viga simple que se extienda entre las orillas fallará si la distancia entre éstas, o el *claro*, es muy grande. Para satisfacer la necesidad de puentes más resistentes y con claros más largos, los ingenieros civiles crearon en la antigüedad diseños ingeniosos y estéticos, y continúan haciéndolo así actualmente.

La estructura propuesta en el ejemplo 6.3, el *arco*, es un viejo diseño. Observe en la tabla 6.1 que todas las barras de la estructura están trabajando a compresión. Como la mampostería (piedra, ladrillo u hormigón) es débil a tensión pero muy fuerte a compresión, muchos puentes hechos con esos materiales se diseñaron a base de arcos. Por lo mismo, los puentes modernos de concreto se diseñan con claros salvados por arcos (Fig. 6.15).



Figura 6.15
Este puente, en la autopista 1 de California, está soportado por un arco de acero y hormigón anclado en un risco.

A diferencia de la mampostería, la madera y el acero pueden soportar grandes fuerzas tanto a compresión como a tensión. Desde las armaduras de madera diseñadas por el arquitecto Andrea Palladio (1518-1580), se han usado en muy diversas armaduras como soportes para puentes. En la figura 6.14(1) las fuerzas pueden ser soportadas por la armadura Pratt de la figura 6.16. Sus barras están sometidas a tensión y a compresión (Tabla 6.2). El puente Forth (Fig. 6.17) tiene una armadura como estructura de soporte.

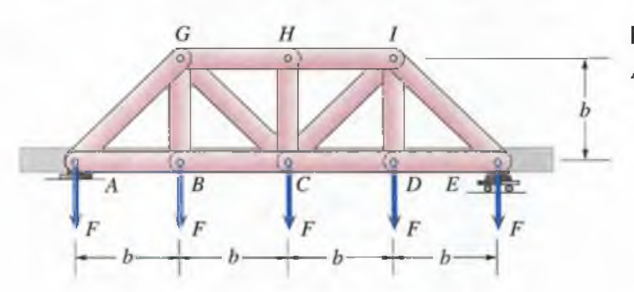


Figura 6.16
Armadura Pratt soportando un puente.

Tabla 6.2 Fuerzas axiales en las barras de la armadura Pratt

Barras	Fuerza axial
AB,BC,CD,DE	$1.5F$ (T)
AG,EI	$2.12F$ (C)
CG,CI	$0.71F$ (T)
GH,HI	$2F$ (C)
BG,DI	F (T)
CH	0

Figura 6.17
El puente Forth (Escocia, 1890) es un ejemplo de un puente con armadura de gran tamaño. Cada claro principal mide 520 m de longitud.



Tabla 6.3 Fuerzas axiales en las barras de la estructura suspendida

Barras	Fuerza axial	
BH,CI,DJ	*F*	(T)
AB,DE	2.39*F*	(T)
BC,CD	1.93*F*	(T)

Las armaduras son muy pesadas para usarse como soporte de puentes muy grandes. (El Forth contiene 58 000 ton de acero.) Aprovechando la capacidad que tienen los cables relativamente ligeros de resistir grandes fuerzas de tensión, los ingenieros usan estructuras *suspendidas* para salvar grandes claros. El sistema de cinco fuerzas de nuestro ejemplo puede ser soportado por una simple estructura suspendida (Fig. 6.18). De hecho, el arco a compresión usado ya en el pasado se ha invertido. (Compare las figuras 6.14(1) y 6.18.) Las cargas están "suspendidas" de las barras *AB*, *BC*, *CD* y *DE*. Cada elemento de esta estructura, excepto las *torres AG* y *EK*, trabaja a tensión (Tabla 6.3). Los puentes más grandes, como el Golden Gate (Fig. 6.19), consisten en claros suspendidos de cables soportados por torres.

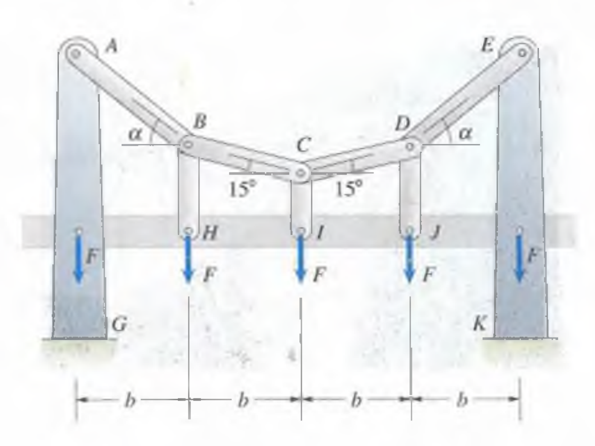


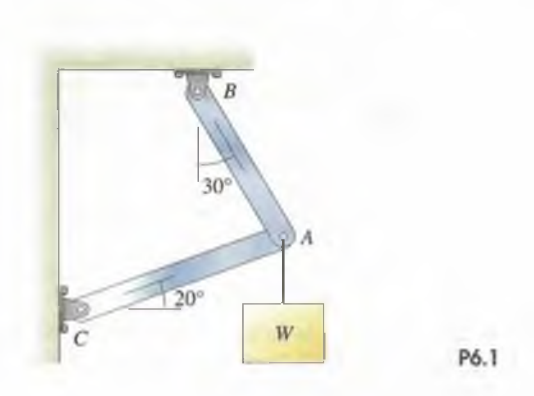
Figura 6.18
Una estructura colgante soporta un puente.



Figura 6.19
El puente Golden Gate (California) tiene un claro central colgante de 1280 m (4200 pies) de longitud.

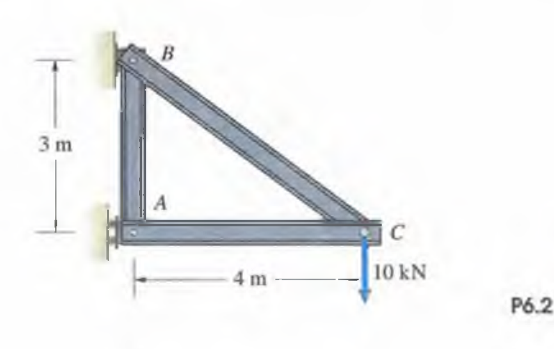
Problemas

6.1 Se tiene el peso $W = 600$ lb.
(a) Dibuje el diagrama de cuerpo libre de la junta A.
(b) Use el diagrama de cuerpo libre obtenido en la parte (a) para determinar las fuerzas axiales en las barras AB y AC. Indique si se encuentran a tensión (T) o a compresión (C).



P6.1

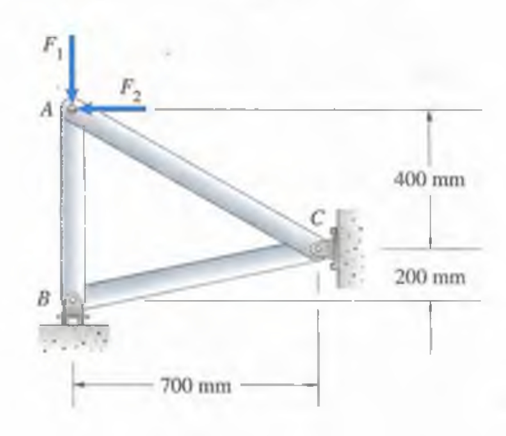
6.2 La armadura mostrada soporta una carga de 10 kN en C.
(a) Dibuje el diagrama de cuerpo libre de toda la armadura y determine las reacciones en sus soportes.
(b) Determine las fuerzas axiales en las barras. Indique si se encuentran a tensión (T) o a compresión (C).



P6.2

6.3 Considere la armadura del problema 6.2. Un ingeniero determina que las barras resistirán con seguridad fuerzas axiales de 30 kN ya sea a tensión o a compresión. ¿Cuál es la máxima carga vertical que la armadura resistirá con seguridad en C?

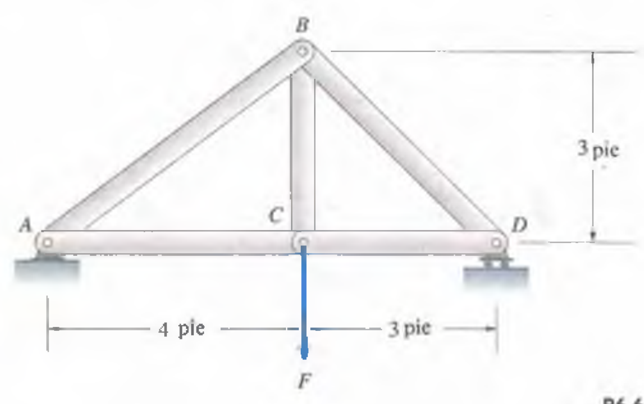
6.4 Se tienen las cargas $F_1 = 60$ N y $F_2 = 40$ N.
(a) Dibuje el diagrama de cuerpo libre de toda la armadura mostrada y determine las reacciones en sus soportes.
(b) Determine las fuerzas axiales en las barras. Indique si se encuentran a tensión (T) o a compresión (C).



P6.4

6.5 Considere la armadura del problema 6.4. Las cargas son: $F_1 = 440$ N y $F_2 = 160$ N. Determine las fuerzas axiales en las barras. Indique si se encuentran a tensión (T) o a compresión (C).

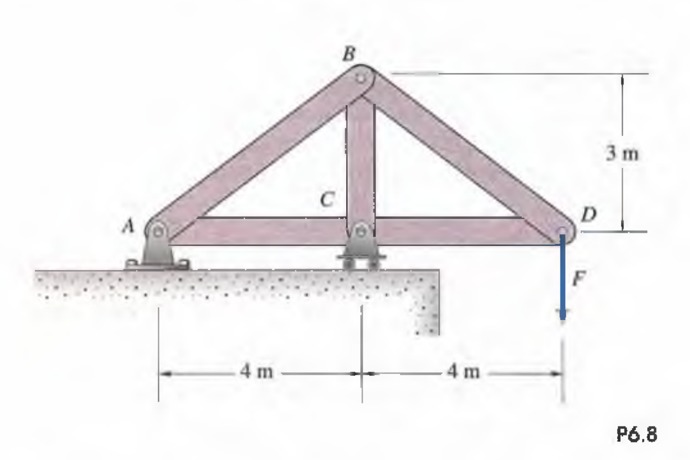
6.6 Se tiene la carga $F = 600$ lb. Determine las fuerzas axiales en las barras mostradas.



P6.6

6.7 Considere la armadura del problema 6.6. Cada barra soporta con seguridad una fuerza a tensión de 2000 lb y una fuerza a compresión de 1000 lb. Con base en este criterio, determine la carga máxima vertical F que se puede aplicar con seguridad en C.

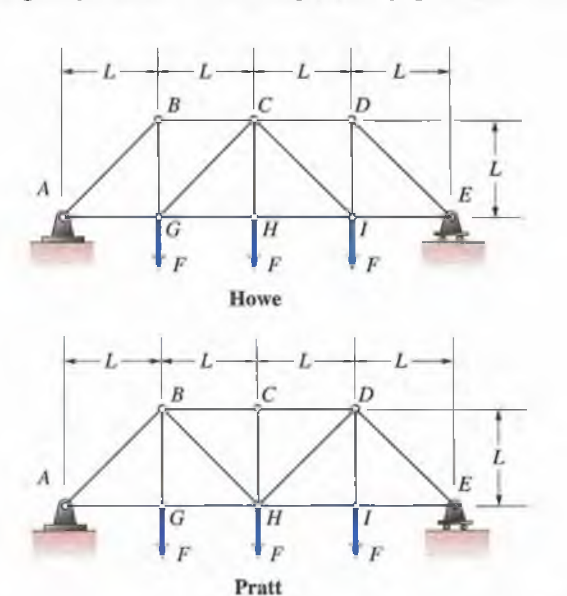
6.8 Se tiene la carga $F = 10$ kN. Determine las fuerzas axiales en las barras mostradas.



P6.8

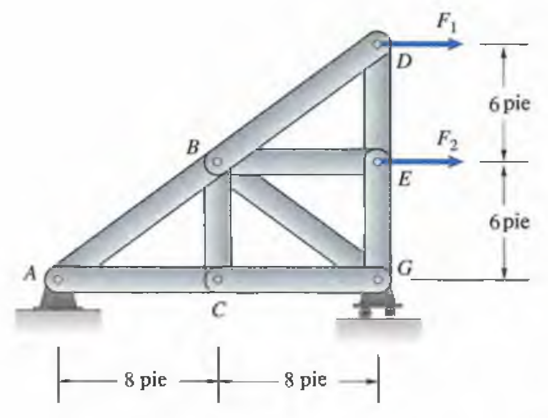
6.9 Considere la armadura del problema 6.8. Cada barra resiste con seguridad una fuerza a tensión de 150 kN y una fuerza a compresión de 30 kN. ¿Qué valor tiene la carga máxima vertical F que la armadura puede soportar con seguridad en D?

6.10 Las armaduras de puente Howe y Pratt están sometidas a cargas idénticas.
(a) ¿En qué armadura se presenta la mayor fuerza a tensión? ¿En qué barra o barras se presenta y qué valor tiene?
(b) ¿En qué armadura se presenta la mayor fuerza a compresión? ¿En qué barra o barras se presenta y qué valor tiene?



P6.10

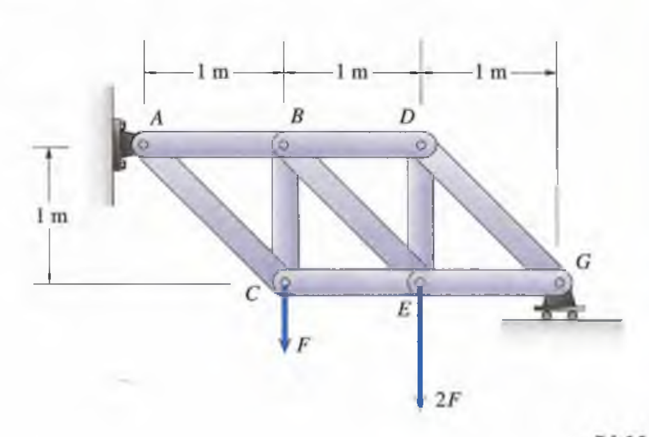
6.11 Se tienen las cargas $F_1 = F_2 = 10$ klb. Determine las fuerzas axiales en las barras BD, BE y BG.



P6.11

6.12 Considere la armadura del problema 6.11. Se dan las cargas $F_1 = 60$ lb y $F_2 = 120$ lb. Determine las fuerzas axiales en las barras AB, BC y BD.

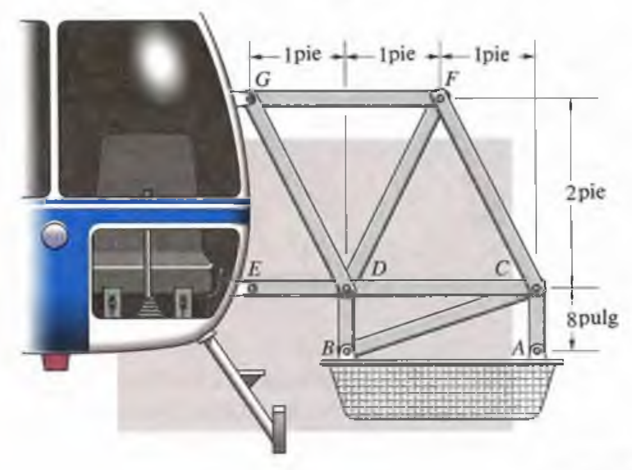
6.13 La armadura recibe cargas en C y E. Si $F = 3$ kN, ¿cuáles son las fuerzas axiales en las barras BC y BE?



P6.13

6.14 Considere la armadura del problema 6.13. Cada barra resiste con seguridad una fuerza a tensión de 28 kN y una fuerza a compresión de 12 kN. Con base en este criterio, ¿cuál es el máximo valor seguro (positivo) de F.

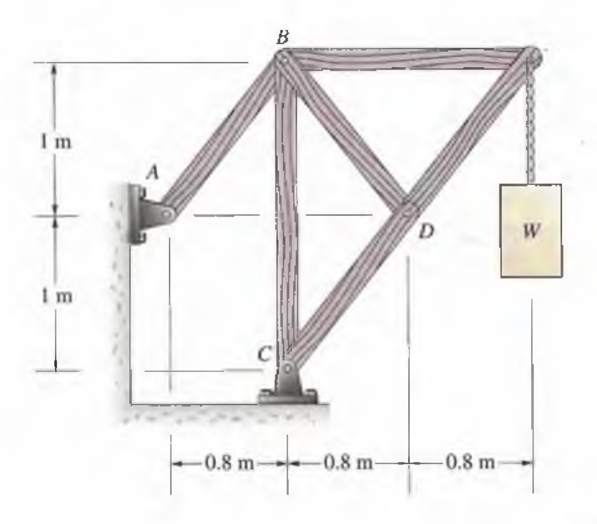
6.15 En la figura P6.15, la armadura conecta un extremo de una camilla a un helicóptero de salvamento. Si la camilla ejerce cargas verticales de 60 lb en A y B, ¿qué valor tienen las fuerzas axiales en las barras CF, DF y FG?



P6.15

6.16 Considere la armadura del problema 6.15. Si la camilla ejerce cargas verticales de 60 lb en A y B, ¿qué valor tienen las fuerzas axiales en las barras AC, CD y DG?

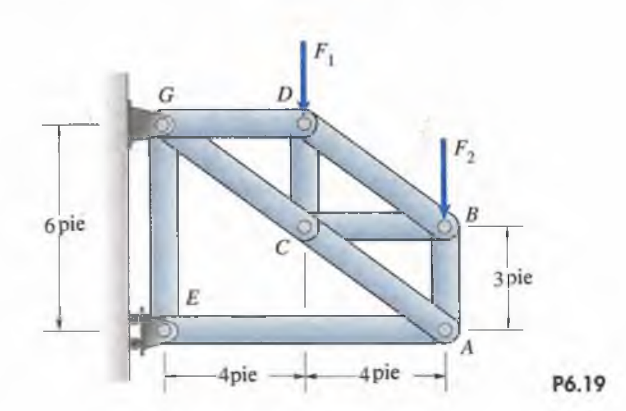
6.17 Determine las fuerzas axiales en las barras en función del peso W de la figura.



P6.17

6.18 Considere la armadura del problema 6.17. Cada barra resiste con seguridad una fuerza a tensión de 6 kN y una fuerza a compresión de 2 kN. Con base en este criterio, determine el peso máximo W que la armadura soporta con seguridad.

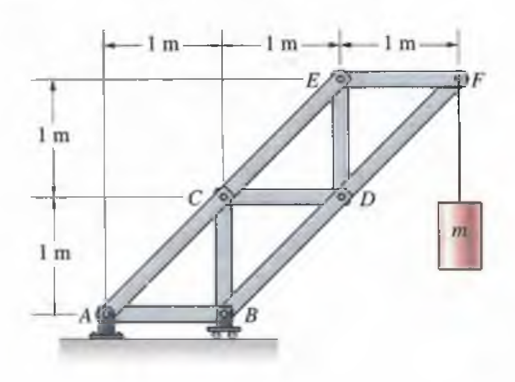
6.19 Se tienen las fuerzas $F_1 = 600$ lb y $F_2 = 300$ lb. Determine las fuerzas axiales en las barras AE, BD y CD.



P6.19

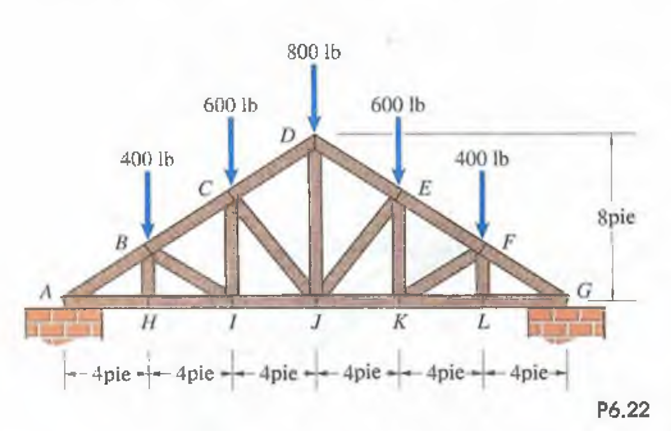
6.20 Considere la armadura del problema 6.19. Las cargas son: $F_1 = 450$ lb y $F_2 = 150$ lb. Determine las fuerzas axiales en las barras AB, AC y BC.

6.21 Cada barra de la armadura mostrada puede soportar con seguridad una fuerza a tensión de 4 kN y una fuerza a compresión de 1 kN. Determine la máxima masa m que puede ser suspendida.



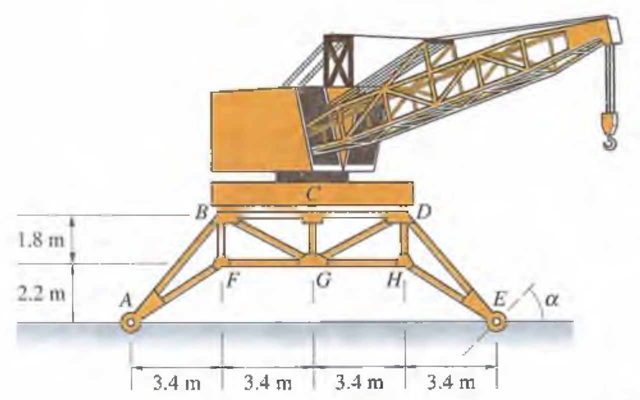
P6.21

6.22 La armadura Howe mostrada soporta un techo. Represente los soportes en A y G como soportes de rodillos. Determine las fuerzas axiales en las barras AB, BC y CD.



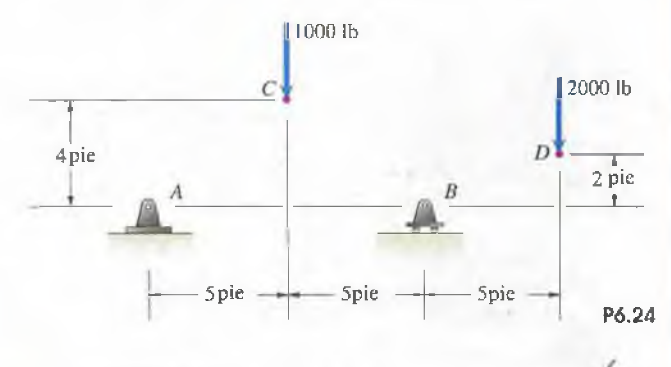
P6.22

6.23 La armadura plana mostrada forma parte de los soportes de una grúa sobre una plataforma petrolera lejos de la costa. La grúa ejerce fuerzas verticales de 75 kN sobre la armadura en B, C y D. El soporte en A se puede representar como un soporte de pasador y el soporte en E como un soporte de rodillos que puede generar una fuerza normal a la línea discontinua, pero que no puede generar una fuerza paralela a ella. El ángulo $\alpha = 45°$. Determine las fuerzas axiales en las barras de la armadura.



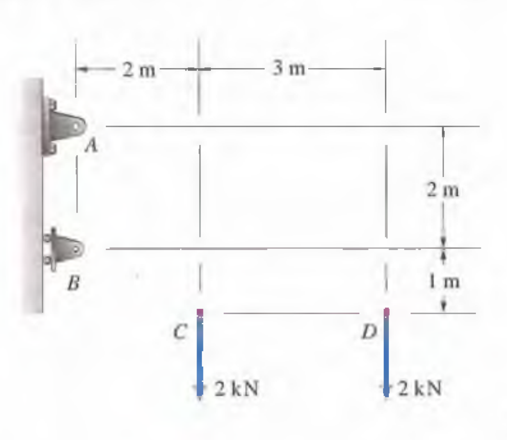
P6.23

6.24 (a) Diseñe una armadura unida a los soportes A y B que resista las cargas aplicadas en los puntos C y D de la figura. (b) Determine las fuerzas axiales en las barras de la armadura diseñada en la parte (a).



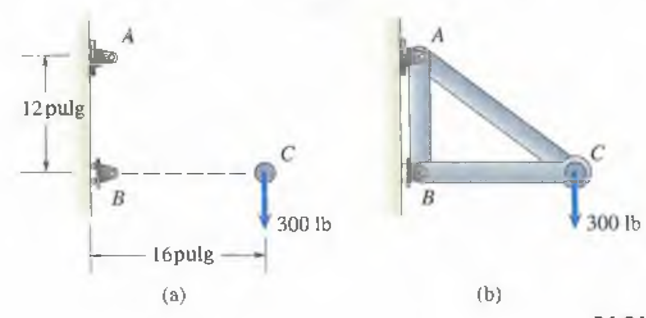
P6.24

6.25 (a) Diseñe una armadura unida a los soportes A y B que resista las cargas aplicadas en los puntos C y D de la figura. (b) Determine las fuerzas axiales en las barras de la armadura diseñada en la parte (a).



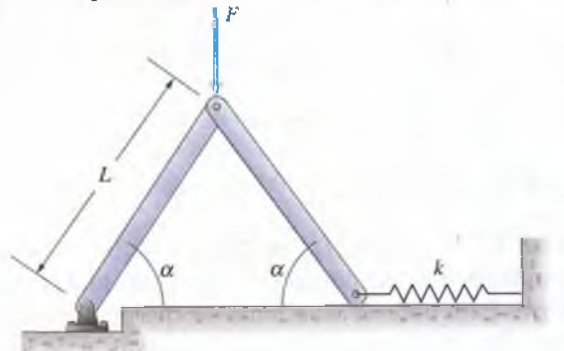
P6.25

6.26 Se requiere diseñar una armadura soportada en A y B (Fig. a) capaz de resistir una fuerza de 300 lb aplicada verticalmente en C. Si se usa el diseño más sencillo (Fig. b), se obtiene una tensión de 500 lb en la barra AC. Mejore este diseño con una armadura en la cual la máxima tensión sea menor que 500 lb.



P6.26

6.27 Las barras mostradas tienen la misma longitud. El resorte está sin estirar cuando $\alpha = 90°$; la superficie horizontal es lisa. ¿Para qué valor de α entre 0 y 90° permanecerá el sistema en equilibrio?



P6.27

Los problemas 6.28 y 6.29 están relacionados con el ejemplo 6.3.

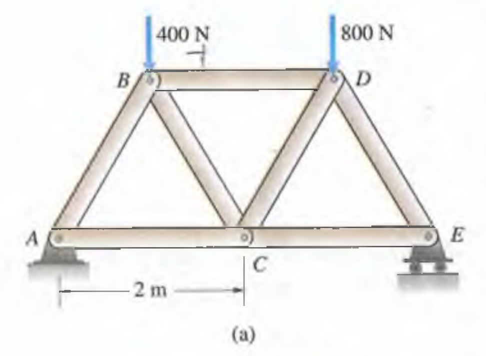
6.28 Determine las fuerzas axiales en la armadura Pratt de la figura 6.16 y verifique los valores en la tabla 6.2.

6.29 Determine las fuerzas axiales en la estructura del puente colgante de la figura 6.18, incluyendo las reacciones ejercidas sobre las torres, y verifique los valores en la tabla 6.3.

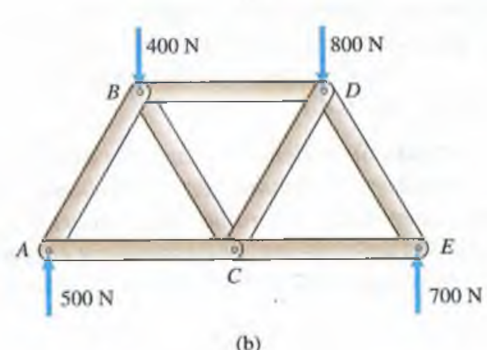
6.3 *Método de las secciones*

Cuando sólo se requiere conocer las fuerzas axiales en ciertas barras de una armadura, es más rápido determinarlas con el método de las secciones que con el de las juntas. Consideremos de nuevo la armadura Warren que usamos para presentar el método de las juntas (Fig. 6.20a). La armadura está cargada en B y D, cada barra tiene 2 m de longitud, y queremos determinar la fuerza axial en la barra BC.

Como en el método de las juntas, empezamos por dibujar el diagrama de cuerpo libre de la armadura entera y determinamos las reacciones en los soportes. Los resultados de este paso se muestran en la figura



(a)



(b)

Figura 6.20
(a) Armadura Warren soportando dos cargas.
(b) Diagrama de cuerpo libre de la armadura mostrando las reacciones en los soportes.

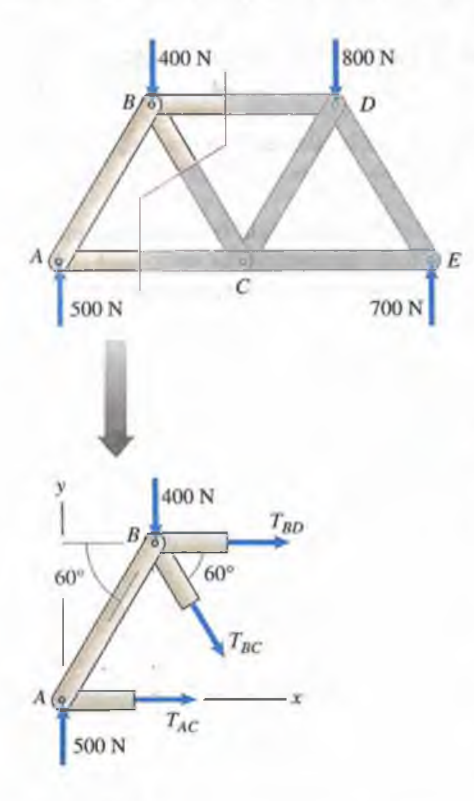


Figura 6.21
Obtención del diagrama de cuerpo libre de una sección de la armadura.

6.20(b). El siguiente paso es cortar las barras AC, BC y BD para obtener un diagrama de cuerpo libre de una parte, o **sección**, de la armadura (Fig. 6.21). Sumando momentos respecto al punto B, las ecuaciones de equilibrio para la parte izquierda son

$$\Sigma F_x = T_{AC} + T_{BD} + T_{BC}\cos 60^\circ = 0,$$

$$\Sigma F_y = 500 - 400 - T_{BC}\,\mathrm{sen}\,60^\circ = 0,$$

$$\Sigma M_{(\text{punto } B)} = T_{AC}(2\,\mathrm{sen}\,60^\circ) - (500)(2\cos 60^\circ) = 0.$$

Al resolverlas obtenemos $T_{AC} = 289$ N, $T_{BC} = 115$ N y $T_{BD} = -346$ N.

Se puede ver cuán similar es este método al método de las juntas. Ambos implican cortar barras para obtener diagramas de cuerpo libre de las partes de una armadura. En el método de las juntas se avanza de junta en junta, dibujando diagramas de cuerpo libre y determinando las fuerzas axiales en las barras. En el método de las secciones se trata de obtener un solo diagrama de cuerpo libre que nos permita determinar las fuerzas axiales en ciertas barras específicas. En nuestro ejemplo obtuvimos un diagrama de cuerpo libre cortando tres barras, incluida aquella (barra BC) cuya fuerza axial queremos determinar.

En contraste con los diagramas de cuerpo libre de juntas, las fuerzas sobre los diagramas de cuerpo libre usados en el método de las secciones no suelen ser concurrentes y (como en nuestro ejemplo) se pueden obtener tres ecuaciones de equilibrio independientes. Aunque hay excepciones, por lo general se deben escoger secciones que corten no más de tres barras, porque de lo contrario se tendrán más fuerzas axiales desconocidas que ecuaciones de equilibrio.

En los siguientes ejemplos usaremos el método de las secciones para determinar las fuerzas axiales en barras particulares de armaduras. Esto implica dos pasos:

1. **Determinar las reacciones en los soportes.** *Por lo general, se requiere dibujar el diagrama de cuerpo libre de la armadura entera y determinar las reacciones en sus soportes. (Este paso no es siempre necesario; véase el Ej. 6.4.)*

2. **Escoger una sección.** *Se obtiene un diagrama de cuerpo libre de una parte de la armadura cortando barras, incluidas aquellas cuyas fuerzas axiales queremos determinar. Se requiere algo de astucia y a veces el procedimiento de ensayo y error para encontrar el diagrama de cuerpo libre que conduzca al resultado buscado.*

Ejemplo 6.4

La armadura de la figura 6.22 soporta una carga de 100 kN. Las barras horizontales tienen 1 m de longitud. Determine la fuerza axial en la barra *CJ* e indique si trabaja a tensión o a compresión.

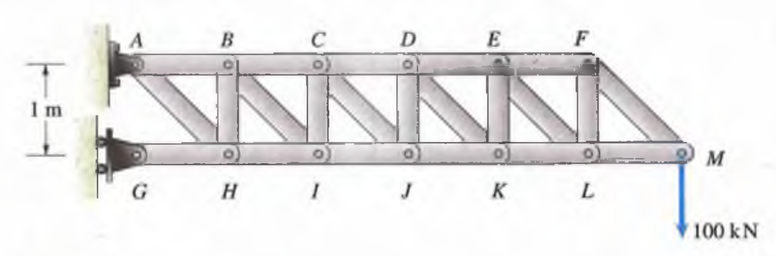


Figura 6.22

ESTRATEGIA

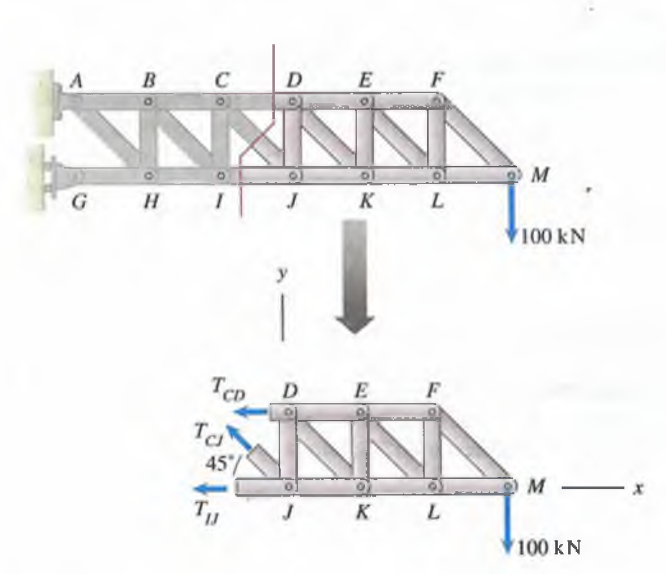
Necesitamos obtener una sección que incluya la barra *CJ*. Cortando las barras *CD*, *CJ* e *IJ* obtendremos un diagrama de cuerpo libre con tres fuerzas axiales desconocidas.

SOLUCIÓN

Elegir una sección En la figura (a) cortamos las barras *CD*, *CJ* e *IJ* y dibujamos el diagrama de cuerpo libre de la parte de la armadura a la derecha del corte. De la ecuación de equilibrio

$$\Sigma F_y = T_{CJ} \operatorname{sen} 45^\circ - 100 = 0,$$

obtenemos $T_{CJ} = 141.4$ kN. La fuerza axial en la barra *CJ* es de 141.4 kN (T).



(a) Obtención de la sección.

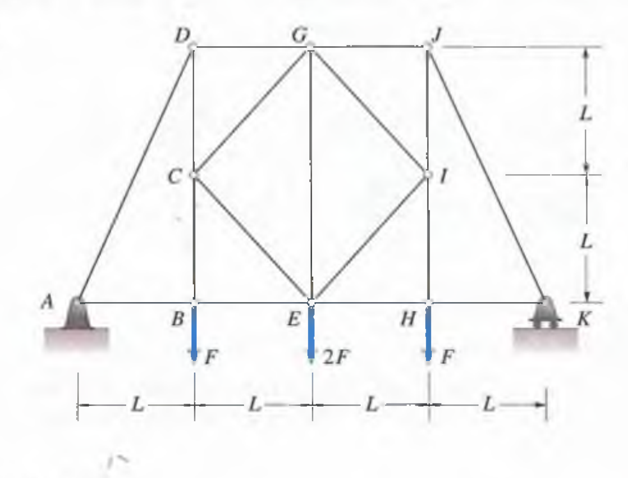
COMENTARIO

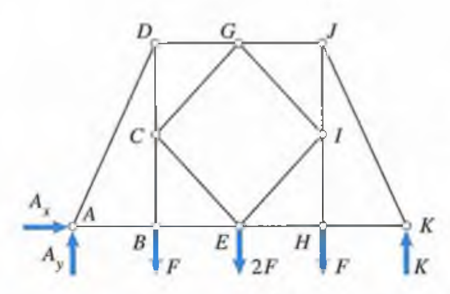
Observe que usando la sección a la derecha del corte, no tuvimos que determinar las reacciones en los soportes *A* y *G*.

Ejemplo 6.5

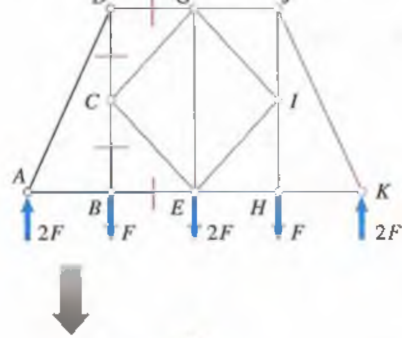
Determine las fuerzas axiales en las barras DG y BE de esta armadura:

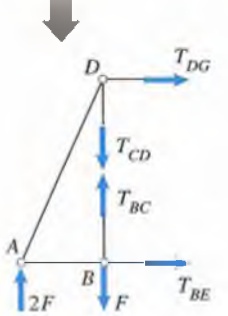
Figura 6.23





(a) Diagrama de cuerpo libre de toda la armadura.





(b) Sección de la armadura obtenida pasando planos por las barras DG, CD, BC y BE.

ESTRATEGIA

No es obvia la sección apropiada, ni está claro de antemano que podamos determinar la información pedida con el método de las secciones. No podemos obtener una sección que corte las barras DG y BE sin cortar más de tres barras. Sin embargo, cortando las barras DG, BE, CD y BC se obtiene una sección con la que podemos determinar las fuerzas axiales en DG y BE, aun cuando el diagrama resultante sea estáticamente indeterminado.

SOLUCIÓN

Determinar las reacciones en los soportes En (a) dibujamos el diagrama de cuerpo libre de toda la estructura. De las ecuaciones de equilibrio,

$$\Sigma F_x = A_x = 0,$$

$$\Sigma F_y = A_y + K - F - 2F - F = 0,$$

$$\Sigma M_{(\text{punto } A)} = -FL - 2F(2L) - F(3L) + K(4L) = 0,$$

obtenemos las reacciones $A_x = 0$, $A_y = 2F$ y $K = 2F$.

Elegir una sección En (b) obtenemos una sección cortando las barras DG, CD, BC y BE. Como las líneas de acción de T_{BE}, T_{BC} y T_{CD} pasan por el punto B, podemos determinar T_{DG} sumando momentos respecto a B:

$$\Sigma M_{(\text{punto } B)} = -2FL - T_{DG}(2L) = 0$$

La fuerza axial $T_{DG} = -F$. Entonces, de la ecuación de equilibrio

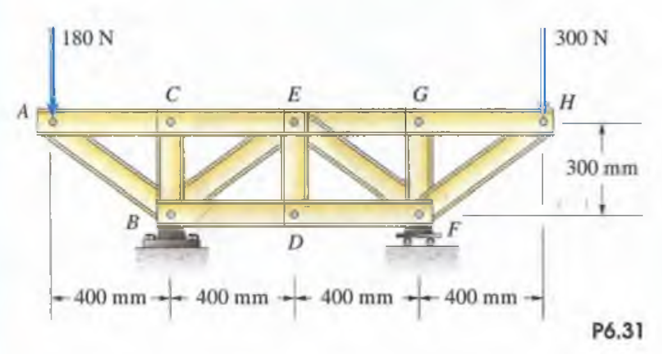
$$\Sigma F_x = T_{DG} + T_{BE} = 0,$$

vemos que $T_{BE} = -T_{DG} = F$. La barra DG está a compresión y la barra BE está a tensión.

Problemas

6.30 En el ejemplo 6.4, ¿qué valores tienen las fuerzas axiales en las barras *CD* e *IJ*?

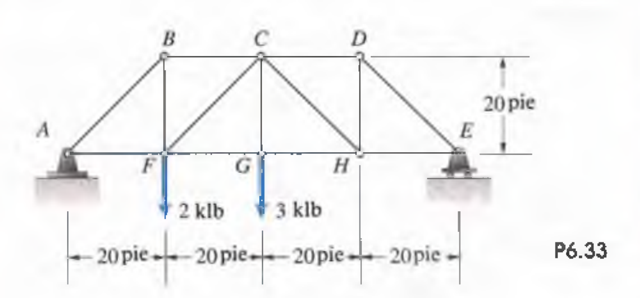
6.31 La armadura mostrada soporta cargas en *A* y *H*.
(a) Dibuje el diagrama de cuerpo libre de la estructura entera y determine las reacciones en los soportes *B* y *F*.
(b) Obtenga una sección cortando las barras *CE*, *BE* y *BD* y dibuje su diagrama de cuerpo libre.
(c) Use la sección obtenida en la parte (b) para determinar las fuerzas axiales en las barras *CE*, *BE* y *BD*.



P6.31

6.32 Considere la armadura del problema 6.31. Use el método de las secciones para determinar las fuerzas axiales en las barras *EG*, *EF* y *DF*.

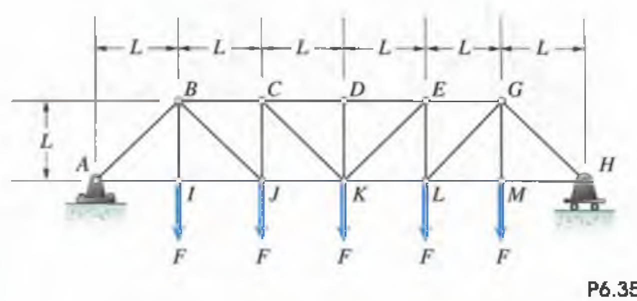
6.33 La armadura Howe soporta cargas en *F* y *G*.
(a) Dibuje el diagrama de cuerpo libre de la armadura entera y determine las reacciones en los soportes *A* y *E*.
(b) Obtenga una sección cortando las barras *CD*, *CH* y *GH* y dibuje su diagrama de cuerpo libre.
(c) Use la sección obtenida en la parte (b) para determinar la fuerza axial en la barra *GH*.



P6.33

6.34 Considere la armadura del problema 6.33.
(a) Use el método de las juntas para determinar la fuerza axial en la barra *BC*.
(b) Obtenga una sección cortando las barras *BC*, *CF* y *FG* y úsela para determinar la fuerza axial en la barra *BC*.

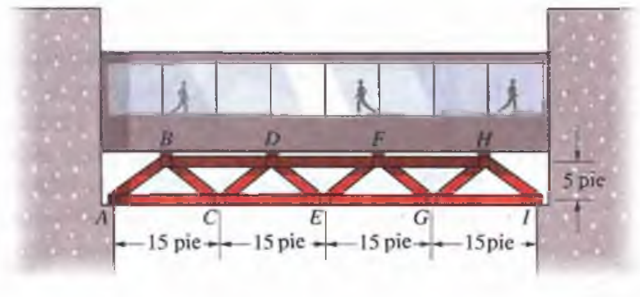
6.35 La armadura de puente Pratt mostrada soporta cinco fuerzas ($F = 75$ klb). $L = 25$ pies. Use el método de las secciones para determinar la fuerza axial en la barra *JK*.



P6.35

6.36 Considere la armadura de puente del problema 6.35. La carga $F = 40$ klb y la longitud $L = 30$ pies. Con el método de las secciones determine la fuerza axial en la barra *EK*.

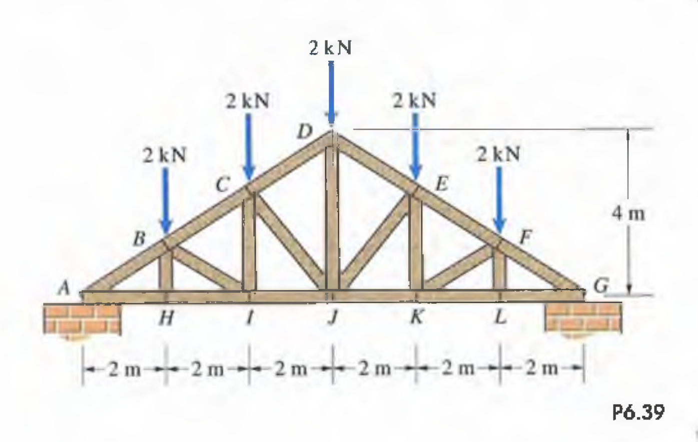
6.37 La armadura Warren soporta un puente peatonal entre dos edificios que ejerce fuerzas verticales de 10 klb en *B*, *D*, *F* y *H*. Los soportes en *A* y en *I* son soportes de rodillos.
(a) Use el método de las juntas para determinar la fuerza axial en la barra *BC*.
(b) Use el método de las secciones para determinar la fuerza axial en la barra *BC*.



P6.37

6.38 Considere la armadura descrita en el problema 6.37. Use el método de las secciones para determinar las fuerzas axiales en las barras *CE*, *DE* y *DF*.

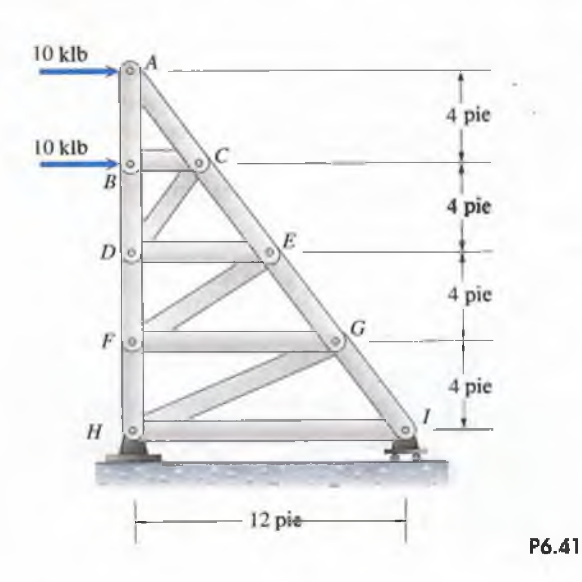
6.39 La armadura Howe mostrada soporta un techo. Represente los soportes en A y G como soportes de rodillos.
(a) Use el método de las juntas para determinar la fuerza axial en la barra BI.
(b) Use el método de las secciones para determinar la fuerza axial en la barra BI.



P6.39

6.40 Considere la armadura del problema 6.39. Use el método de las secciones para determinar la fuerza axial en EJ.

6.41 Use el método de las secciones para determinar la fuerza axial en la barra EF.

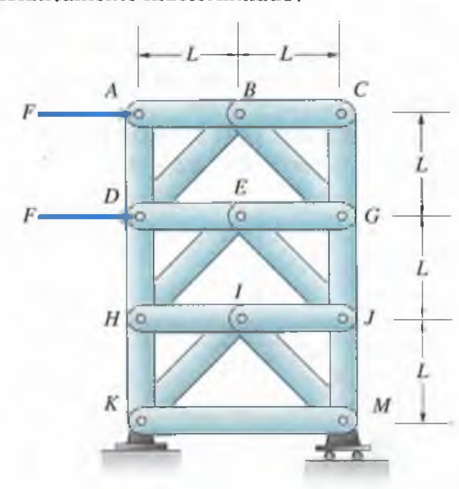


P6.41

6.42 Considere la armadura del problema 6.41. Use el método de las secciones para determinar la fuerza axial en la barra FG.

6.43 La carga $F = 20$ kN y la dimensión $L = 2$ m. Use el método de las secciones para determinar la fuerza axial en la barra HK.

Estrategia: Obtenga una sección cortando las barras HK, HI, IJ y JM. Se pueden determinar las fuerzas axiales en las barras HK y JM, aunque el diagrama de cuerpo libre resultante es estáticamente indeterminado.

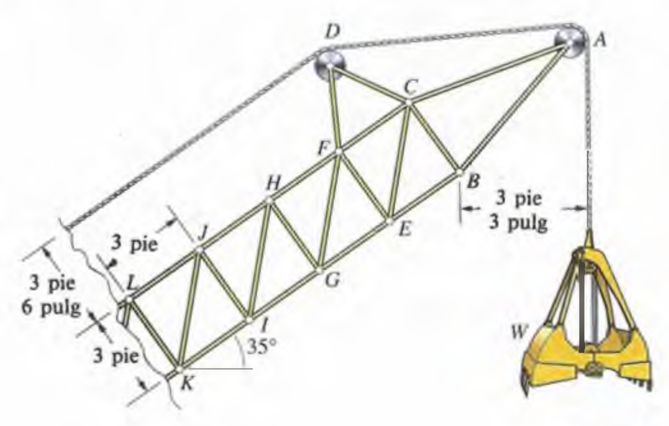


P6.43

6.44 Considere la armadura del problema 6.43. La carga $F = 50$ kN y la longitud $L = 2$ m. Use el método de las secciones para determinar las fuerzas axiales en las barras DH y GJ.

6.45 Considere la armadura del problema 6.21. La masa es $m = 200$ kg. Use el método de las secciones para determinar la fuerza axial en la barra CD.

6.46 El peso del cangilón es $W = 1000$ lb. El cable pasa sobre poleas en A y D.
(a) Determine las fuerzas axiales en las barras FG y HI.
(b) Dibujando diagramas de cuerpo libre de secciones, explique por qué las fuerzas axiales en las barras FG y HI son iguales.



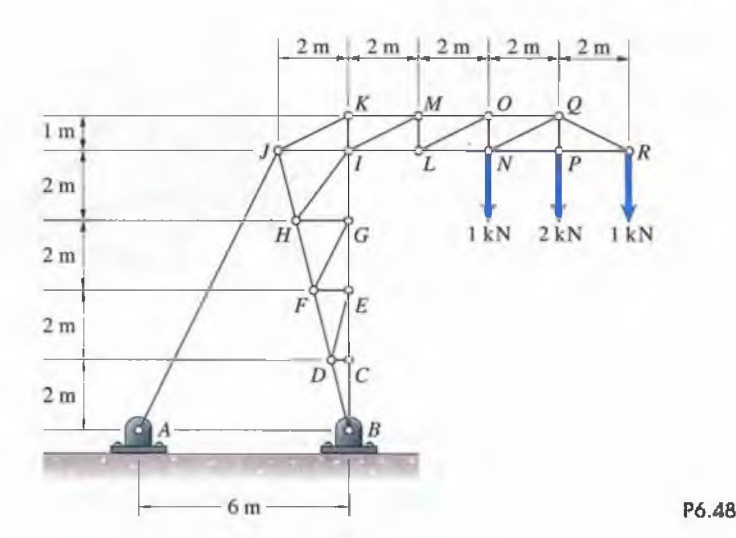
P6.46

6.47 Considere la armadura del problema 6.46. El peso del cangilón es $W = 1000$ lb. El cable pasa sobre poleas en A y D. Determine las fuerzas axiales en las barras IK y JL.

6.48 La armadura mostrada soporta cargas en N, P y R. Determine las fuerzas axiales en las barras IL y KM.

6.49 Considere la armadura del problema 6.48. Determine las fuerzas axiales en las barras HJ y GI.

6.50 Considere la armadura del problema 6.48. Dibujando diagramas de cuerpo libre de secciones, explique por qué las fuerzas axiales en las barras DE, FG y HI son nulas.

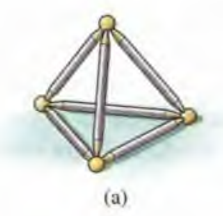


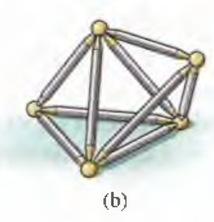
P6.48

6.4 Armaduras espaciales

Podemos construir una estructura tridimensional sencilla conectando seis barras en sus extremos para obtener un *tetraedro*, como se muestra en la figura 6.24(a).

Agregando barras podemos obtener estructuras más elaboradas (Figs. 6.24b y c). Las estructuras tridimensionales como éstas se denominan **armaduras espaciales** si tienen juntas que no ejercen pares sobre las barras (es decir, las juntas se comportan como soportes de bola y cuenca) y si están cargadas y soportadas sólo en sus juntas. Las armaduras espaciales se analizan con los mismos métodos descritos para las armaduras bidimensionales. La única diferencia es que se requiere tratar con relaciones geométricas más complicadas.


(a)


(b)

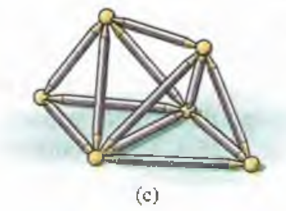
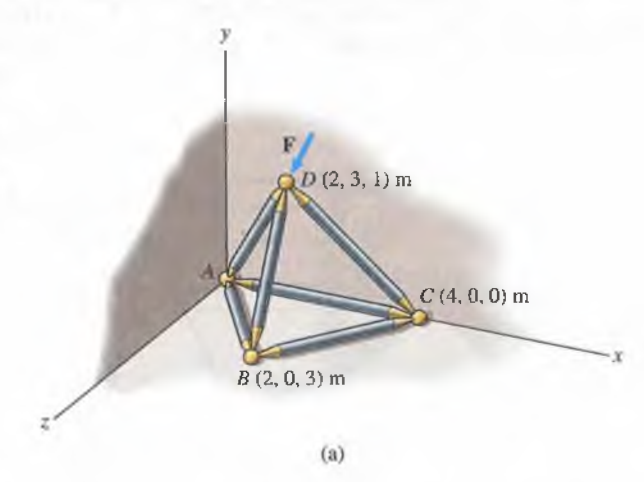

(c)

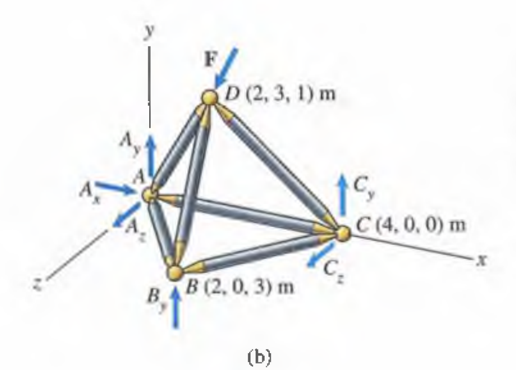
Figura 6.24
Armaduras espaciales con (a) 6, (b) 9 y (c) 12 barras.

En la armadura espacial de la figura 6.25(a) la carga $\mathbf{F} = -2\mathbf{i} - 6\mathbf{j} - \mathbf{k}$ (kN). Las juntas A, B y C descansan sobre un piso liso. A se apoya donde se unen las paredes lisas y C sobre una de las paredes. Podemos aplicar el método de las juntas a esta armadura.

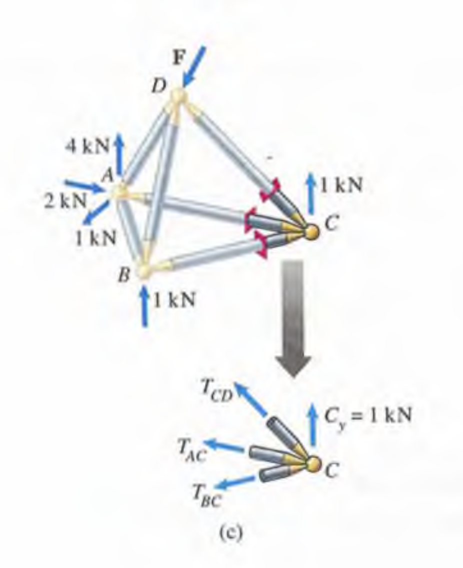
Figura 6.25
(a) Armadura espacial que soporta una carga F.
(b) Diagrama de cuerpo libre de la armadura completa.
(c) Obtención del diagrama de cuerpo libre de la junta C.



(a)



(b)



(c)

Calculamos las reacciones ejercidas por los soportes (piso y paredes). Dibujamos el diagrama de la armadura entera (Fig. 6.25b). La esquina puede ejercer tres componentes de fuerza en A, el piso y la pared dos componentes en C, y el piso una fuerza normal en B. Sumando momentos respecto a A, las ecuaciones de equilibrio son

$$\Sigma F_x = A_x - 2 = 0,$$

$$\Sigma F_y = A_y + B_y + C_y - 6 = 0,$$

$$\Sigma F_z = A_z + C_z - 1 = 0,$$

$$\Sigma M_{(\text{punto } A)} = \mathbf{r}_{AB} \times B_y\,\mathbf{j} + \mathbf{r}_{AC} \times (C_y\,\mathbf{j} + C_z\,\mathbf{k}) + \mathbf{r}_{AD} \times \mathbf{F}$$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & B_y & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & C_y & C_z \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 3 & 1 \\ -2 & -6 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= (-3B_y + 3)\,\mathbf{i} + (-4C_z)\,\mathbf{j}$$

$$+ (2B_y + 4C_y - 6)\,\mathbf{k} = \mathbf{0}.$$

Resolviendo estas ecuaciones obtenemos las reacciones $A_x = 2$ kN, $A_y = 4$ kN, $A_z = 1$ kN, $B_y = 1$ kN, $C_y = 1$ kN y $C_z = 0$.

En este ejemplo, las fuerzas axiales en las barras AC, BC y CD se pueden determinar a partir del diagrama de cuerpo libre de la junta C (Fig. 6.25c). Para plantear las ecuaciones de equilibrio de la junta debemos expresar las tres fuerzas axiales en función de sus componentes. Co-

mo la barra AC se encuentra sobre el eje x, expresamos la fuerza requerida sobre la junta C con la fuerza axial T_{AC} como vector $-T_{AC}\mathbf{i}$. Sea $\mathbf{r}_{CB}$ el vector de posición de C a B:

$$\mathbf{r}_{CB} = (2-4)\mathbf{i} + (0-0)\mathbf{j} + (3-0)\mathbf{k} = -2\mathbf{i} + 3\mathbf{k} \text{ (m)}.$$

Dividiendo este vector entre su magnitud obtenemos un vector unitario que apunta de C a B,

$$\mathbf{e}_{CB} = \frac{\mathbf{r}_{CB}}{|\mathbf{r}_{CB}|} = -0.555\,\mathbf{i} + 0.832\,\mathbf{k},$$

y expresamos la fuerza ejercida sobre la junta C por medio de la fuerza axial T_{BC} como el vector

$$T_{BC}\mathbf{e}_{CB} = T_{BC}(-0.555\,\mathbf{i} + 0.832\,\mathbf{k}).$$

De la misma manera, expresamos la fuerza ejercida sobre la junta C mediante la fuerza axial T_{CD} como el vector

$$T_{CD}(-0.535\,\mathbf{i} + 0.802\,\mathbf{j} + 0.267\,\mathbf{k}).$$

Haciendo igual a cero la suma de las fuerzas sobre la junta,

$$-T_{AC}\,\mathbf{i} + T_{BC}(-0.555\,\mathbf{i} + 0.832\,\mathbf{k}) + T_{CD}(-0.535\,\mathbf{i} + 0.802\,\mathbf{j} + 0.267\,\mathbf{k}) + (1)\,\mathbf{j} = \mathbf{0},$$

obtenemos las tres ecuaciones de equilibrio

$$\Sigma F_x = -T_{AC} - 0.555T_{BC} - 0.535T_{CD} = 0,$$

$$\Sigma F_y = 0.802T_{CD} + 1 = 0,$$

$$\Sigma F_z = 0.832T_{BC} + 0.267T_{CD} = 0.$$

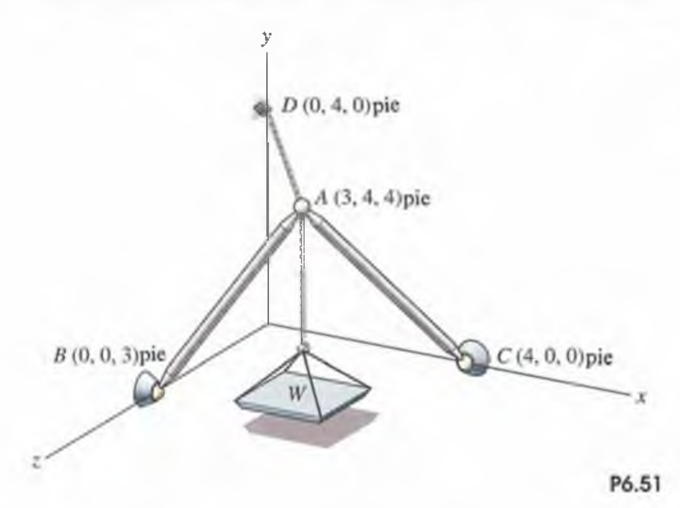
Resolviendo estas ecuaciones, las fuerzas axiales son $T_{AC} = 0.444$ kN, $T_{BC} = 0.401$ kN y $T_{CD} = -1.247$ kN. Las barras AC y BC están a tensión y la barra CD a compresión. Dibujando los diagramas de cuerpo libre de las juntas restantes, podemos obtener las fuerzas axiales en todas las barras.

Como lo demuestra este ejemplo, se pueden obtener tres ecuaciones de equilibrio a partir del diagrama de cuerpo libre de una junta en tres dimensiones, por lo que deben elegirse juntas que estén sometidas a fuerzas conocidas con no más de tres fuerzas desconocidas.

Problemas

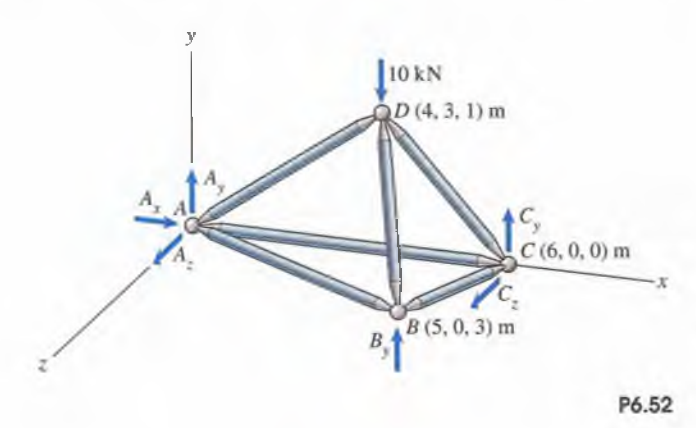
6.51 En la figura P6.51, el peso suspendido W = 600 lb. Las barras AB y AC tienen juntas de bola y cuenca en cada extremo. Determine la tensión en el cable AD y las fuerzas axiales en las barras AB y AC.

Estrategia: Dibuje el diagrama de cuerpo libre de la junta A.



P6.51

6.52 La armadura espacial mostrada soporta una carga vertical de 10 kN en D. Se muestran las reacciones en las juntas A, B y C. ¿Qué valor tienen las fuerzas axiales en las barras AD, BD y CD?



P6.52

6.53 Considere la armadura espacial del problema 6.52. Las reacciones en las juntas A, B y C se muestran en la figura. ¿Qué valor tienen las fuerzas axiales en las barras AB, AC y AD?

6.54 Considere la armadura espacial del problema 6.52. Las reacciones en las juntas A, B y C se muestran en la figura. ¿Qué valor tienen las fuerzas axiales en las barras AB, BC y BD?

6.55 La armadura espacial mostrada soporta una carga vertical F en A. Cada barra tiene una longitud L, y la armadura tiene soportes de rodillo en B, C y D. ¿Qué valor tienen las fuerzas axiales en las barras?



P6.55

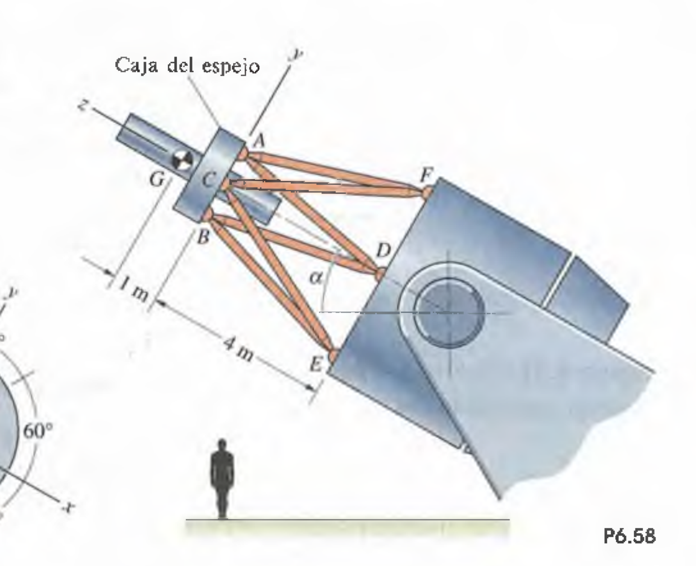
6.56 La armadura espacial mostrada tiene soportes de rodillo en B, C y D y sostiene una carga vertical en A de 800 lb. ¿Qué valor tienen las fuerzas axiales en las barras AB, AC y AD?

P6.56

6.57 Considere la armadura espacial del problema 6.56. ¿Qué valor tienen las fuerzas axiales en las barras BC, BD y CD?

6.58 A la caja del espejo del telescopio la soporta una armadura espacial de seis barras. La masa de la caja es de 3 Mg y su peso actúa en G. La distancia del eje del telescopio a los puntos A, B y C es de 1 m, y a los puntos D, E y F es de 2.5 m. Si el eje del telescopio es vertical ($\alpha = 90°$), ¿qué valor tienen las fuerzas axiales en las barras de la armadura?

6.59 Considere el telescopio del problema 6.58. Determine las fuerzas axiales en las barras cuando el ángulo α entre la horizontal y el eje del telescopio es de 20°.



P6.58

6.5 *Bastidores y máquinas*

Muchas estructuras, como el bastidor de un automóvil y la estructura humana de huesos, tendones y músculos, no están compuestas enteramente de miembros de dos fuerzas y no se pueden representar como armaduras (Fig. 6.26). En esta sección consideraremos estructuras de miembros interconectados que no satisfacen la definición de una armadura. Estas estructuras se denominan **bastidores** si están diseñadas para permanecer en reposo al soportar cargas, y **máquinas** si están diseñadas para moverse y aplicar cargas.



(a)



(b)

Figura 6.26 El bastidor de un automóvil (a) y el esqueleto de una persona (b) no son armaduras.

Cuando se analizan armaduras cortando barras para obtener diagramas de cuerpo libre de juntas o secciones, las fuerzas internas que actúan en los "cortes" son simples fuerzas axiales (véase la Fig. 6.4). Esto no es generalmente cierto para bastidores o máquinas, y se requiere un método diferente para su análisis. En vez de cortar barras, se aíslan de la estructura barras enteras o en algunos casos combinaciones de elementos.

Figura 6.27
Bastidor soportando dos cargas.

Para analizar un bastidor o una máquina, se dibuja un diagrama de toda la estructura (tratándola como un solo cuerpo) y se determinan las reacciones en sus soportes. A veces la estructura entera será estáticamente indeterminada, pero se debe determinar tantas reacciones como sea posible. Luego se dibujan diagramas de elementos individuales, o de grupos selectos, y se aplican las ecuaciones de equilibrio para determinar las fuerzas y los pares que actúan sobre ellos. Consideremos la estructura en reposo de la figura 6.27. *BE* es un miembro de dos fuerzas, pero *ABC*, *CD* y *DEG*, no. Esto es un bastidor. Queremos determinar las fuerzas en sus elementos.

Análisis de la estructura completa

La figura 6.28 es el diagrama de cuerpo libre del bastidor entero. Es estáticamente indeterminado: tiene cuatro reacciones desconocidas, A_x, A_y, G_x y G_y, y sólo podemos escribir tres ecuaciones independientes de equilibrio. Sin embargo, observe que las líneas de acción de tres de las reacciones se cortan en A. Sumando momentos respecto a A,

$$\Sigma M_{(\text{punto } A)} = (2)G_x + (1)(8) - (3)(6) = 0,$$

obtenemos la reacción $G_x = 5$ kN. Luego, de la ecuación de equilibrio,

$$\Sigma F_x = A_x + G_x + 8 = 0,$$

obtenemos la reacción $A_x = -13$ kN. Aunque no podemos determinar A_y o G_y del diagrama de cuerpo libre de la estructura, podemos hacerlo analizando elementos individuales.

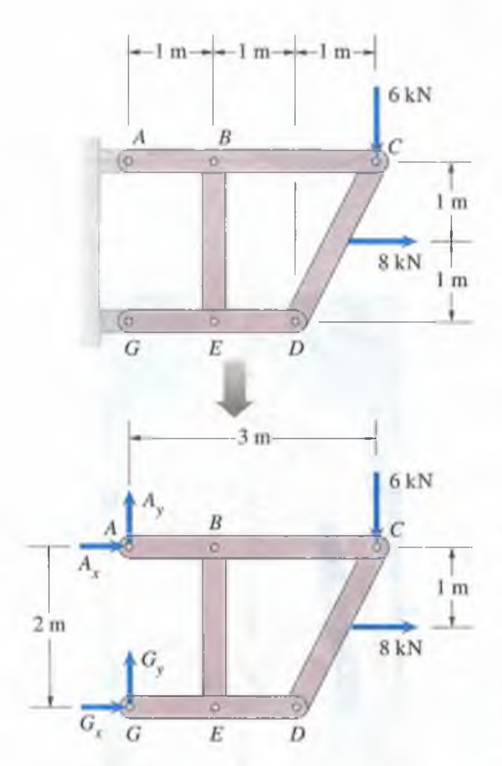


Figura 6.28
Obtención del diagrama de cuerpo libre del bastidor completo.

Análisis de los elementos

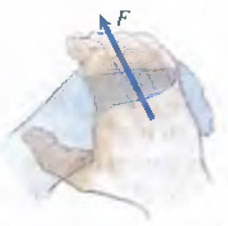
El siguiente paso es dibujar los diagramas de cuerpo libre de los elementos. Para ello, consideramos la unión de un elemento con otro como si fuera un soporte. Visto de esta manera, cada elemento se puede considerar como un cuerpo soportado del tipo que vimos en el capítulo 5. Además, las fuerzas y los pares que los elementos ejercen entre sí son *iguales en magnitud y opuestos en dirección*. Una simple demostración ilustrará esto. Si usted sujeta sus manos como se muestra en la figura 6.29(a) y ejerce una fuerza sobre su mano izquierda, su mano izquierda ejerce una fuerza igual y opuesta sobre su mano derecha (Fig. 6.29b). Así mismo, si usted ejerce un par sobre su mano izquierda, su mano izquierda ejerce un par igual y opuesto sobre su mano derecha.

Figura 6.29
Demostración de la tercera ley de Newton:
(a) Sujete sus manos y jale su mano izquierda.
(b) Sus manos ejercen fuerzas iguales y opuestas.



(a)





(b)

La figura 6.30 muestra el bastidor "desarmado" junto con los diagramas de sus elementos. Observe que las fuerzas ejercidas entre sí por los elementos son iguales y opuestas. Por ejemplo, en el punto C del diagrama del elemento ABC, la fuerza ejercida por CD se denota con C_x y C_y. Podemos elegir arbitrariamente las direcciones de esas fuerzas desconocidas, pero las fuerzas ejercidas por ABC sobre CD en C deben ser iguales y opuestas, como en la figura.

Antes de completar el análisis debemos estudiar dos aspectos importantes de esos diagramas de cuerpo libre.

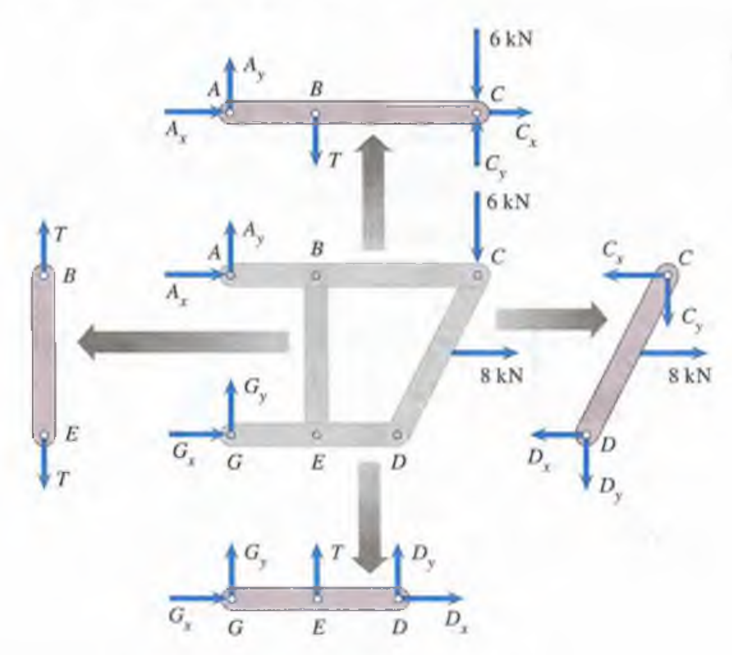


Figura 6.30
Obtención del diagrama de cuerpo libre de los miembros.

Miembros de dos fuerzas En la figura 6.30, BE es un miembro de dos fuerzas, y hemos tomado esto en cuenta al dibujar su diagrama de cuerpo libre. T es la fuerza axial en el elemento BE, y una fuerza igual y opuesta está actuando sobre ABC en B y sobre GED en E.

Detectar los miembros de dos fuerzas en los bastidores y máquinas y dibujar sus diagramas como lo hemos hecho, reduce el número de incógnitas por determinar y simplifica mucho el análisis. Aquí, si no tratamos BE como un miembro de dos fuerzas, su diagrama tendrá cuatro fuerzas desconocidas (Fig. 6.31a). Tratándolo como un miembro de dos fuerzas (Fig. 6.31b), reducimos a tres las fuerzas desconocidas.

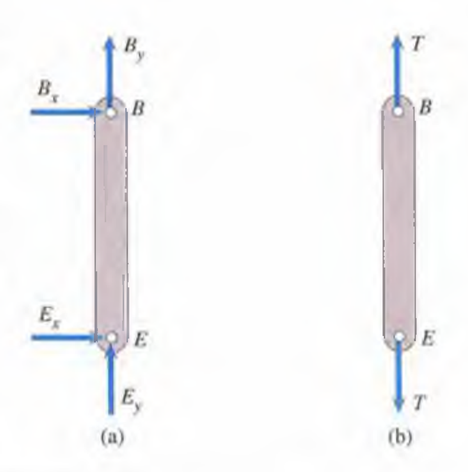


Figura 6.31
Diagrama de cuerpo libre del miembro BE:
(a) Sin tratarlo como miembro de dos fuerzas.
(b) Tratándolo como miembro de dos fuerzas.

Cargas aplicadas en las juntas Cuando una carga se aplica en una junta surge esta pregunta: ¿dónde se coloca la carga cuando se dibujan los diagramas de cuerpo libre de los elementos individuales? La respuesta es: sobre *cualquiera* de los elementos unidos en la junta.

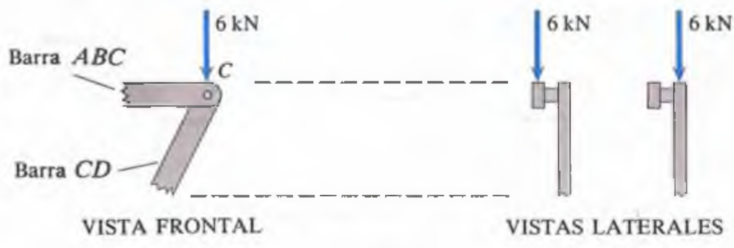
Aquí, la carga de 6 kN actúa en la junta donde se conectan los elementos ABC y CD. Al dibujar los diagramas de cuerpo libre de los elementos individuales (Fig. 6.30), supusimos que la carga de 6 kN actúa sobre ABC. Las componentes de fuerza C_x y C_y sobre el diagrama del elemento ABC son las fuerzas ejercidas por CD. En una vista lateral

(Fig. 6.32a), se ve que la carga de 6 kN se puede aplicar a cualquier elemento, o una parte puede actuar sobre un elemento y una parte sobre el otro. El punto importante es que podemos suponer que la carga actúa sobre cualquier elemento y las soluciones para las fuerzas *totales* sobre los elementos serán las mismas. En vez de dibujar los diagramas ABC y CD en el punto C (Fig. 6.32b), podríamos dibujarlos con los 6 kN actuando sobre CD (Fig. 6.32c) y las soluciones para las fuerzas totales en C serían las mismas:

$$C'_x = C_x,$$

$$C'_y = C_y - 6.$$

Entonces, si en una junta actúa una carga, ésta se puede colocar sobre cualquiera de los elementos unidos en la junta cuando se dibujen los diagramas de cuerpo libre de los elementos individuales. Sólo asegúrese de no colocarla en más de un elemento.



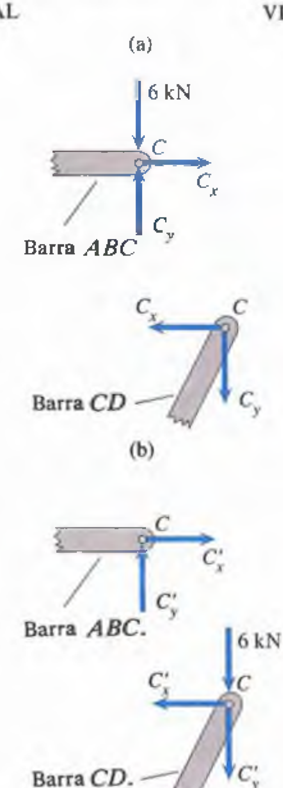


Figura 6.32
(a) La carga de 6 kN podría aplicarse de dos maneras.
(b) Suponiendo que la carga de 6 kN actúa sobre la barra ABC.
(c) Suponiendo que la carga de 6 kN actúa sobre la barra CD.

Para detectar errores en los diagramas de cuerpo libre de los elementos, éstos se deben "reensamblar" (Fig. 6.33a). Las fuerzas en las conexiones entre los elementos se cancelan (son fuerzas internas una vez que los elementos están reensamblados) y se debe recuperar el diagrama de cuerpo libre de la estructura completa (Fig. 6.33b).

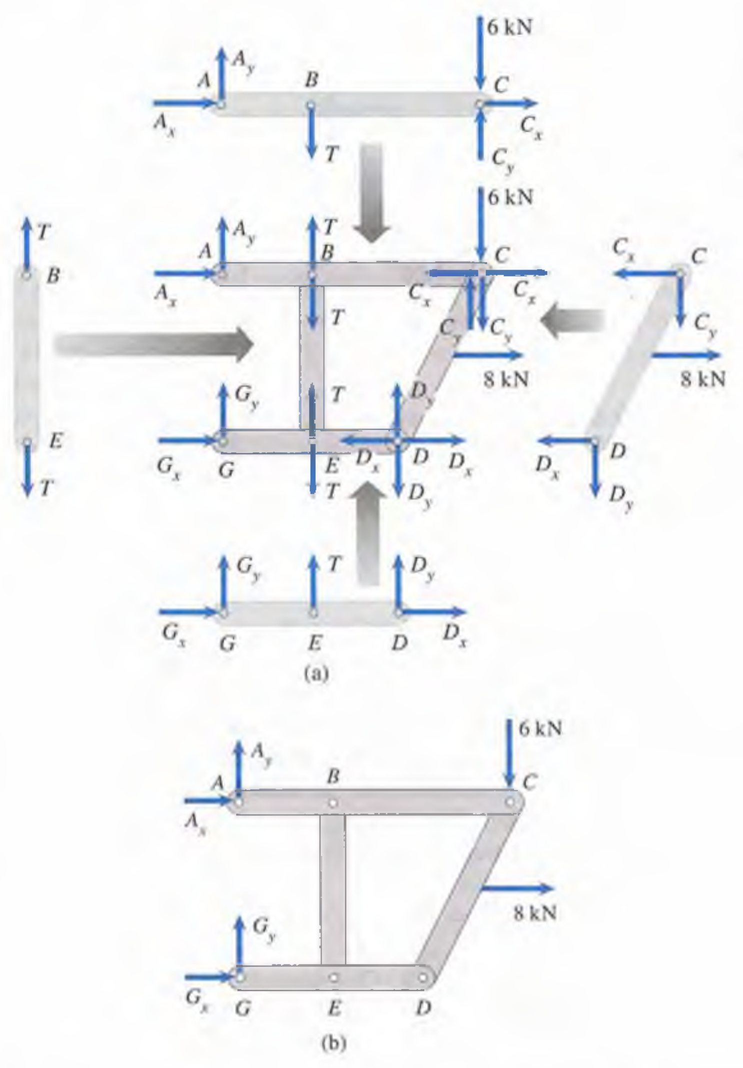
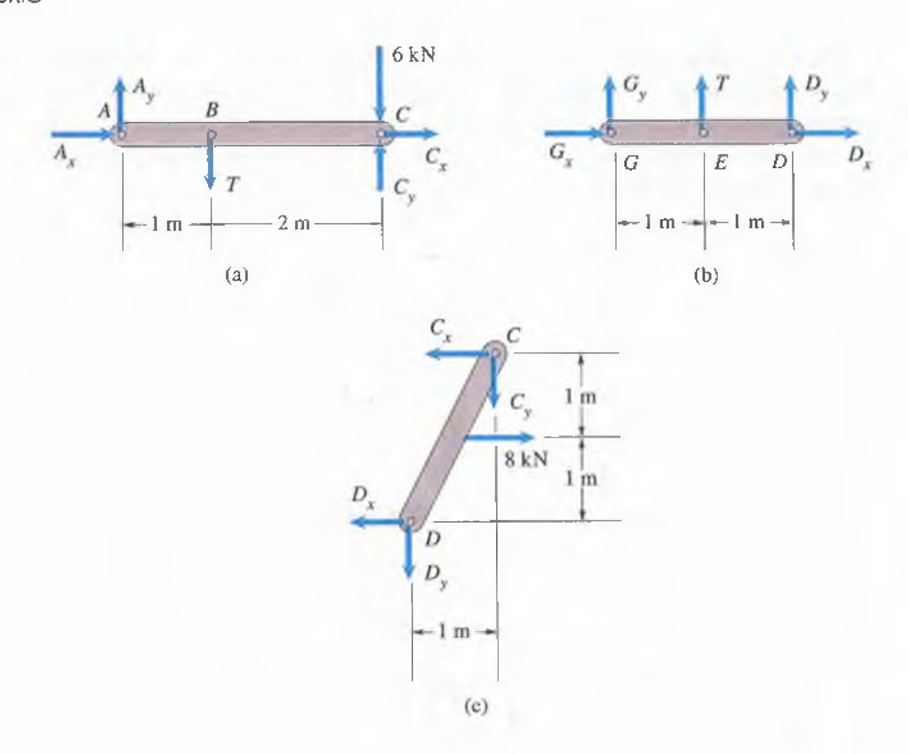


Figura 6.33
(a) "Reensamblaje" de los diagramas de cuerpo libre de las barras individuales.
(b) Se ha recuperado el diagrama de cuerpo libre del bastidor completo.

El paso final es aplicar las ecuaciones de equilibrio a los diagramas de cuerpo libre de los elementos (Fig. 6.34). En dos dimensiones, podemos obtener tres ecuaciones de equilibrio independientes del diagrama de cuerpo libre de cada elemento de una estructura que no tratemos como un miembro de dos fuerzas. (Al suponer que las fuerzas sobre un miembro de dos fuerzas son fuerzas axiales iguales y opuestas, ya hemos usado para ese elemento las tres ecuaciones de equilibrio). En este ejemplo (Fig. 6.30), hay tres elementos además del miembro de dos fuerzas, por lo que se tienen (3)(3) = 9 ecuaciones de equilibrio individuales y 9 fuerzas desconocidas: A_x, A_y, C_x, C_y, D_x, D_y, G_x, G_y y T.

Figura 6.34
Diagramas de cuerpo libre de las barras.



Recordemos que obtuvimos los valores $A_x = -13$ kN y $G_x = 5$ kN a partir del análisis de la estructura completa. Las ecuaciones de equilibrio obtenidas del diagrama de cuerpo libre de la estructura no son independientes de las ecuaciones de equilibrio obtenidas de los diagramas de cuerpo libre de los elementos, pero al usarlas para determinar A_x y G_x ahorramos tiempo en la solución de las ecuaciones de los elementos. Consideremos el diagrama de cuerpo libre del elemento ABC (Fig. 6.34a). Como ya conocemos A_x, podemos determinar C_x de la ecuación

$$\Sigma F_x = A_x + C_x = 0,$$

y obtenemos $C_x = -A_x = 13$ kN. Consideremos ahora el diagrama de cuerpo libre de GED (Fig. 6.34b). Podemos determinar D_x de la ecuación

$$\Sigma F_x = G_x + D_x = 0,$$

y obtenemos $D_x = -G_x = -5$ kN. Consideremos ahora el diagrama de cuerpo libre del miembro CD (Fig. 6.34c). Como ya conocemos C_x, podemos determinar C_y sumando momentos respecto a D:

$$\Sigma M_{(\text{punto } D)} = (2)C_x - (1)C_y - (1)(8) = 0.$$

Obtenemos $C_y = 18$ kN. Entonces, de la ecuación

$$\Sigma F_y = -C_y - D_y = 0,$$

encontramos que $D_y = -C_y = -18$ kN. Ahora podemos regresar a los

diagramas de cuerpo libre de los elementos ABC y GED para determinar A_y y G_y. Sumando momentos respecto al punto B del elemento ABC,

$$\Sigma M_{(\text{punto } B)} = -(1)A_y + (2)C_y - (2)(6) = 0,$$

obtenemos $A_y = 2C_y - 12 = 24$ kN. Luego, sumando momentos respecto al punto E del elemento GED,

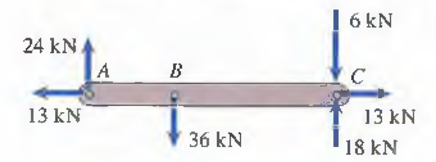
$$\Sigma M_{(\text{punto } E)} = (1)D_y - (1)G_y = 0,$$

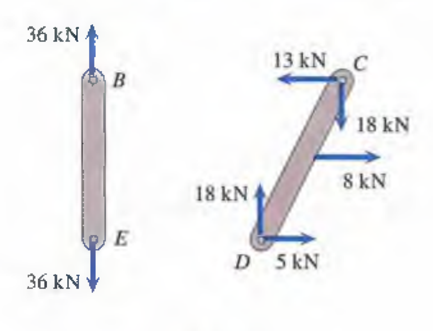
obtenemos $G_y = D_y = -18$ kN. Por último, en el diagrama de cuerpo libre del elemento GED usamos la ecuación de equilibrio

$$\Sigma F_y = D_y + G_y + T = 0,$$

que nos da el resultado $T = -D_y - G_y = 36$ kN. Las fuerzas sobre los elementos se muestran en la figura 6.35. A menudo se pueden identificar errores al presentar las fuerzas de esta manera, y confirmar así que cada elemento está en equilibrio.

Como lo demuestra este ejemplo, la determinación de las fuerzas en los elementos se puede simplificar si se escoge con cuidado el orden en que se resuelven las ecuaciones de equilibrio.





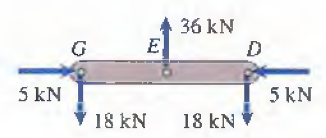


Figura 6.35
Fuerzas sobre los elementos del bastidor.

En los siguientes ejemplos determinamos las fuerzas y los pares sobre los elementos de un bastidor y una máquina. Se requieren dos pasos:

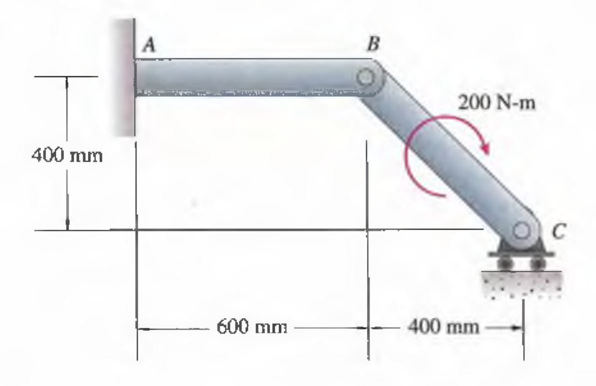
1. Determinar las reacciones en los soportes. *Dibuje el diagrama de cuerpo libre de la estructura completa y determine las reacciones en los soportes. Este paso puede simplificar en forma considerable el análisis de los elementos. Si el diagrama de cuerpo libre es estáticamente indeterminado, determine tantas reacciones como sea posible.*

2. Analizar los elementos. *Dibuje los diagramas de cuerpo libre de los elementos y aplique las ecuaciones de equilibrio para determinar las fuerzas que actúan sobre ellos. Este paso se puede simplificar identificando los miembros de dos fuerzas. Si una carga actúa sobre una junta de la estructura, se puede colocar la carga en el diagrama de cuerpo libre de cualquier elemento unido a esa junta.*

Ejemplo 6.6

El bastidor de la figura 6.36 está sometido a un par de 200 N-m. Determine las fuerzas y los pares sobre sus elementos.

Figura 6.36



SOLUCIÓN

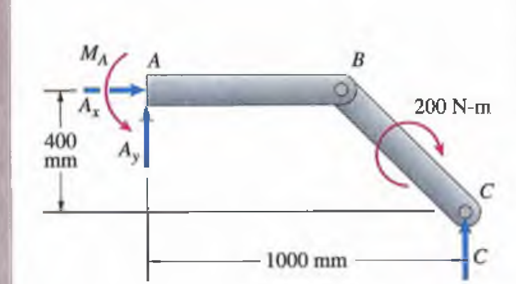
Determinar las reacciones en los soportes En la figura (a) dibujamos el diagrama de cuerpo libre de todo el bastidor. El término M_A es el par ejercido por el empotramiento. De las ecuaciones de equilibrio

$$\Sigma F_x = A_x = 0,$$

$$\Sigma F_y = A_y + C = 0,$$

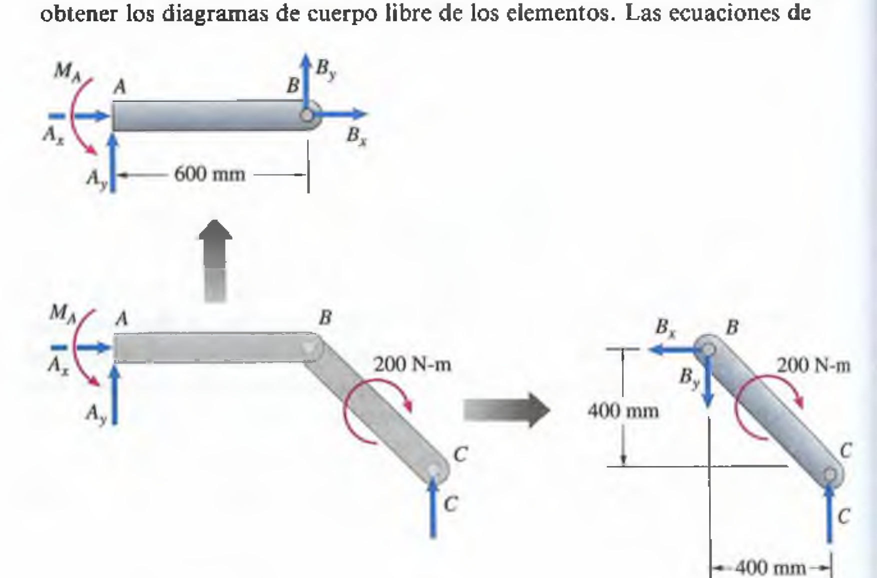
$$\Sigma M_{(\text{punto } A)} = M_A - 200 + (1)C = 0,$$

obtenemos la reacción $A_x = 0$. De este diagrama de cuerpo libre no podemos determinar A_y, M_A o C.



(a) Diagrama de cuerpo libre del bastidor completo.

Analizar los elementos En la figura (b) "desarmamos" el bastidor para obtener los diagramas de cuerpo libre de los elementos. Las ecuaciones de



(b) Obtención de los diagramas de cuerpo libre de las barras.

equilibrio para el elemento BC son

$$\Sigma F_x = -B_x = 0,$$

$$\Sigma F_y = -B_y + C = 0,$$

$$\Sigma M_{(\text{punto } B)} = -200 + (0.4)C = 0,$$

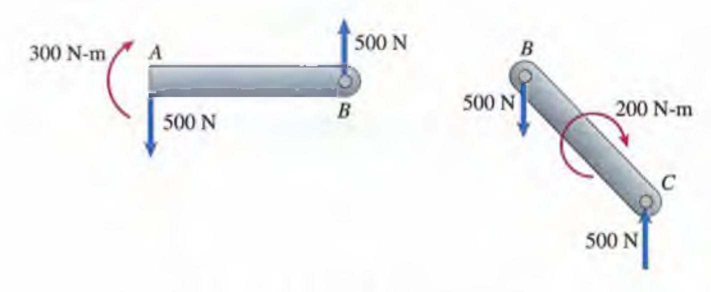
Resolviendo estas ecuaciones obtenemos, $B_x = 0$, $B_y = 500$ N y $C = 500$ N. Las ecuaciones de equilibrio para el elemento AB son

$$\Sigma F_x = A_x + B_x = 0,$$

$$\Sigma F_y = A_y + B_y = 0,$$

$$\Sigma M_{(\text{punto } A)} = M_A + (0.6)B_y = 0,$$

Como ya conocemos A_x, B_x y B_y, podemos despejar A_y y a M_A de estas ecuaciones. Los resultados son $A_y = -500$ N y $M_A = -300$ N-m. Esto completa la solución (Fig. c).



(c) Fuerzas y pares sobre las barras.

COMENTARIOS

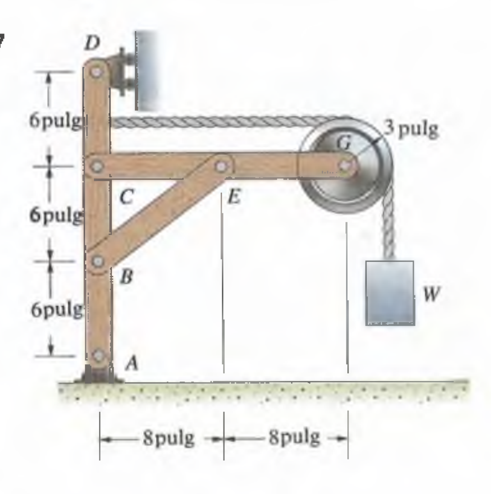
Pudimos resolver las ecuaciones de equilibrio para el elemento BC sin tener que considerar el diagrama de cuerpc libre del elemento AB. Resolvimos así las ecuaciones de equilibrio para el elemento AB. Analizando primero los elementos con menos incógnitas, suele ser posible resolverlos en forma secuencial, aunque en algunos casos se tendrán que resolver simultáneamente las ecuaciones de equilibrio de los elementos.

Aunque no pudimos determinar las reacciones A_x, A_y, M_A y C con las tres ecuaciones de equilibrio obtenidas del diagrama de cuerpo libre del bastidor completo, pudimos determinarlas con los diagramas de cuerpo libre de los elementos individuales. Dibujando diagramas de cuerpo libre de los elementos ganamos tres ecuaciones, ya que obtuvimos tres ecuaciones de equilibrio de cada elemento, pero sólo dos nuevas incógnitas, B_x y B_y.

Ejemplo 6.7

El bastidor de la figura 6.37 soporta un peso suspendido $W = 40$ lb. Determine las fuerzas en los elementos $ABCD$ y CEG.

Figura 6.37



SOLUCIÓN

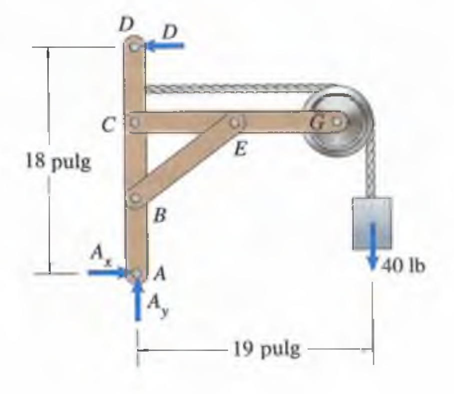
Determinar las reacciones en los soportes En la figura (a) dibujamos el diagrama de cuerpo libre de todo el bastidor. De las ecuaciones de equilibrio

$$\Sigma F_x = A_x - D = 0,$$

$$\Sigma F_y = A_y - 40 = 0,$$

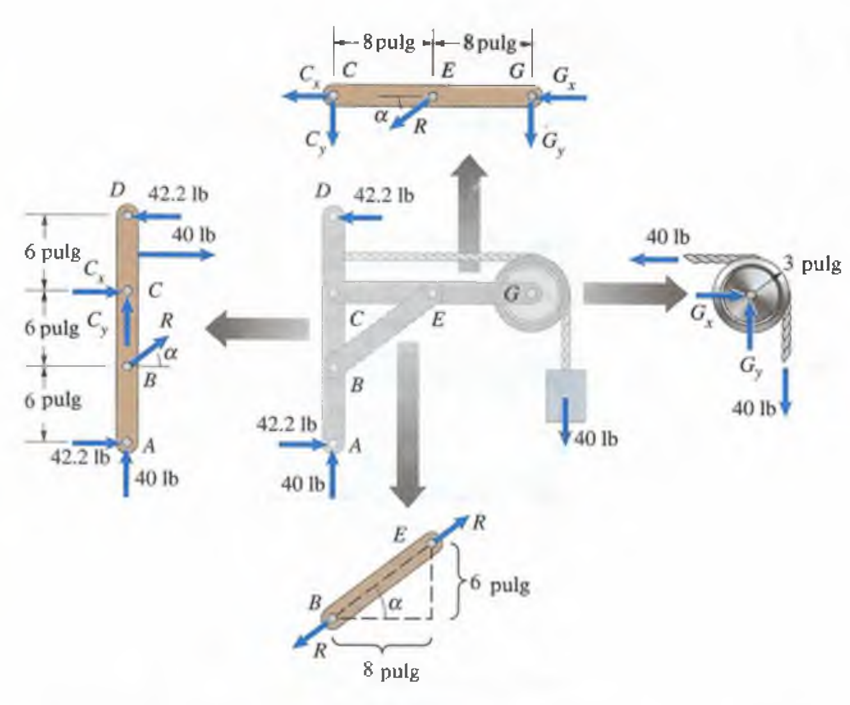
$$\Sigma M_{(\text{punto } A)} = (18)D - (19)(40) = 0,$$

obtenemos las reacciones $A_x = 42.2$ lb, $A_y = 40$ lb y $D = 42.2$ lb.



(a) Diagrama de cuerpo libre del bastidor completo.

Analizar los elementos En la figura (b) obtenemos los diagramas de cuerpo libre de los elementos. Observe que BE es un miembro de dos fuerzas. El ángulo $\alpha = \arctan(6/8) = 36.9°$.



(b) Obtención de los diagramas de cuerpo libre de las barras.

El diagrama de cuerpo libre de la polea tiene sólo dos fuerzas desconocidas. De las ecuaciones de equilibrio

$$\Sigma F_x = G_x - 40 = 0,$$

$$\Sigma F_y = G_y - 40 = 0,$$

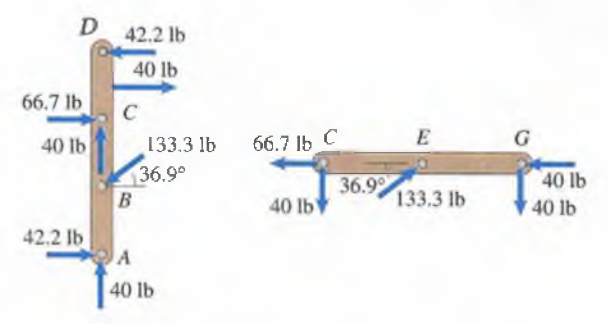
obtenemos $G_x = 40$ lb y $G_y = 40$ lb. Hay ahora sólo tres fuerzas desconocidas en el diagrama de cuerpo libre del elemento *CEG*. De las ecuaciones de equilibrio

$$\Sigma F_x = -C_x - R \cos \alpha - 40 = 0,$$

$$\Sigma F_y = -C_y - R \operatorname{sen} \alpha - 40 = 0,$$

$$\Sigma M_{(\text{punto } C)} = -(8)R \operatorname{sen} \alpha - (16)40 = 0,$$

obtenemos $C_x = 66.7$ lb, $C_y = 40$ lb y $R = -133.3$ lb, lo que completa la solución (Fig. c).

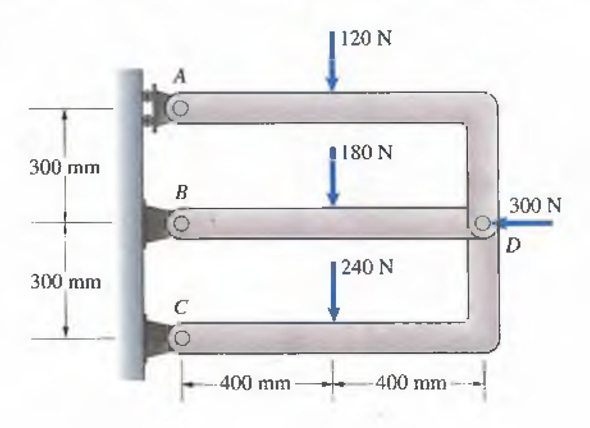


(c) Fuerzas sobre las barras *ABCD* y *CEG*.

Ejemplo 6.8

Determine las fuerzas en los elementos del bastidor de la figura (6.38).

Figura 6.38

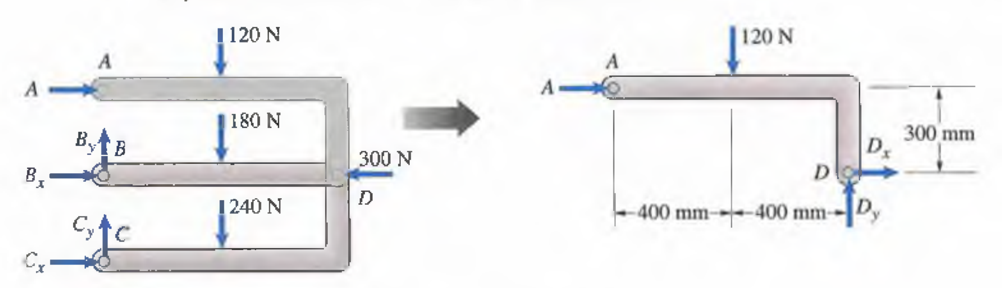


ESTRATEGIA

Se verifica que no se puede obtener ninguna información del diagrama de cuerpo libre de todo el bastidor. Para analizar los elementos, debemos enfrentarnos a una situación interesante que se presenta en la junta D, donde actúa una carga y están conectados tres elementos. Obtendremos los diagramas de cuerpo libre de los elementos aislando el elemento AD y separando los elementos BD y CD.

SOLUCIÓN

Analizar los elementos Primero aislamos el elemento AD del resto de la estructura introduciendo las reacciones D_x y D_y (Fig. a). Luego separamos los elementos BD y CD introduciendo fuerzas iguales y opuestas E_x y E_y (Fig. b). En este paso podríamos haber colocado la carga de 300 N y las fuerzas D_x y D_y en cualquiera de los diagramas de cuerpo libre.



(a) Barra AD aislada.

Sólo tres fuerzas desconocidas actúan sobre el elemento AD. De las ecuaciones de equilibrio

$$\Sigma F_x = A + D_x = 0,$$

$$\Sigma F_y = D_y - 120 = 0,$$

$$\Sigma M_{(\text{punto } D)} = -(0.3)A + (0.4)(120) = 0,$$

obtenemos $A = 160$ N, $D_x = -160$ N y $D_y = 120$ N. Ahora consideremos el diagrama de cuerpo libre del elemento BD. De la ecuación

$$\Sigma M_{(\text{punto } D)} = -(0.8)B_y + (0.4)(180) = 0,$$

obtenemos $B_y = 90$ N. Ahora, mediante la ecuación

$$\Sigma F_y = B_y - D_y + E_y - 180 = 90 - 120 + E_y - 180 = 0,$$

obtenemos $E_y = 210$ N. Conocida E_y, hay sólo tres fuerzas como incógnitas en el diagrama de cuerpo libre del elemento CD. De las ecuaciones de equilibrio

$$\Sigma F_x = C_x - E_x = 0,$$

$$\Sigma F_y = C_y - E_y - 240 = C_y - 210 - 240 = 0,$$

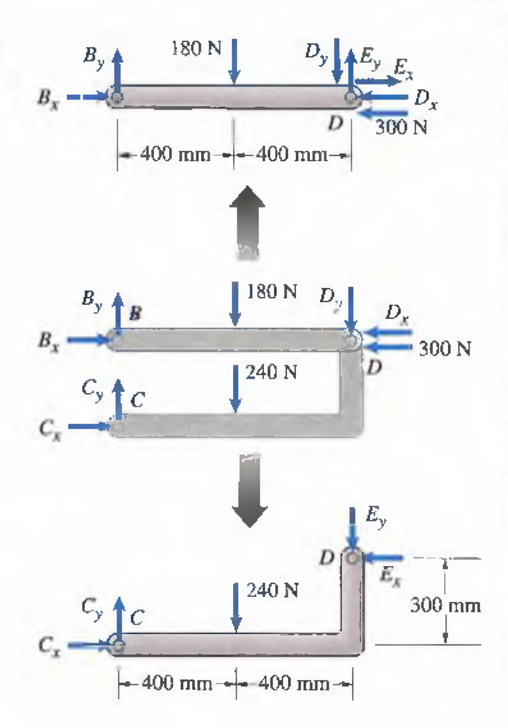
$$\Sigma M_{(\text{punto } C)} = (0.3)E_x - (0.8)E_y - (0.4)(240)$$

$$= (0.3)E_x - (0.8)(210) - (0.4)(240) = 0,$$

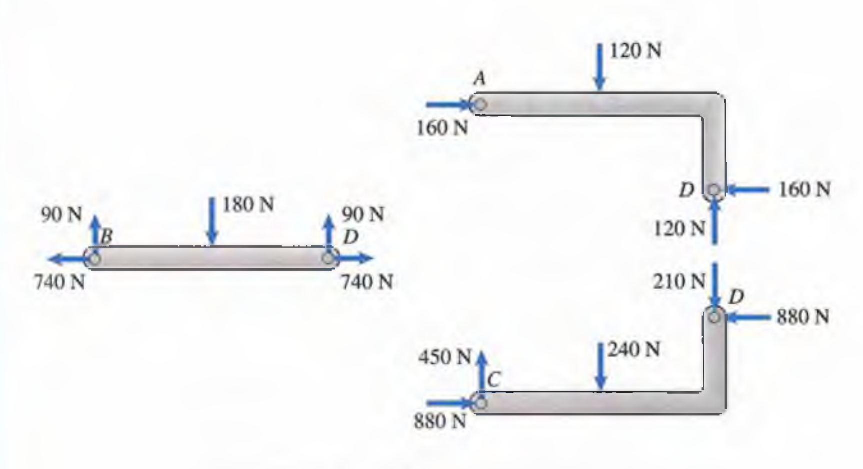
obtenemos $C_x = 880$ N, $C_y = 450$ N y $E_x = 880$ N. Por último, volvemos al diagrama de cuerpo libre del elemento BD y usamos la ecuación

$$\Sigma F_x = B_x + E_x - D_x - 300 = B_x + 880 + 160 - 300 = 0$$

para obtener $B_x = -740$ N, lo que completa la solución (Fig. c).



(b) Las barras BD y CD separadas.

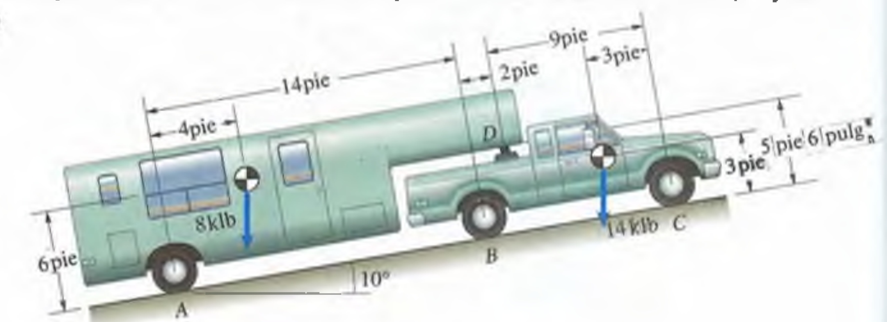


(c) Valores de las fuerzas en las barras.

Ejemplo 6.9

La camioneta de la figura 6.39 está estacionada en una pendiente de 10°. Sus frenos impiden que las ruedas en B giren, pero las ruedas en C y en A del remolque pueden girar libremente. La conexión en D se comporta como soporte de pasador. Determine las fuerzas ejercidas sobre la camioneta en B, C y D.

Figura 6.39



ESTRATEGIA

Podemos tratar este ejemplo como una estructura cuyos "elementos" son la camioneta y el remolque. Debemos aislarlos y dibujar sus diagramas de cuerpo libre para determinar las fuerzas que actúan sobre la camioneta.

SOLUCIÓN

Determinar las reacciones en los soportes Aquí las reacciones son las fuerzas ejercidas por el suelo sobre la camioneta y el remolque. En (a) dibujamos el diagrama de ambos enganchados. Como las ruedas en B están bloqueadas, el suelo ejerce una fuerza normal y una de fricción, pero en A y en C sólo hay fuerzas normales. Las ecuaciones de equilibrio son

$$\Sigma F_x = B_x - 8 \text{ sen } 10° - 14 \text{ sen } 10° = 0,$$

$$\Sigma F_y = A + B_y + C - 8 \cos 10° - 14 \cos 10° = 0,$$

$$\Sigma M_{(\text{punto } A)} = (14)B_y + (25)C + (6)(8 \text{ sen } 10°)$$

$$-(4)(8 \cos 10°) + (3)(14 \text{ sen } 10°)$$

$$-(22)(14 \cos 10°) = 0.$$

De la primera ecuación obtenemos la reacción $B_x = 3.82$ klb, pero no podemos resolver las otras dos para encontrar las tres reacciones A, B_y y C.

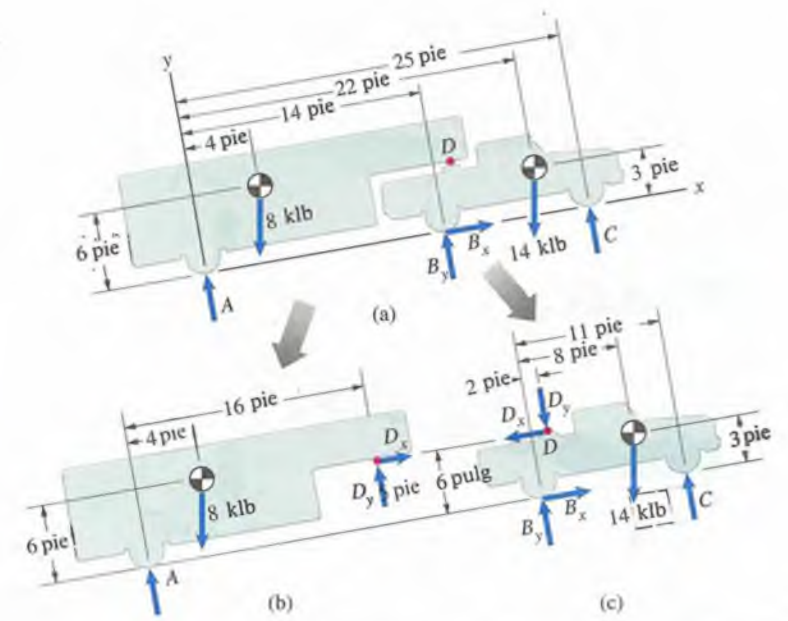
Analizar los elementos En (b) y (c) dibujamos los diagramas de cuerpo libre del remolque y de la camioneta, mostrando las fuerzas D_x y D_y ejercidas en la conexión del enganche. Sólo tres fuerzas desconocidas aparecen en el diagrama del remolque. De las ecuaciones de equilibrio del remolque,

$$\Sigma F_x = D_x - 8 \text{ sen } 10° = 0,$$

$$\Sigma F_y = A + D_y - 8 \cos 10° = 0,$$

$$\Sigma M_{(\text{punto } D)} = (0.5)(8 \text{ sen } 10°) + (12)(8 \cos 10°) - (16)A = 0,$$

obtenemos $A = 5.95$ klb, $D_x = 1.39$ klb y $D_y = 1.93$ klb. (Observe que



(a) Diagrama de cuerpo libre combinado del camión y el remolque.

(b), (c) Diagramas de cuerpo libre individuales.

sumando momentos respecto a D obtenemos una ecuación que contiene sólo una fuerza desconocida.)

Las ecuaciones de equilibrio para la camioneta son

$$\Sigma F_x = B_x - D_x - 14\,\text{sen}10^\circ = 0,$$

$$\Sigma F_y = B_y + C - D_y - 14\cos 10^\circ = 0,$$

$$\Sigma M_{(\text{punto } B)} = (11)C + (5.5)D_x - (2)D_y + (3)(14\,\text{sen}10^\circ)$$
$$-(8)(14\cos 10^\circ) = 0.$$

Sustituyendo los valores ya conocidos de D_x y D_y podemos resolver estas ecuaciones y obtener $B_x = 3.82$ klb, $B_y = 6.69$ klb y $C = 9.02$ klb.

COMENTARIO

No pudimos resolver dos de las ecuaciones de equilibrio para la camioneta y el remolque enganchados. Cuando eso sucede, se pueden usar las ecuaciones de equilibrio de toda la estructura para verificar los resultados:

$$\Sigma F_x = B_x - 8\,\text{sen}\,10^\circ - 14\,\text{sen}\,10^\circ$$
$$= 3.82 - 8\,\text{sen}\,10^\circ - 14\,\text{sen}\,10^\circ = 0,$$

$$\Sigma F_y = A + B_y + C - 8\cos 10^\circ - 14\cos 10^\circ$$
$$= 5.95 + 6.69 + 9.02 - 8\cos 10^\circ - 14\cos 10^\circ = 0,$$

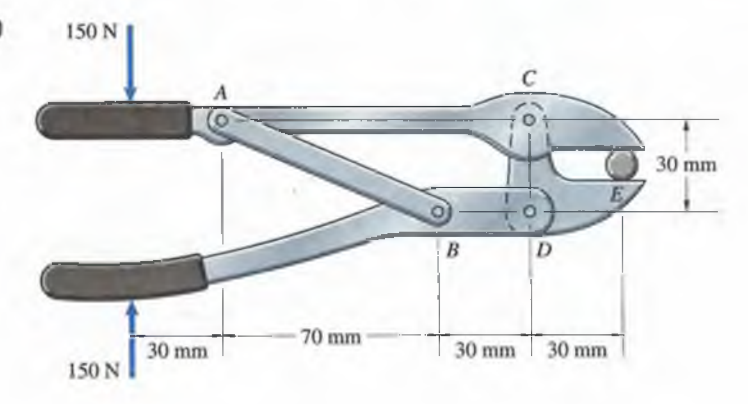
$$\Sigma M_{(\text{punto } A)} = (14)B_y + (25)C + (6)(8\,\text{sen}\,10^\circ)$$
$$-(4)(8\cos 10^\circ) + (3)(14\,\text{sen}10^\circ) - (22)(14\cos 10^\circ)$$

$$= (14)(6.69) + (25)(9.02) + (6)(8\,\text{sen}\,10^\circ)$$
$$-(4)(8\cos 10^\circ) + (3)(14\,\text{sen}10^\circ)$$
$$-(22)(14\cos 10^\circ) = 0.$$

Ejemplo 6.10

¿Qué fuerzas se ejercen sobre el perno en E de la figura 6.40 como resultado de las fuerzas de 150 N sobre las tenazas?

Figura 6.40



ESTRATEGIA

Un par de tenazas es un ejemplo de una máquina simple, es decir, una estructura diseñada para moverse y ejercer fuerzas. Las interconexiones de los elementos están diseñadas para obtener una ventaja mecánica, sometiendo un objeto a fuerzas mayores que las ejercidas por el usuario.

En este caso no se puede obtener información del diagrama de cuerpo libre de la estructura entera. Debemos determinar las fuerzas ejercidas sobre el perno dibujando diagramas de cuerpo libre de sus elementos.

SOLUCIÓN

Analizar los elementos En la figura (a) "desarmamos" las tenazas para obtener los diagramas de cuerpo libre de los elementos etiquetados como (1), (2) y (3). En los diagramas de cuerpo libre (1) y (3), la fuerza R es ejercida por el miembro AB de dos fuerzas. El ángulo $\alpha = \arctan(30/70) = 23.2°$. Nuestro objetivo es determinar la fuerza E ejercida por el perno.

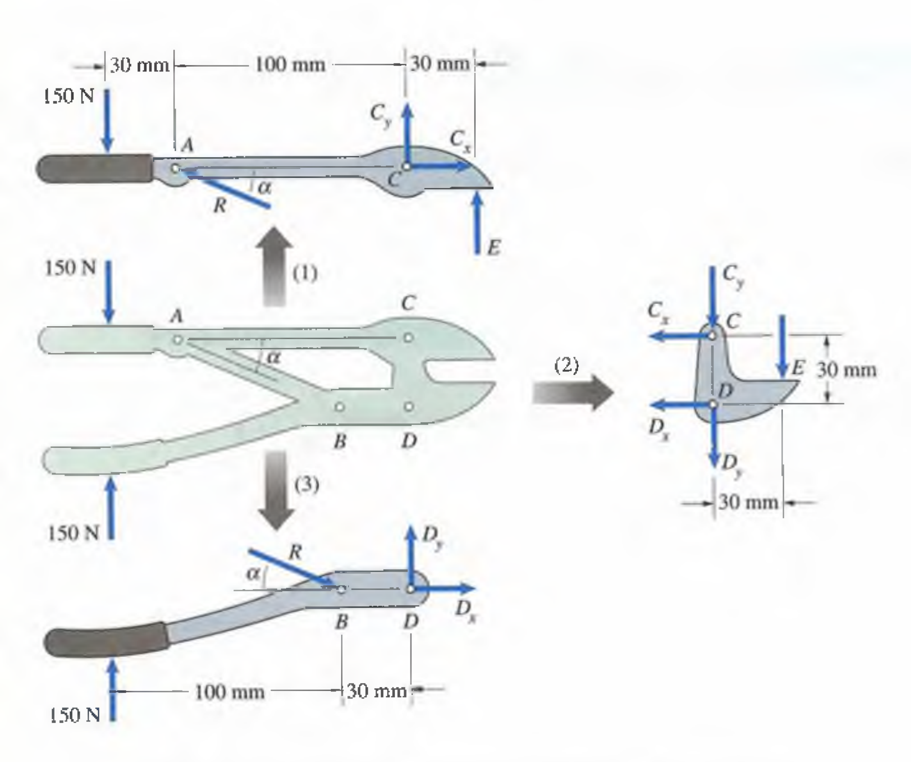
El diagrama de cuerpo libre del elemento (3) tiene sólo tres fuerzas desconocidas y la carga de 150 N, por lo que podemos determinar R, D_x y D_y tan sólo de este diagrama de cuerpo libre. Las ecuaciones de equilibrio son

$$\Sigma F_x = D_x + R\cos\alpha = 0,$$

$$\Sigma F_y = D_y - R\,\text{sen}\,\alpha + 150 = 0,$$

$$\Sigma M_{(\text{punto } B)} = (30)D_y - (100)(150) = 0.$$

Resolviendo estas ecuaciones obtenemos $D_x = -1517$ N, $D_y = 500$ N y $R = 1650$ N.



(a) Obtención de los diagramas de cuerpo libre de las barras.

Conociendo D_x podemos determinar E a partir del diagrama de cuerpo libre del elemento (2) sumando momentos respecto a C,

$$\Sigma M_{(\text{punto } C)} = -(30)E - (30)D_x = 0.$$

La fuerza ejercida por las tenazas sobre el perno es $E = -D_x = 1517$ N. La ventaja mecánica de las tenazas es (1517 N)/(150 N) = 10.1.

COMENTARIO

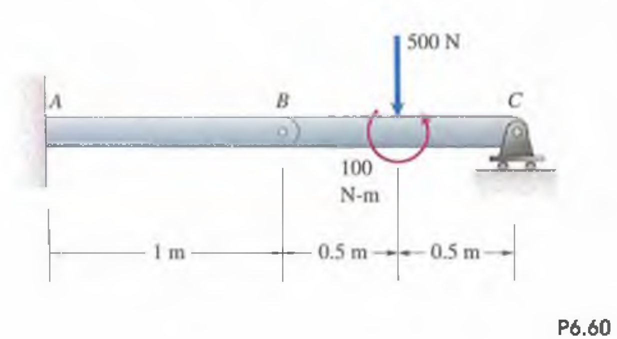
Observe que no tuvimos que usar el diagrama de cuerpo libre del elemento (1) para determinar E. Cuando esto sucede, se puede usar el diagrama de cuerpo libre "no utilizado" para verificar los resultados. Usando los resultados obtenidos para R y E, podemos verificar que la suma de los momentos respecto al punto C del elemento (1) es cero:

$$\Sigma M_{(\text{punto } C)} = (130)(150) - (100)R \text{ sen } \alpha + (30)E$$

$$= (130)(150) - (100)(1650) \text{ sen } 23.2^\circ + (30)(1517) = 0.$$

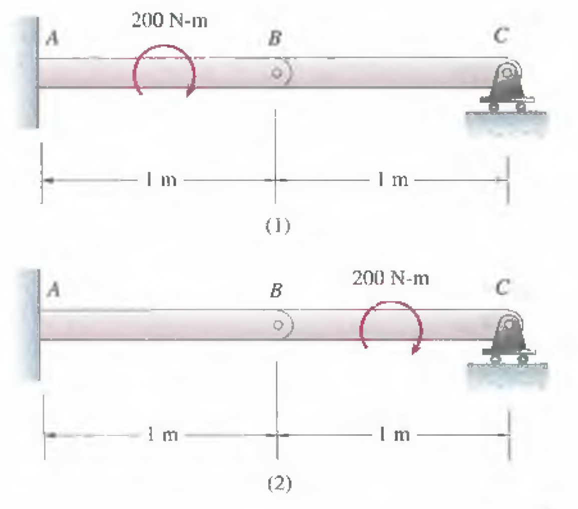
Problemas

6.60 Con respecto a la figura P6.60, dibuje el diagrama de cuerpo libre de (a) el bastidor completo; (b) los elementos individuales *AB* y *BC*. (c) Determine las fuerzas y los pares en el elemento *AB*.



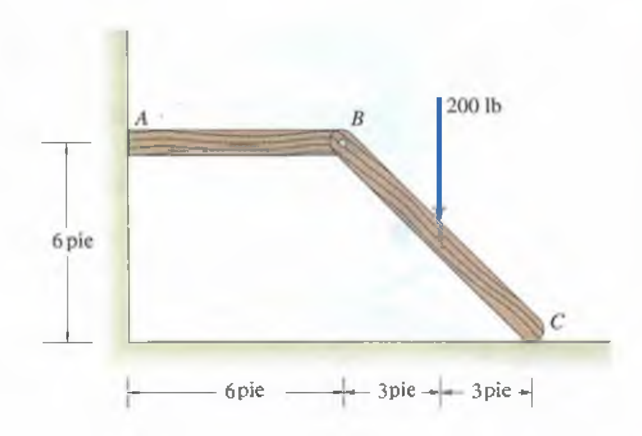
P6.60

6.61 (a) Determine las fuerzas y los pares sobre el elemento *AB* para los casos (1) y (2) de la figura P6.61.
(b) Usted sabe que el momento de un par es el mismo respecto a cualquier punto. Explique por qué las respuestas no son las mismas en los casos (1) y (2).



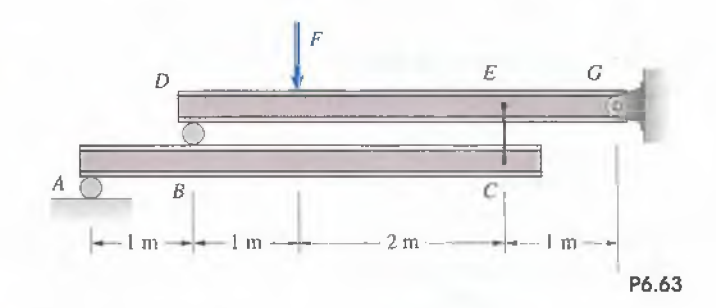
P6.61

6.62 En el bastidor mostrado, determine las reacciones en el empotramiento *A* y la fuerza ejercida sobre la estructura por el piso liso en *C*.



P6.62

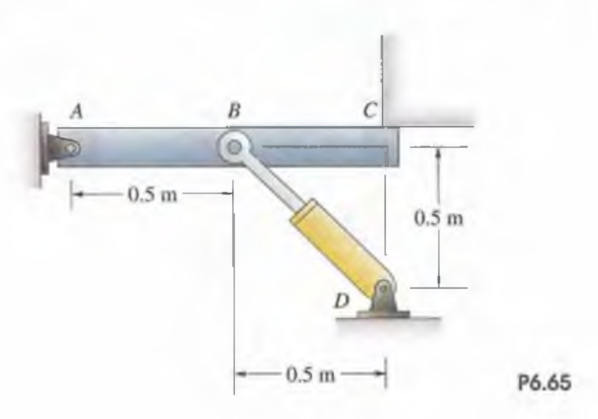
6.63 Se tiene la fuerza $F = 10$ kN. Determine las fuerzas sobre el elemento *ABC* mostrado, presentando sus respuestas como se ilustra en la figura 6.35.



P6.63

6.64 Considere el bastidor del problema 6.63. El cable *CE* resiste con seguridad una tensión de 10 kN. Con base en este criterio, ¿cuál es la máxima fuerza *F* dirigida hacia abajo que se puede aplicar al bastidor?

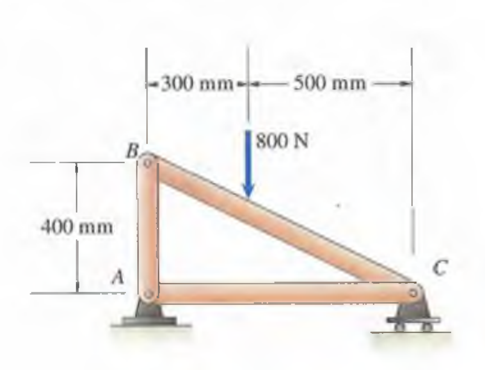
6.65 El actuador hidráulico BD mostrado ejerce una fuerza de 6 kN sobre el elemento ABC. La fuerza es paralela a BD y el actuador está a compresión. Determine las fuerzas en el elemento ABC y presente sus respuestas como se muestra en la figura 6.35.



P6.65

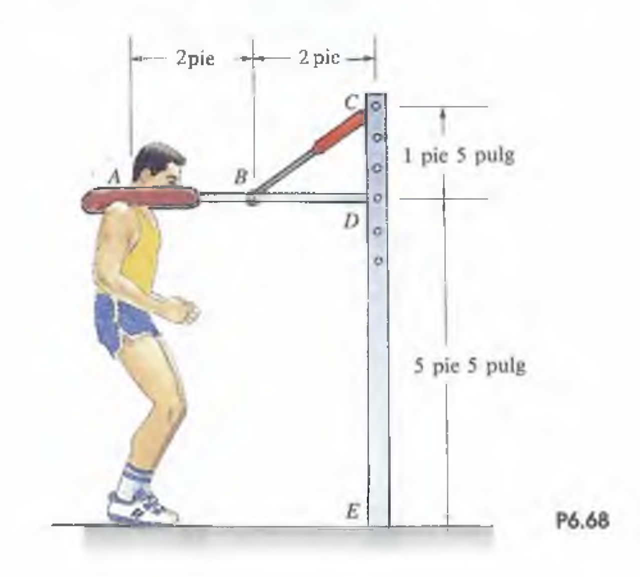
6.66 El gato hidráulico del problema 6.65 está diseñado para ejercer una fuerza vertical C. El actuador BD ejerce una fuerza sobre la viga ABC paralela a BD. La fuerza de elevación máxima que el gato puede ejercer está limitada por el soporte de pasador A, que soporta con seguridad una fuerza de 20 kN. ¿Cuál es la máxima fuerza de elevación que el gato puede ejercer en C, y cuál tiene la fuerza axial resultante en el actuador?

6.67 Determine las fuerzas sobre el elemento BC mostrado y la fuerza axial en el miembro AC.



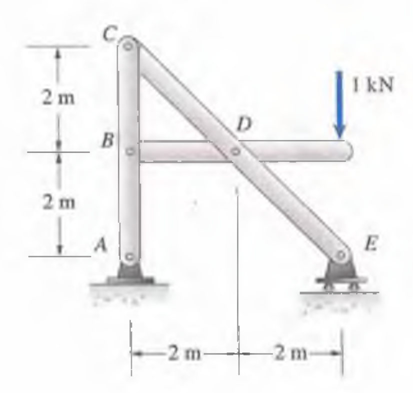
P6.67

6.68 Un gimnasta hace ejercicio con el aparato mostrado en la figura. Para girar la barra ABD debe ejercer una fuerza vertical en A tal que la fuerza axial en el elemento BC sea de 250 lb. Cuando la barra ABD está a punto de girar, ¿qué fuerza ejerce el gimnasta en A y qué fuerzas se ejercen sobre el elemento CDE en D?



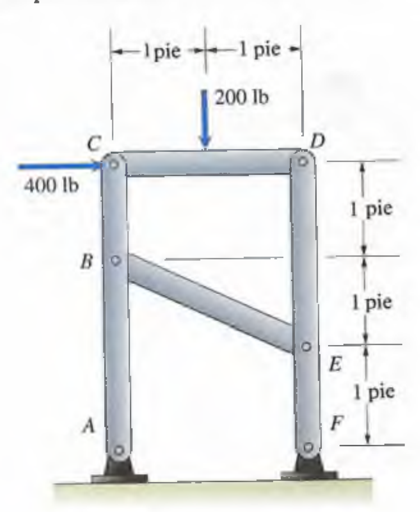
P6.68

6.69 El bastidor mostrado soporta una carga de 1 kN. Determine las fuerzas sobre el elemento CDE.



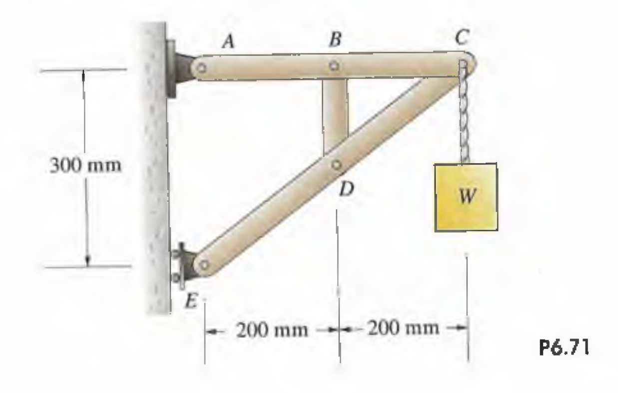
P6.69

6.70 Determine las fuerzas sobre el elemento ABC mostrado, presentando sus respuestas como se ilustra en la figura 6.35. Obtenga las respuestas de dos maneras:
(a) Cuando dibuje los diagramas de cuerpo libre de los elementos individuales, coloque la carga de 400 lb sobre el diagrama de cuerpo libre del elemento ABC.
(b) Cuando dibuje los diagramas de cuerpo libre de los elementos individuales, coloque la carga de 400 lb sobre el diagrama de cuerpo libre del elemento CD.



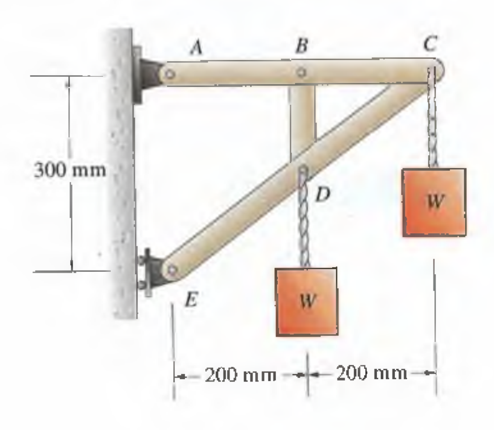
P6.70

6.71 Se tiene el peso $W = 12$ kN. Determine las fuerzas sobre el elemento ABC mostrado, presentando sus respuestas como se ilustra en la figura 6.35.



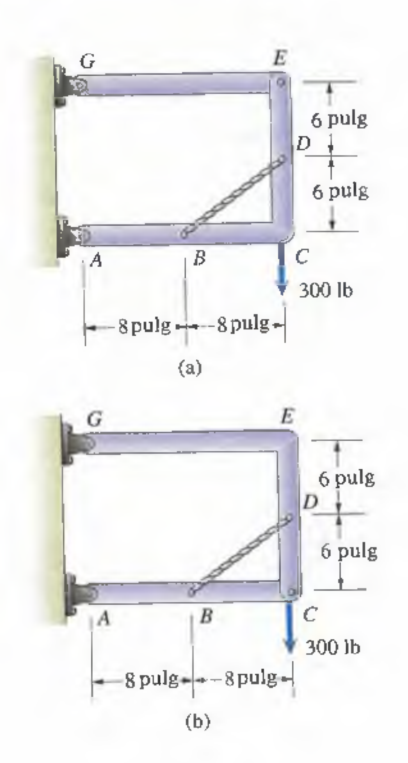
P6.71

6.72 Se tiene el peso $W = 12$ kN. Determine las fuerzas sobre el elemento ABC mostrado, presentando sus respuestas como se ilustra en la figura 6.35.



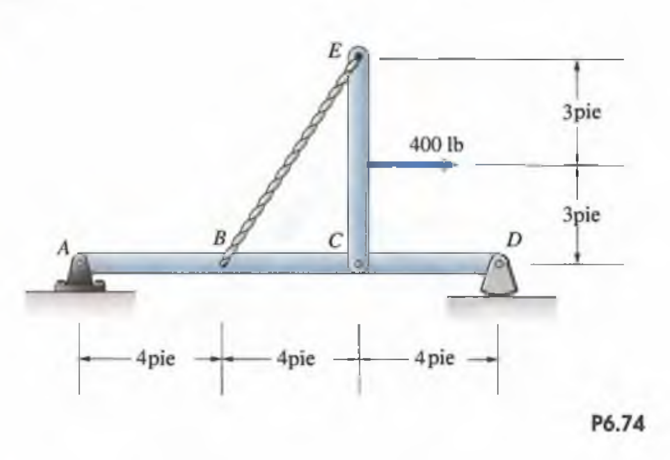
P6.72

6.73 La tensión en el cable BD mostrado es de 500 lb. Determine las reacciones en A para los casos (a) y (b).



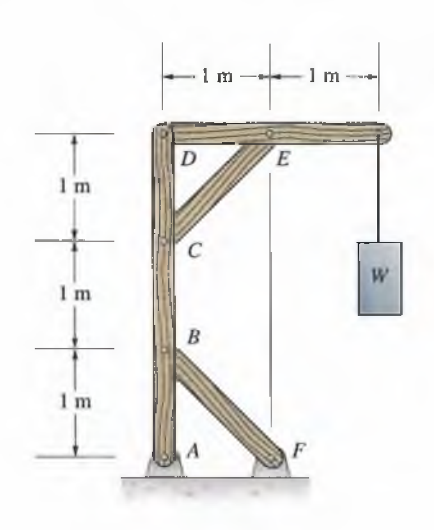
P6.73

6.74 Determine las fuerzas sobre el elemento *ABCD* mostrado, presentando sus respuestas como se ilustra en la figura 6.35.



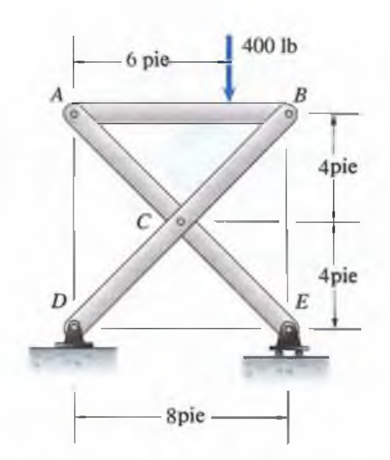
P6.74

6.75 El peso $W = 5$ kN. Determine las fuerzas sobre el elemento *ABCD* mostrado, presentando sus respuestas como se ilustra en la figura 6.35.



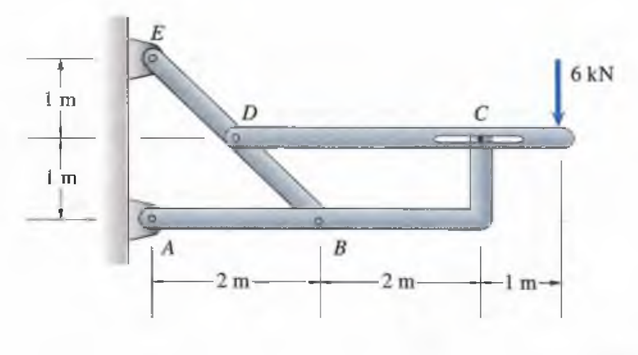
P6.75

6.76 Determine las fuerzas sobre el elemento *BCD* de la figura P6.76.



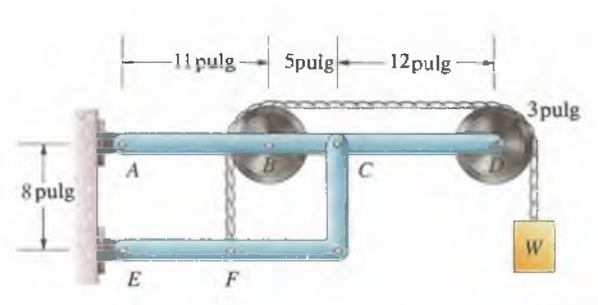
P6.76

6.77 Determine las fuerzas sobre el elemento *ABC* de la figura P6.77.



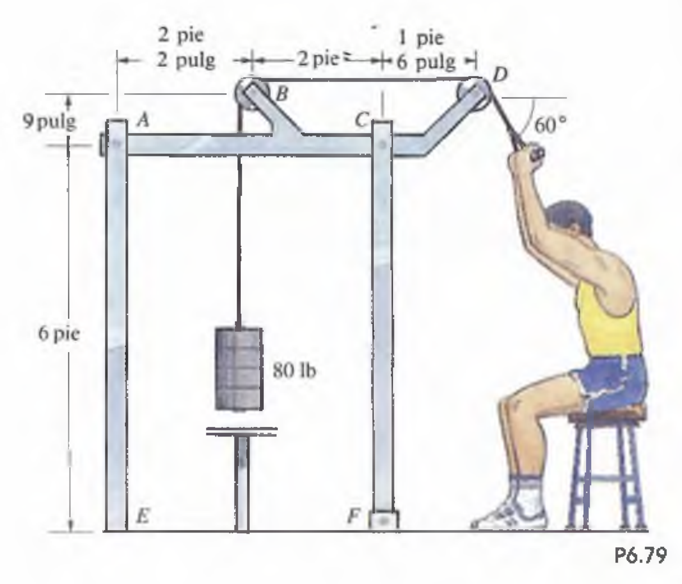
P6.77

6.78 Se tiene el peso $W = 80$ lb. Determine las fuerzas sobre el elemento $ABCD$ mostrado.



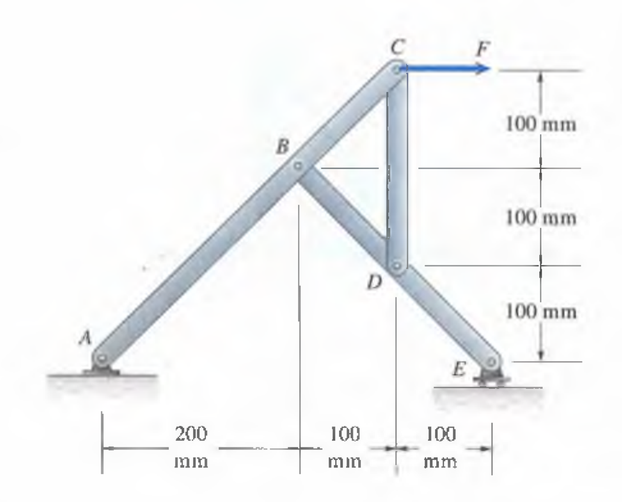
P6.78

6.79 Un gimnasta sostiene en reposo el peso de 80 lb en la posición mostrada. ¿Qué valor tienen las reacciones en el empotramiento E y en el soporte de pasador F? (A y C son conexiones de pasador.)



P6.79

6.80 Se tiene la fuerza $F = 800$ N. Determine las fuerzas sobre el elemento ABC de la figura.

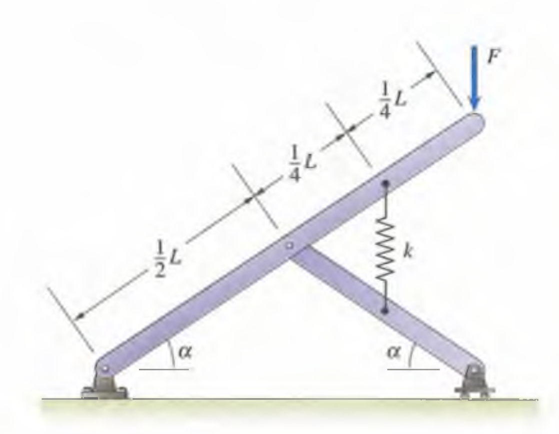


P6.80

6.81 Considere el bastidor del problema 6.80. El elemento CD resiste con seguridad una fuerza axial a compresión de 2 kN. Con base en este criterio, ¿cuál es la fuerza máxima F que el bastidor puede soportar?

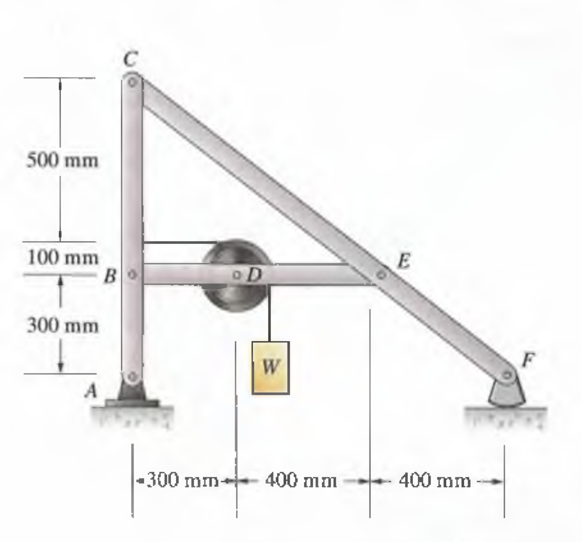
6.82 La longitud del resorte sin estirar es L_0. Demuestre que cuando el sistema está en equilibrio, el ángulo α satisface la relación

$$\text{sen}\ \alpha = 2(L_0 - 2F/k)/L.$$



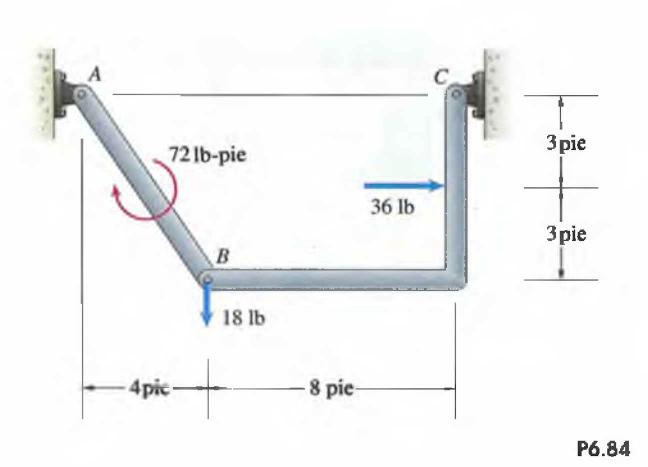
P6.82

6.83 En la figura P6.83, el soporte de pasador en A resiste con seguridad una fuerza de 24 kN. Con base en este criterio, ¿cuál es el peso W máximo que el bastidor puede soportar?



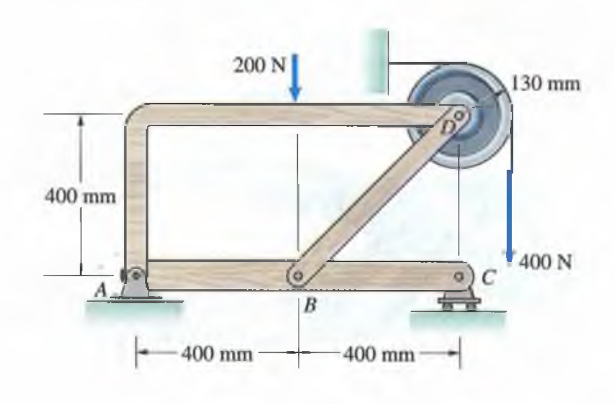
P6.83

6.84 Determine las reacciones en A y C de la figura P6.84.



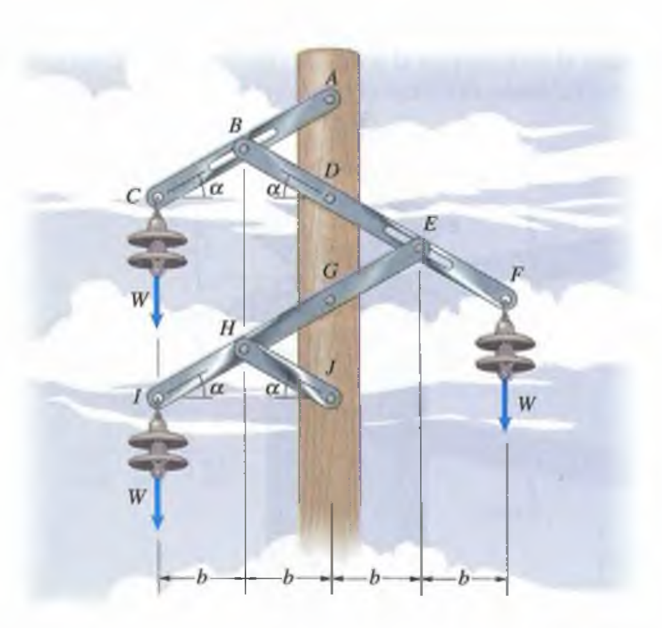
P6.84

6.85 Determine las fuerzas sobre el elemento AD de la figura.



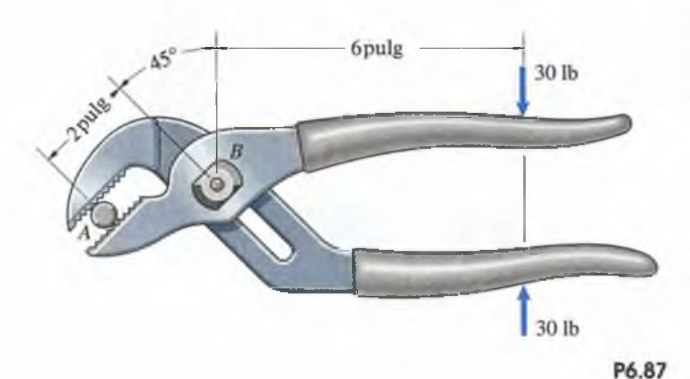
P6.85

6.86 El bastidor mostrado se usa para soportar cables de alta tensión. Si b = 3 pies, α = 30° y W = 200 lb, ¿qué valor tiene la fuerza axial en el elemento HJ?



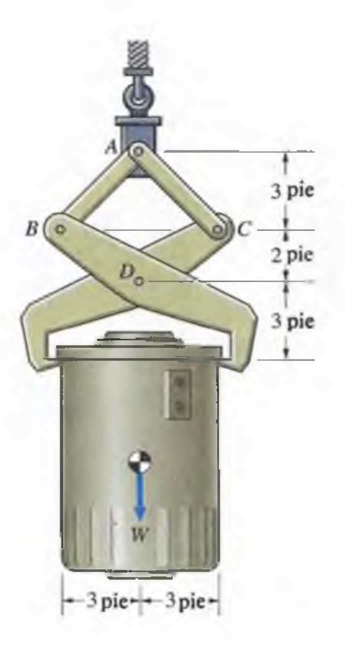
P6.86

6.87 En la figura P6.87, ¿cuáles son las magnitudes de las fuerzas ejercidas por las tenazas sobre el perno en A cuando las fuerzas de 30 lb se aplican como se muestra? (B es una conexión de pasador.)



P6.87

6.88 Se tiene el peso $W = 60$ klb. ¿Cuál es la magnitud de la fuerza que los elementos ejercen entre sí en el punto D de la figura?

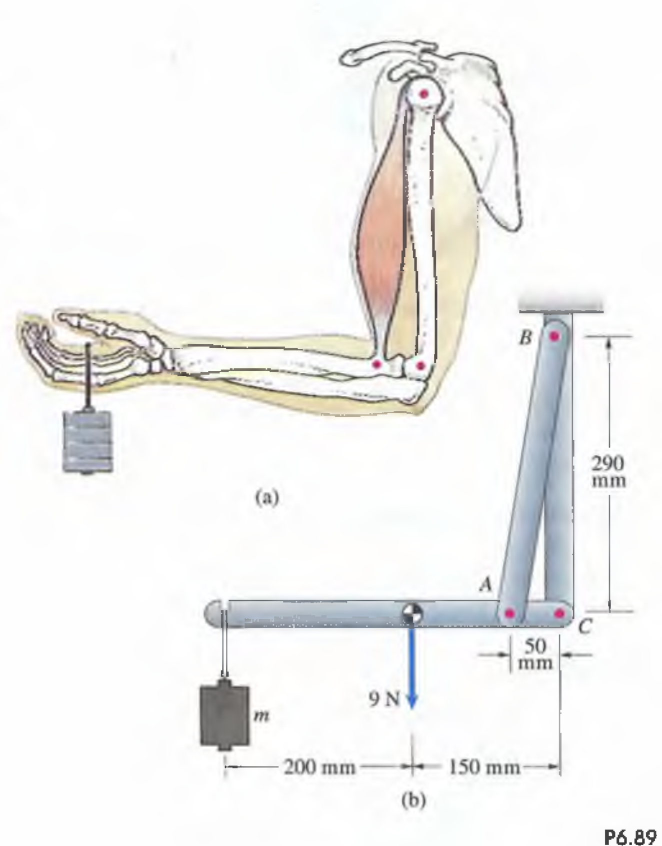


P6.88

6.89 La figura (a) es un diagrama de los huesos y el bíceps del brazo de una persona que soporta una masa. La tensión en el bíceps mantiene el antebrazo en posición horizontal, como se ilustra en el sencillo modelo mecánico de la figura (b). El peso del antebrazo es de 9 N y la masa $m = 2$ kg.

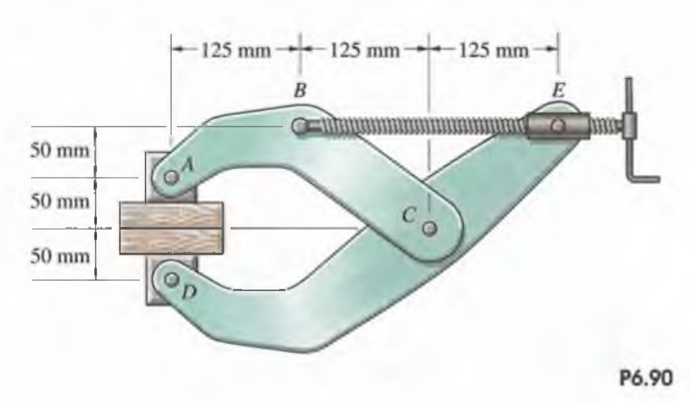
(a) Determine la tensión en el bíceps AB.

(b) Determine la magnitud de la fuerza ejercida sobre la parte superior del brazo por el antebrazo en la junta C del codo.



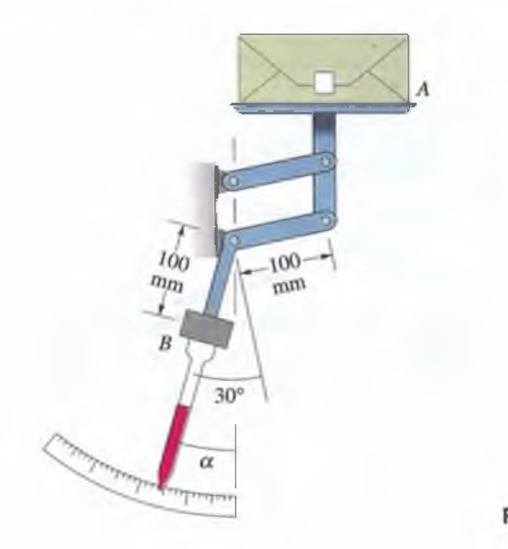
P6.89

6.90 La abrazadera mostrada comprime dos bloques de madera. Determine la magnitud de la fuerza que las barras ejercen entre sí en C cuando los bloques están comprimidos con una fuerza de 200 N.



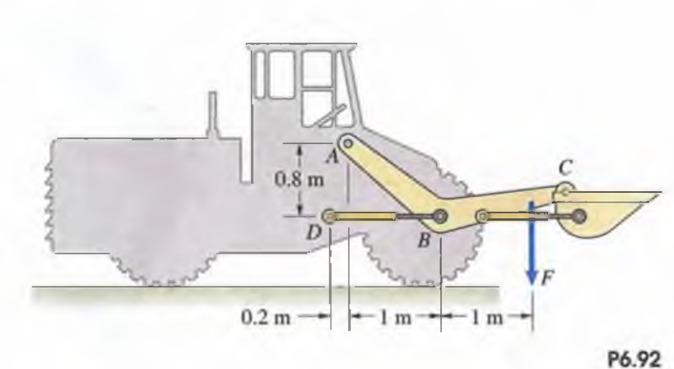
P6.90

6.91 El mecanismo mostrado se usa para pesar pequeños bultos de correo. Al colocar un paquete en A la aguja lastrada gira un ángulo α. Desprecie el peso de las barras pero no el contrapeso en B, el cual tiene una masa de 4 kg. Si $\alpha = 20°$, ¿qué masa tiene el paquete en A?



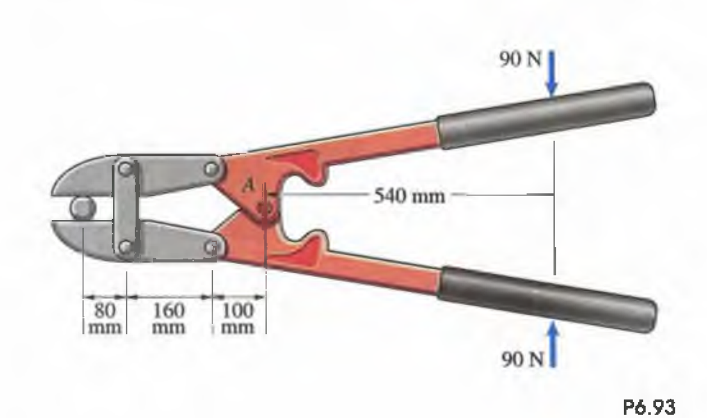
P6.91

6.92 El cucharón C del cargador frontal está soportado por dos brazos idénticos, uno a cada lado del cargador. Se muestra uno de los dos brazos (ABC), el cual está soportado en A por un soporte de pasador y por el actuador hidráulico BD. La suma de las otras cargas ejercidas sobre el brazo, incluido su propio peso, es $F = 1.6$ kN. Determine la fuerza axial en el actuador BD y la magnitud de la reacción en A.



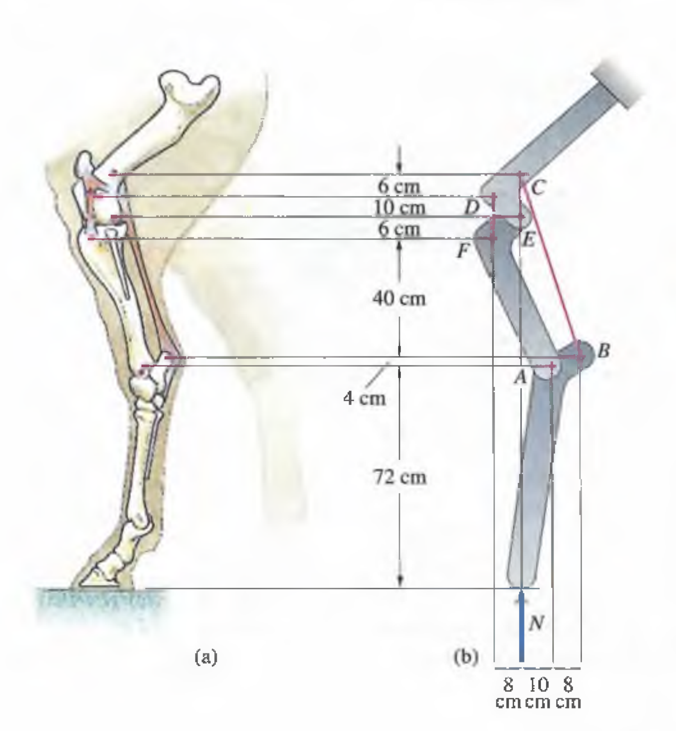
P6.92

6.93 Determine la fuerza ejercida sobre el perno por la máquina cortadora mostrada, así como la magnitud de la fuerza que sus barras ejercen entre sí en la conexión de pasador en A.



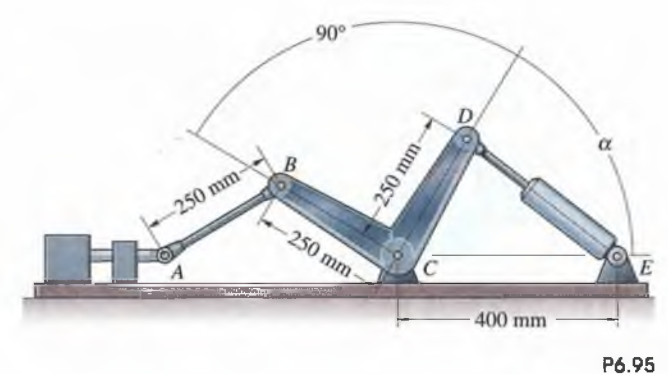
P6.93

6.94 En la figura (a) se muestran los huesos y los tendones de la pata de un caballo. En la figura (b) se muestra un modelo mecánico de la misma pata. Si el caballo está en reposo y la fuerza normal ejercida por el suelo sobre su pata es $N = 1200$ N, determine las tensiones en el músculo flexor digital superficial BC y en los ligamentos patelares DF.



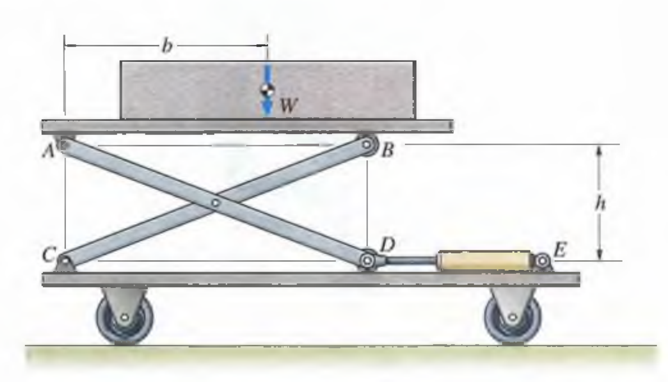

P6.94

6.95 El mecanismo mostrado en la figura está diseñado para ejercer una gran fuerza sobre la barra horizontal en A para una operación de estampado. Si el cilindro hidráulico DE ejerce una fuerza axial de 800 N y $\alpha = 80°$, ¿qué fuerza horizontal se ejerce sobre la barra horizontal en A?



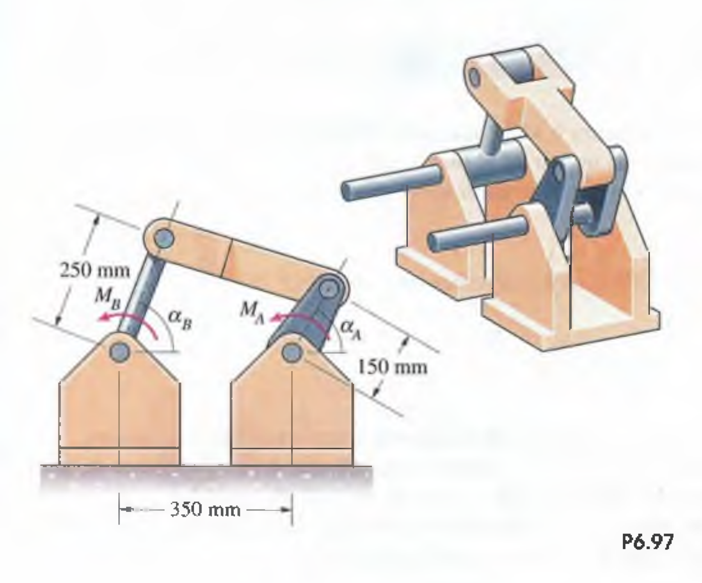
P6.95

6.96 El mecanismo mostrado levanta una carga W al extenderse el actuador hidráulico DE. Las barras AD y BC tienen 2 m de largo y las distancias son $b = 1.4$ m y $h = 0.8$ m. Si W = 4 kN, ¿qué fuerza debe ejercer el actuador DE para mantener la carga en equilibrio?



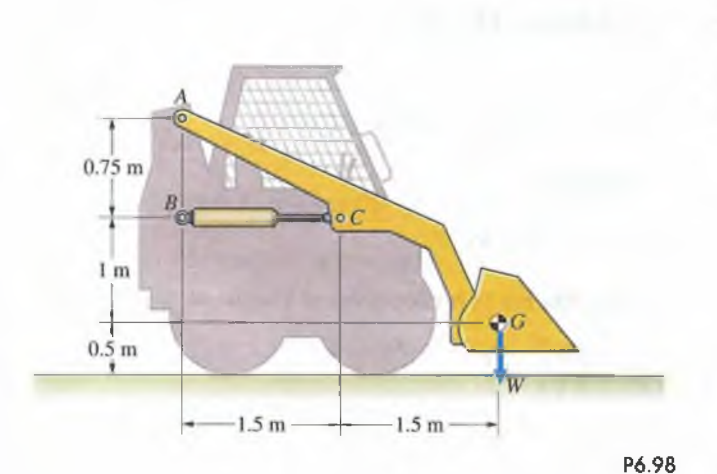
P6.96

6.97 El eslabonamiento está en equilibrio bajo la acción de los pares M_A y M_B. Si $\alpha_A = 60°$ y $\alpha_B = 70°$, ¿qué valor tiene la razón M_A/M_B?



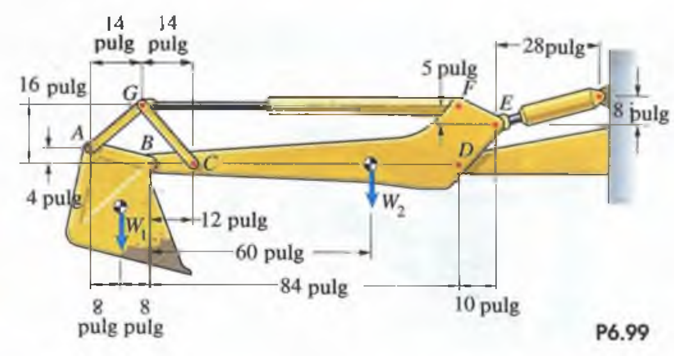
P6.97

6.98 La mitad de la carga $W = 4$ kN del cargador frontal de la figura está soportada por el elemento ACG y por el actuador hidráulico BC. Determine las reacciones en A y la fuerza axial a compresión en el actuador BC.



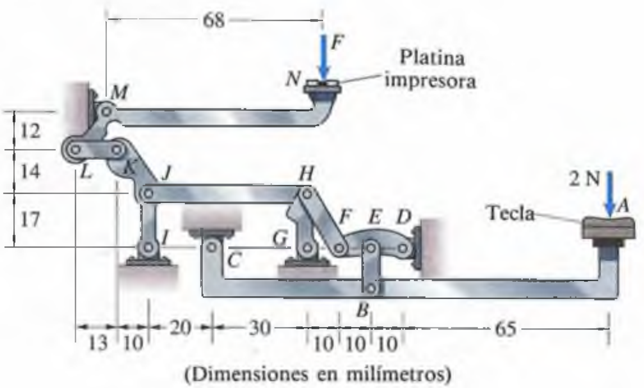
P6.98

6.99 Se tienen los pesos $W_1 = 1500$ lb y $W_2 = 2000$ lb. Determine las fuerzas sobre el elemento BCD en los puntos B y D de la figura.



P6.99

6.100 El mecanismo de la máquina de escribir mostrado está en equilibrio bajo la acción de la fuerza de 2 N sobre la tecla en A y la fuerza F sobre la barra impresora en N. Determine la fuerza F y las reacciones en D, I y M.



P6.100

Ejemplos con computador

Los siguientes problemas y el ejemplo están diseñados para resolverse con ayuda de una calculadora programable o un computador.

Ejemplo 6.11

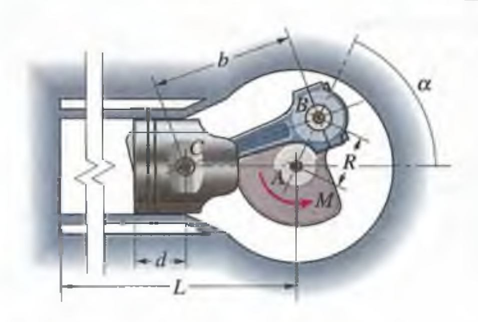


Figura 6.41

El dispositivo de la figura 6.41 se usa para comprimir aire en un cilindro mediante la aplicación de un par M al brazo AB. La presión p en el cilindro y la fuerza neta F ejercida por la presión sobre el émbolo son

$$p = p_{\text{atm}}\left(\frac{V_0}{V}\right),$$

$$F = Ap_{\text{atm}}\left(\frac{V_0}{V} - 1\right),$$

donde $A = 0.02\ \text{m}^2$ es el área de la sección transversal del émbolo, $p_{\text{atm}} = 10^5$ Pa (Pascales, o N/m^2) es la presión atmosférica, V es el volumen de aire en el cilindro y V_0 es el valor de V cuando $\alpha = 0$. $R = 150$ mm, $b = 350$ mm, $d = 150$ mm y $L = 1050$ mm. Si M y α son inicialmente cero y M aumenta hasta alcanzar 40 N-m, ¿cuánto valen al final α y p?

ESTRATEGIA

Expresando el volumen de aire en el cilindro en función de α, calcularemos la fuerza ejercida sobre el cilindro por la presión en función de α. Del diagrama de cuerpo libre del émbolo obtendremos la fuerza axial en el miembro BC de dos fuerzas en función de la presión sobre el cilindro. Luego, del diagrama del brazo AB obtendremos una relación entre M y α.

SOLUCIÓN

De la geometría de los brazos AB y BC (Fig. a), el volumen de aire en el cilindro es

$$V = A\left(L - d - \sqrt{b^2 - R^2\text{sen}^2\alpha} + R\cos\alpha\right).$$

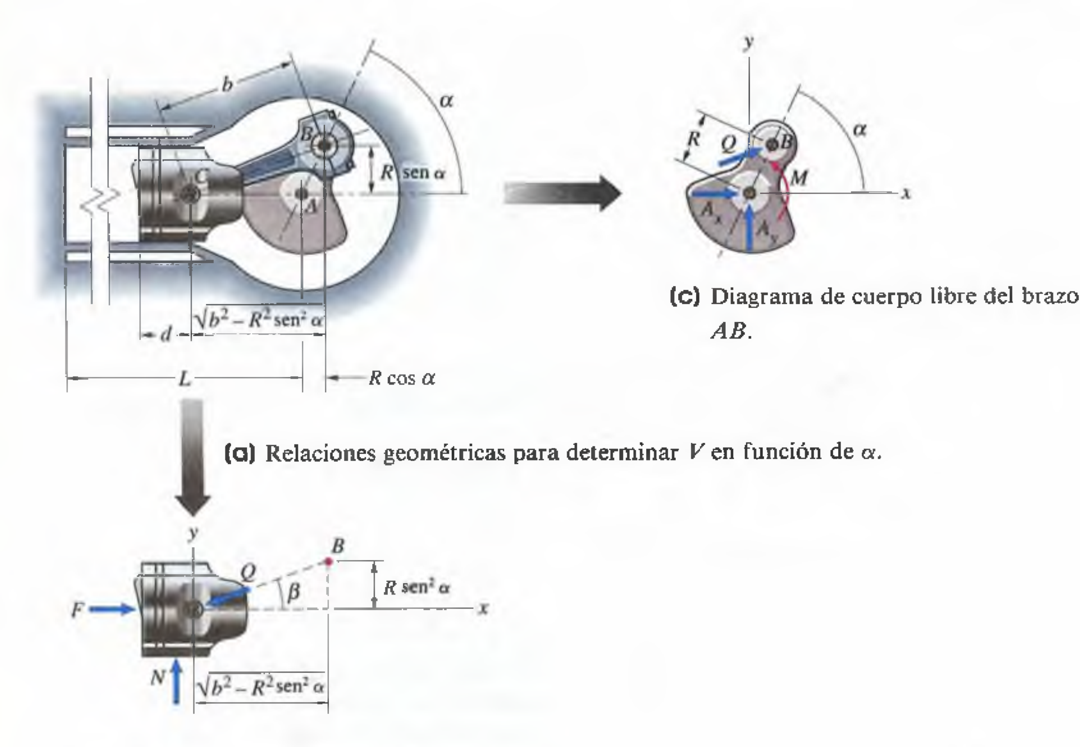
Cuando $\alpha = 0$, el volumen es

$$V_0 = A(L - d - b + R).$$

Por tanto, la fuerza ejercida por la presión sobre el émbolo es

$$\begin{aligned} F &= Ap_{\text{atm}}\left(\frac{V_0}{V} - 1\right) \\ &= Ap_{\text{atm}}\left[\left(\frac{L - d - b + R}{L - d - \sqrt{b^2 - R^2\text{sen}^2\alpha} + R\cos\alpha}\right) - 1\right]. \end{aligned}$$

En las figuras (b) y (c) dibujamos los diagramas de cuerpo libre del émbolo y el brazo AB, donde N es la fuerza ejercida sobre el émbolo por el cilindro (la fricción se ignora), Q es la fuerza axial en el miembro BC de dos fuerzas,



(c) Diagrama de cuerpo libre del brazo *AB*.

(a) Relaciones geométricas para determinar V en función de α.

(b) Diagrama de cuerpo libre del émbolo.

y A_x y A_y son las reacciones debidas al soporte de pasador A. De la figura (b) obtenemos la ecuación de equilibrio

$$\Sigma F_x = F - Q\cos\beta = 0,$$

donde

$$\beta = \arctan\left(\frac{R \operatorname{sen}\alpha}{\sqrt{b^2 - \quad \operatorname{sen}^2\alpha}}\right).$$

La fuerza ejercida sobre el brazo AB en B es

$$Q\cos\beta\,\mathbf{i} + Q\operatorname{sen}\beta\,\mathbf{j}.$$

El momento de esta fuerza respecto a A es

$$\mathbf{r}_{AB} \times (Q\cos\beta\mathbf{i} + Q\operatorname{sen}\beta\mathbf{j}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ R\cos\alpha & R\operatorname{sen}\alpha & 0 \\ Q\cos\beta & Q\operatorname{sen}\beta & 0 \end{vmatrix}$$

$$QR(\cos\alpha\operatorname{sen}\beta - \operatorname{sen}\alpha\cos\beta)\mathbf{k}.$$

Usando este resultado, la suma de los momentos respecto a A es

$$\Sigma M_{(\text{punto } A)} = M + QR(\cos\alpha\operatorname{sen}\beta - \operatorname{sen}\alpha\cos\beta) = 0.$$

Si escogemos un valor de α, podemos calcular sucesivamente V, F, β, Q y M. Calculando M en función de α obtenemos la gráfica mostrada en la figura

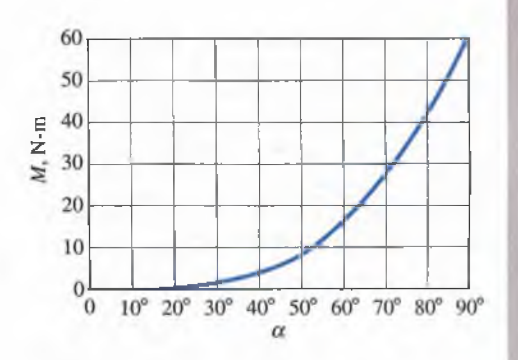


Figura 6.42
El momento M en función de α.

6.42. Para aproximadamente $\alpha = 80°$, el momento $M = 40$ N-m. Examinando los resultados calculados cercanos a los 80°,

α	M, N-m
79.59°	39.9601
79.60°	39.9769
79.61°	39.9937
79.62°	40.0105
79.63°	40.0272

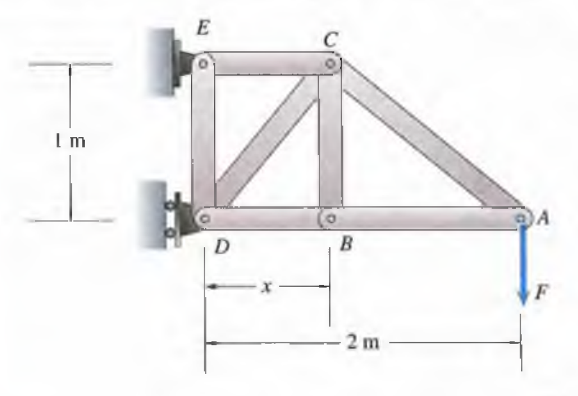
calculamos que $\alpha = 79.61°$ cuando $M = 40$ N-m.

Una vez que conocemos α, podemos calcular V y luego p, obteniendo

$$p = 1.148 p_{\text{atm}} = 1.148 \times 10^5 \text{ Pa.}$$

Problemas

6.101 (a) Para cada barra de la armadura mostrada obtenga una gráfica de (fuerza axial)/F como función de x para $0 \leq x \leq 2$ m.
(b) Si tuviera que diseñar esta armadura, ¿qué valor de x escogería con base en los resultados de la parte (a)?



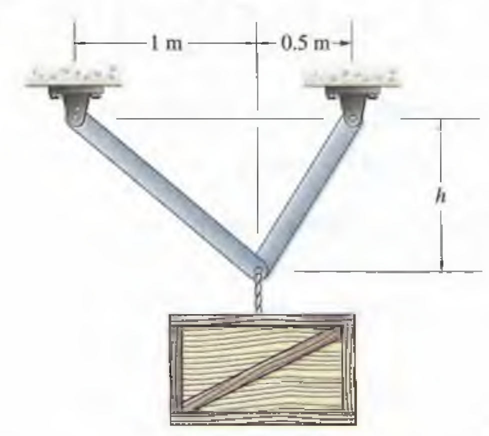
P6.101

6.102 Considere el mecanismo para pesar sobres de correo descrito en el problema 6.91.
(a) Obtenga una gráfica del ángulo α en función de la masa de los sobres para valores de la masa de 0 a 2 kg.
(b) Use los resultados de la parte (a) para calcular el valor de α cuando la masa es de 1 kg.

6.103 Considere el sistema descrito en el ejemplo 6.11.
(a) Obtenga una gráfica de M como función de α para valores de α de 0 a 180°.
(b) Use los resultados de la parte (a) para calcular el valor máximo de M y el ángulo α en que éste ocurre.

6.104 Considere el sistema descrito en el problema 6.96. El cilindro hidráulico DE ejerce una fuerza axial de 800 N.
(a) Obtenga una gráfica de la componente horizontal de la fuerza ejercida por la barra AB sobre la barra horizontal en A para valores de α de 45° a 85°.
(b) Use los resultados de la parte (a) para calcular el valor de α para el cual la fuerza horizontal es de 2 kN.

6.105 El objeto suspendido pesa 10 kN. Las dos barras tienen iguales áreas A en sus secciones transversales y cada una resiste con seguridad una fuerza axial de $40A$ MN (A en metros cuadrados). Determine el valor de h que minimiza el volumen total de material en las dos barras.



P6.105

6.106 En P6.96 las barras AD y BC tienen 2 m de longitud, $b = 1.4$ m y $W = 4$ kN. Si la fuerza máxima que el actuador hidráulico DE puede ejercer es de 20 kN, ¿cuál es la mínima altura h para soportar la carga?

6.107 El eslabonamiento en el problema 6.97 está en equilibrio bajo la acción de los pares M_A y M_B. Cuando $\alpha_A = 60°$, $\alpha_B = 70°$. Para el intervalo $0 \leq \alpha_A \leq 180°$, calcule los valores máximos positivo y negativo de M_A/M_B y los valores de α_A en que esto ocurre.

6.108 Considere el cargador frontal del problema 6.98. La mitad de su carga $W = 4$ kN está soportada por el elemento *ACG* y el actuador hidráulico *BC*. Si el actuador *BC* puede ejercer una fuerza axial máxima de 12 kN, ¿cuál es la máxima altura sobre el terreno a la cual puede soportarse el centro de masa *G*?

6.109 Considere la armadura del problema 6.23. La grúa ejerce fuerzas verticales de 75 kN sobre la armadura en los puntos *B*, *C* y *D*. El soporte en *A* se puede representar como un soporte de pasador y el soporte en *E* como un soporte de rodillo que puede ejercer una fuerza normal a la línea discontinua pero no una fuerza paralela a ella. Determine el valor del ángulo α para el cual la máxima fuerza a compresión en cualquiera de las barras es lo más pequeña posible. ¿Qué valor tienen las fuerzas axiales resultantes en las barras?

Resumen del capítulo

Una estructura de **miembros** interconectados en **juntas** o **nudos** es una **armadura** si está compuesta en su totalidad por miembros de dos fuerzas. De lo contrario, se trata de un **bastidor** si está diseñada para permanecer en reposo y soportar cargas, y de una **máquina** si está diseñada para moverse y ejercer cargas.

Armaduras

Un miembro de una armadura está a **tensión** si las **fuerzas axiales** en sus extremos se alejan, y está a **compresión** si las fuerzas axiales se acercan. Para determinar las fuerzas axiales en los miembros de una armadura, debe dibujarse un diagrama de cuerpo libre de la armadura completa y hallar las reacciones en sus soportes. Las fuerzas axiales en las barras se pueden determinar con dos métodos. El **método de las juntas** implica dibujar diagramas de cuerpo libre de cada una de las juntas de una armadura y usar las ecuaciones de equilibrio para determinar las fuerzas axiales en los miembros. En dos dimensiones, escoja juntas que estén sometidas a fuerzas conocidas y a no más de dos fuerzas desconocidas. El **método de las secciones** implica dibujar diagramas de cuerpo libre de partes, o **secciones**, de una armadura y usar las ecuaciones de equilibrio para determinar las fuerzas axiales en los miembros seleccionados.

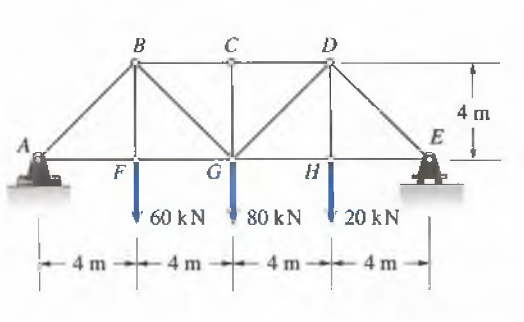
Las **armaduras espaciales** son tridimensionales; se analiza con los mismos métodos que las armaduras bidimensionales. Elija juntas sometidas a fuerzas conocidas y a no más de tres fuerzas desconocidas.

Bastidores y máquinas

Comience el análisis de un bastidor o de una máquina dibujando el diagrama de cuerpo libre de la estructura completa y determinando las reacciones en sus soportes. Si la estructura es estáticamente indeterminada, halle la mayor cantidad de reacciones posible. Luego dibuje diagramas de los elementos individuales, o de una combinación seleccionada de elementos, y aplique las ecuaciones de equilibrio para hallar las fuerzas que actúan sobre ellos. Al identificar los miembros de dos fuerzas se reduce el número de fuerzas desconocidas por determinar. Si en una junta se aplica una carga, ésta puede colocarse en el diagrama de cuerpo libre en *cualquiera* de los elementos unidos en la junta.

Problemas de repaso

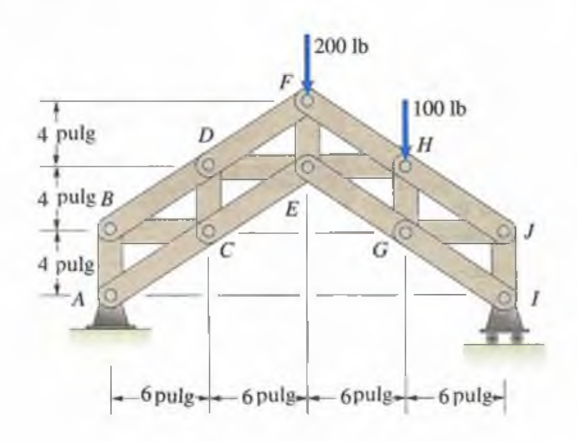
6.110 La armadura de puente Pratt mostrada soporta cargas en *F*, *G* y *H*. Determine las fuerzas axiales en las barras *BC*, *BG* y *FG*.



P6.110

6.111 Considere la armadura del problema 6.110. Determine las fuerzas axiales en las barras *CD*, *GD* y *GH*.

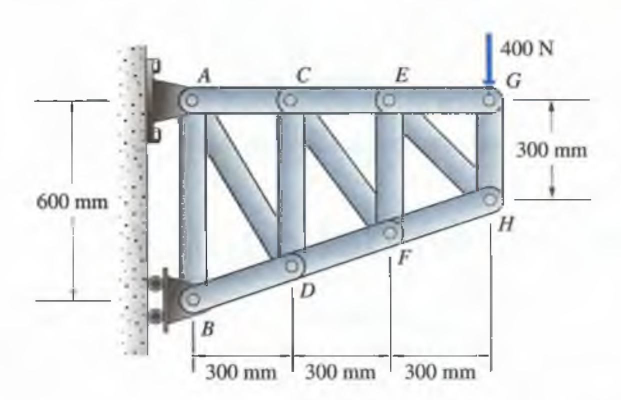
6.112 La armadura mostrada soporta cargas en *F* y *H*. Determine las fuerzas axiales en las barras *AB*, *AC*, *BC*, *BD*, *CD* y *CE*.



P6.112

6.113 Considere la armadura del problema 6.112. Determine las fuerzas axiales en las barras *EH* y *FH*.

6.114 La armadura soporta una carga de 400 N en *G*. Determine las fuerzas axiales en las barras *AC*, *CD* y *CF*.

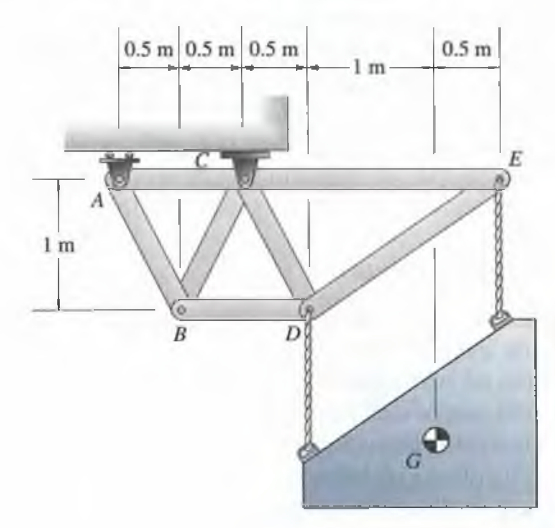


P6.114

6.115 Considere la armadura del problema 6.114. Determine las fuerzas axiales en las barras *CE*, *EF* y *EH*.

6.116 Considere la armadura del problema 6.114. ¿Qué barras soportan las mayores fuerzas de tensión y de compresión, y cuáles son sus valores?

6.117 En la figura P6.117, un altoparlante está suspendido de la armadura por cables conectados en *D* y *E*. La masa del altoparlante es de 130 kg y su peso actúa en *G*. Determine las fuerzas axiales en los miembros *BC* y *CD*.

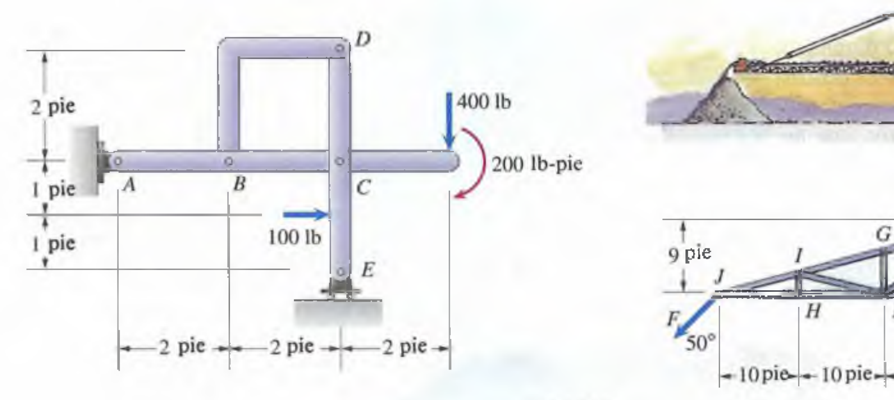


P6.117

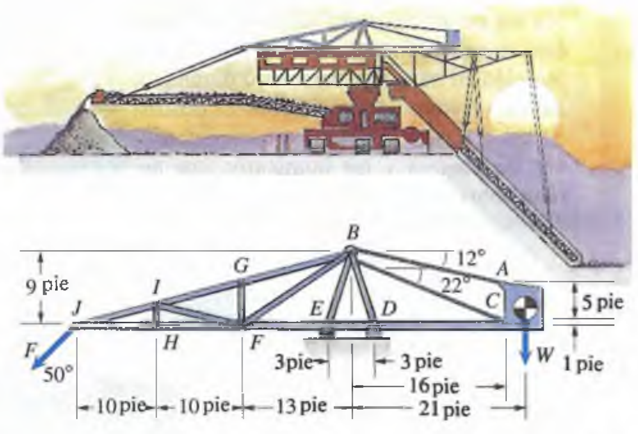
6.118 Considere el sistema del problema 6.117. Si cada miembro de la armadura resiste con seguridad una tensión de 5 kN y una compresión de 3 kN, ¿cuál es el valor máximo que con seguridad puede tener la masa del altoparlante?

6.119 Determine las fuerzas sobre el elemento ABC, presentando sus respuestas como en la figura 6.35.

6.120 La estructura mostrada soporta una banda transportadora que se utiliza en una mina de carbón. Los cables conectados a la banda ejercen la fuerza F en J. Como resultado del contrapeso $W = 8$ klb, la reacción en E y la reacción vertical en D son iguales. Determine F y las fuerzas axiales en las barras BG y EF.



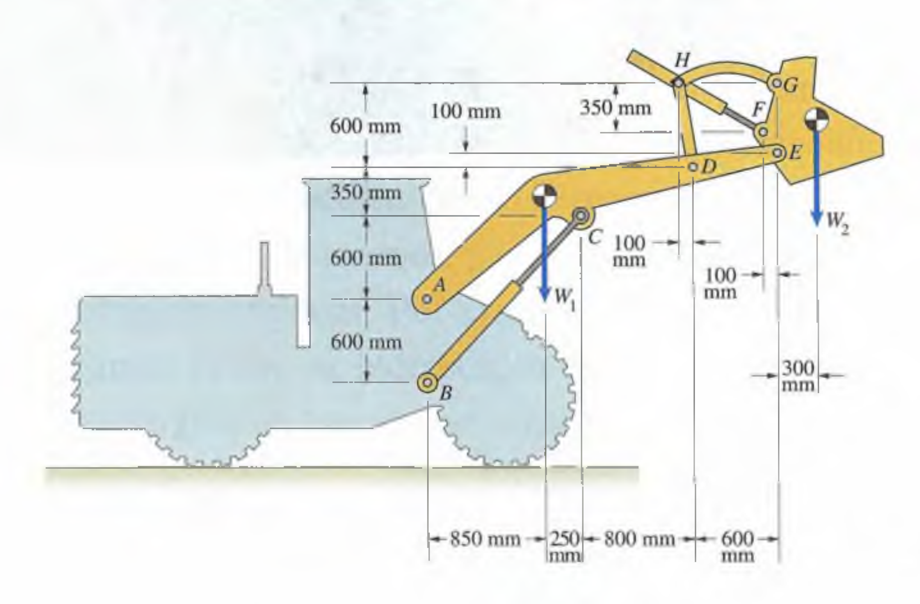
P6.119



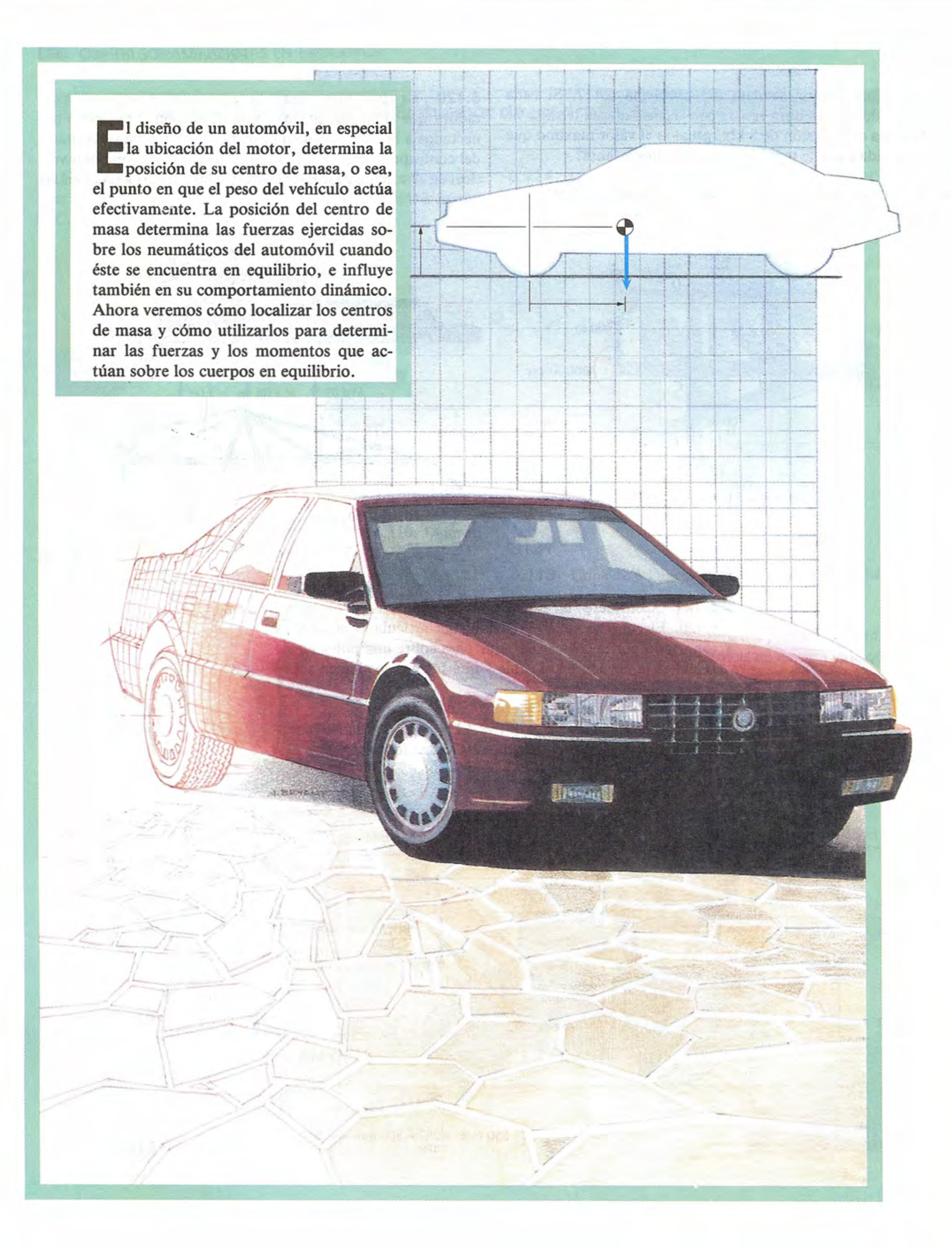
P6.120

6.121 Considere la estructura descrita en el problema 6.120. El contrapeso $W = 8$ klb está articulado en D y es soportado por el cable ABC, que pasa sobre una polea en A. ¿Cuál es la tensión en el cable y qué fuerzas se ejercen sobre el contrapeso en D?

6.122 Se tienen los pesos $W_1 = 4$ kN y $W_2 = 10$ kN. Determine las fuerzas sobre el elemento $ACDE$ en los puntos A y E.



P6.122



El diseño de un automóvil, en especial la ubicación del motor, determina la posición de su centro de masa, o sea, el punto en que el peso del vehículo actúa efectivamente. La posición del centro de masa determina las fuerzas ejercidas sobre los neumáticos del automóvil cuando éste se encuentra en equilibrio, e influye también en su comportamiento dinámico. Ahora veremos cómo localizar los centros de masa y cómo utilizarlos para determinar las fuerzas y los momentos que actúan sobre los cuerpos en equilibrio.

Capítulo 7

Centroides y centros de masa

EL peso de un cuerpo no actúa en un solo punto sino que está distribuido sobre su volumen total. Sin embargo, el peso se puede *representar* con una sola fuerza equivalente actuando en un punto llamado centro de masa. Por ejemplo, cada parte de un automóvil tiene peso, pero podemos representar su peso total con una sola fuerza que actúa en su centro de masa.

En este capítulo definimos el centro de masa y mostramos cómo se determina para varias clases de cuerpos. También damos definiciones que pueden interpretarse como las posiciones medias de áreas, volúmenes y líneas. Esas posiciones medias se llaman centroides. Los centroides coinciden con los centros de masa en clases particulares de cuerpos, pero también surgen en muchas otras aplicaciones. Por ejemplo, en el capítulo 9 expresamos la fuerza hidrostática ejercida sobre una placa sumergida en función del centroide del área de la placa.

7.1 Centroides

Como el centroide tiene tantas aplicaciones, lo definimos primero usando el concepto general de un "peso ponderado". Luego analizamos los centroides de áreas, volúmenes y líneas antes de presentar el centro de masa.

Introducción

Comencemos con la idea común de una posición media. Supongamos que queremos determinar la posición media de un grupo de estudiantes en un aula. Primero establecemos un sistema coordenado para poder expresar la posición de cada estudiante. Por ejemplo, podemos alinear los ejes con las paredes (Fig. 7.1a). Numeramos a los estudiantes del 1 al N y denotamos la posición del estudiante 1 con x_1, y_1, etcétera. La coordenada x media $\bar{x}$ es la suma de sus coordenadas x dividida entre N,

$$\bar{x} = \frac{\sum_i x_i}{N}, \tag{7.1}$$

donde el signo Σ significa "la suma de $i = 1$ a N". La coordenada y media es

$$\bar{y} = \frac{\sum_i y_i}{N}. \tag{7.2}$$

La posición media se indica con el símbolo mostrado en la figura 7.1(b).

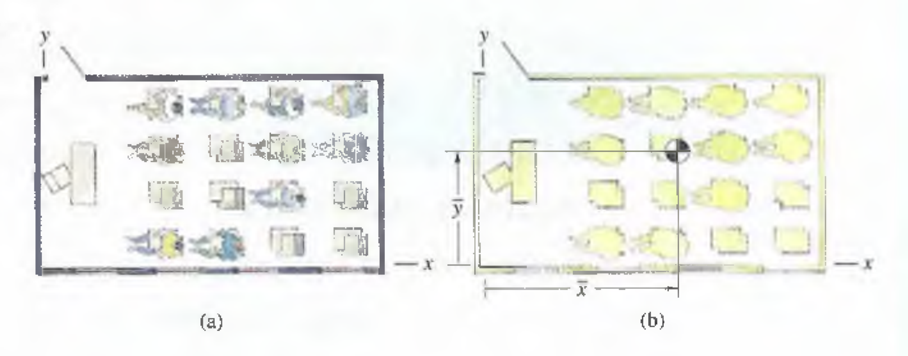


Figura 7.1
(a) Grupo de estudiantes en un aula.
(b) Su posición media.

Supongamos ahora que repartimos entre los estudiantes cierto número de monedas (p. ej., c_1 es el número de monedas entregadas al estudiante 1). ¿Cuál es la posición media de las monedas en el aula? Está claro que no puede ser igual que la posición media de los estudiantes. Por ejemplo, si los estudiantes ubicados al frente del aula tienen más monedas, la posición media de las monedas estará más cerca del frente del aula que la posición media de los estudiantes.

Para determinar la coordenada x de la posición media de las monedas, necesitamos sumar las coordenadas x de las monedas y dividirlas entre el número de monedas. Podemos obtener la suma de las coordenadas x de las monedas multiplicando el número de monedas que cada estudiante tiene por la coordenada x del estudiante y sumar los productos parciales. Podemos obtener el número de monedas sumando los números c_1, c_2,... La coordenada x media de las monedas es entonces

$$\bar{x} = \frac{\sum_i x_i c_i}{\sum_i c_i}. \quad (7.3)$$

Determinamos de la misma manera la coordenada y media de las monedas:

$$\bar{y} = \frac{\sum_i y_i c_i}{\sum_i c_i}. \quad (7.4)$$

Asignando otros significados a c_1, c_2,..., podemos determinar las posiciones medias de otras medidas asociadas con los estudiantes. Por ejemplo, determinar la posición media de sus edades o sus estaturas.

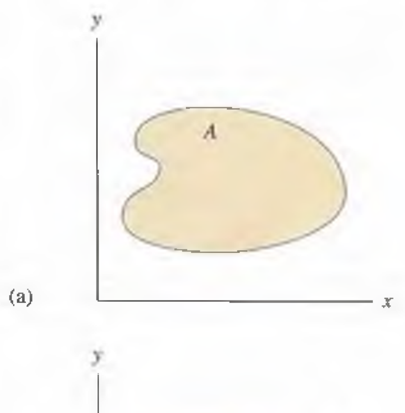
Las ecuaciones (7.3) y (7.4) sirven para determinar la posición media de *cualquier* conjunto de cantidades a las que podamos asociar posiciones. Una posición media obtenida de esas ecuaciones se denomina "posición de peso ponderado" o **centroide**. El "peso" asociado con las posiciones x_1, y_1 es c_1, el peso asociado con la posición x_2, y_2 es c_2, etcétera. En las ecuaciones (7.1) y (7.2), el peso asociado con la posición de cada estudiante es 1. Al realizar censos de población, el centroide o posición media de la población se determina así. En la siguiente sección usaremos estas ecuaciones para determinar centroides de áreas.

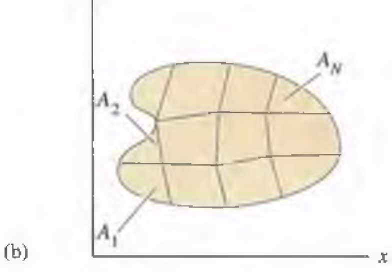
Áreas

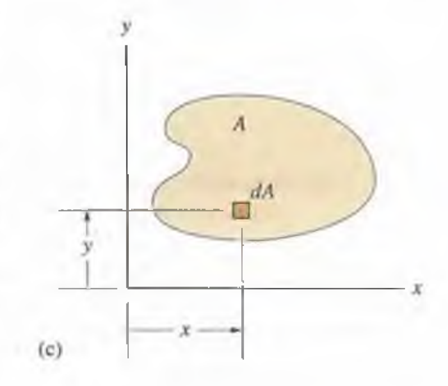
Consideremos un área A arbitraria en el plano x-y (Fig. 7.2a). Dividamos el área en partes A_1, A_2,..., A_N (Fig. 7.2b) y denotemos las posiciones de las partes por medio de sus coordenadas (x_1, y_1), (x_2, y_2),..., (x_N, y_N). Podemos obtener el centroide o posición media del área usando las ecuaciones (7.3) y (7.4) con las áreas de las partes como los pesos:

$$\bar{x} = \frac{\sum_i x_i A_i}{\sum_i A_i}, \qquad \bar{y} = \frac{\sum_i y_i A_i}{\sum_i A_i}. \quad (7.5)$$

Pero entonces nos preguntaremos: ¿cuáles son las posiciones exactas de las áreas A_1, A_2,..., A_N? Podríamos reducir la incertidumbre dividiendo A en partes menores, pero aun así obtendríamos sólo valores aproximados para $\bar{x}$ y $\bar{y}$. Para determinar la localización exacta del centroide, de-







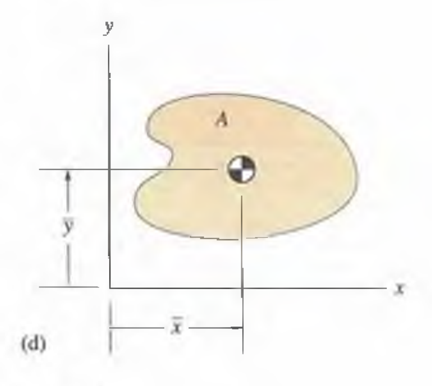


Figura 7.2
(a) Área A.
(b) División de A en N partes.
(c) Elemento diferencial de área dA con coordenadas x, y.
(d) Centroide del área.

bemos tomar el límite cuando los tamaños de las partes tiendan a cero. Este límite se obtiene reemplazando las ecuaciones (7.5) con las integrales

$$\bar{x} = \frac{\int_A x\,dA}{\int_A dA}, \tag{7.6}$$

$$\bar{y} = \frac{\int_A y\,dA}{\int_A dA}, \tag{7.7}$$

donde x y y son las coordenadas del elemento diferencial de área dA (Fig. 7.2c). El subíndice A significa que la integración se efectúa sobre el área completa. En la figura 7.2(d) se muestra el centroide del área.

Recordar que el centroide de un área es su posición media nos ayudará a localizarlo. Por ejemplo, está claro que el centroide de un área circular o rectangular se encuentra en el centro del área. Si un área tiene "simetría de espejo" respecto a un eje, su centroide se encuentra sobre el eje (Fig. 7.3a), y si un área es simétrica respecto a dos ejes, el centroide se encuentra en la intersección de ellos (Fig. 7.3b).

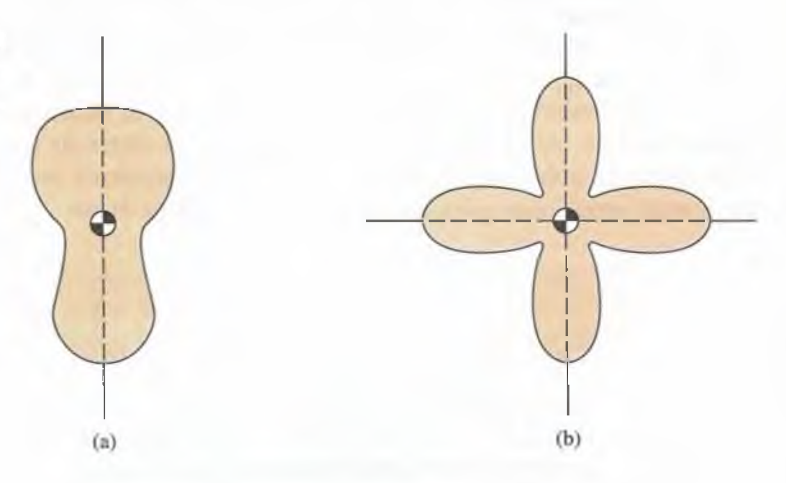


Figura 7.3
(a) Área simétrica respecto a un eje.
(b) Área con 2 ejes de simetría.

Los siguientes ejemplos muestran el uso de las ecuaciones (7.6) y (7.7) para determinar centroides de áreas. Se deben escoger un elemento diferencial de área dA y los límites de integración pertinentes para cubrir el área buscada.

Ejemplo 7.1

Determine el centroide del área triangular de la figura 7.4.

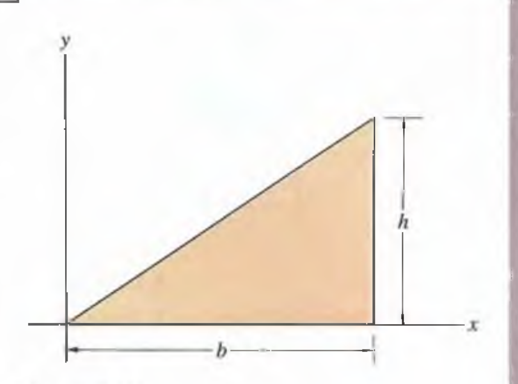


Figura 7.4

ESTRATEGIA

Determinaremos las coordenadas del centroide usando un elemento de área dA en la forma de una franja de ancho dx.

SOLUCIÓN

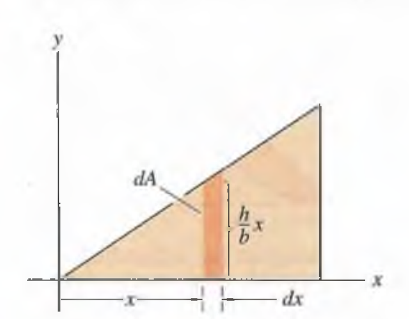
Sea dA el área de la franja vertical de la figura (a). Su altura es $(h/b)x$, por lo que $dA = (h/b)x\,dx$. Para integrar sobre toda el área, debemos integrar con respecto a x de $x = 0$ a $x = b$. La coordenada x del centroide es

$$\bar{x} = \frac{\int_A x\,dA}{\int_A dA} = \frac{\int_0^b x\left(\frac{h}{b}x\,dx\right)}{\int_0^b \frac{h}{b}x\,dx} = \frac{\frac{h}{b}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^b}{\frac{h}{b}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^b} = \frac{2}{3}b.$$

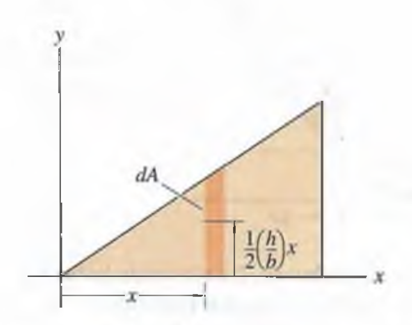
Para determinar $\bar{y}$, en la ecuación (7.7) tomamos y como la ordenada del punto medio de la franja (Fig. b):

$$\bar{y} = \frac{\int_A y\,dA}{\int_A dA} = \frac{\int_0^b \frac{1}{2}\left(\frac{h}{b}x\right)\left(\frac{h}{b}x\,dx\right)}{\int_0^b \frac{h}{b}x\,dx} = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{h}{b}\right)^2\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^b}{\frac{h}{b}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^b} = \frac{1}{3}h.$$

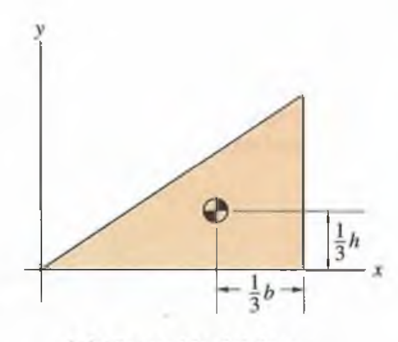
El centroide se muestra en la figura (c).



(a) Elemento dA en forma de franja.



(b) La coordenada y del punto medio de la franja es $\frac{1}{2}(h/b)x$.



(c) Centroide del área.

COMENTARIO

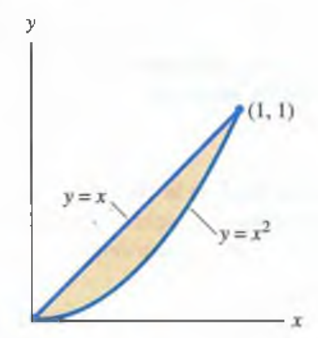
Conviene estar siempre alerta para aprovechar las oportunidades de verificar los resultados. En este ejemplo deberíamos asegurarnos de que el procedimiento de integración da el resultado correcto para el área del triángulo:

$$\int_A dA = \int_0^b \frac{h}{b}x\,dx = \frac{h}{b}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^b = \frac{1}{2}bh.$$

Ejemplo 7.2

Determine el centroide del área en la figura 7.5.

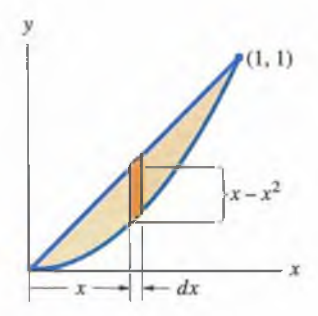
Figura 7.5



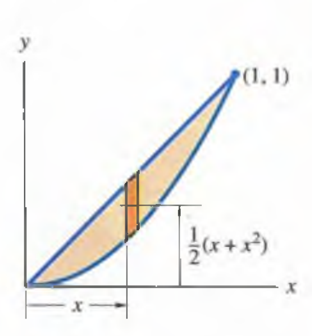
SOLUCIÓN

Sea dA el área de la franja vertical de la figura (a). La altura de la franja es $x - x^2$, por lo que $dA = (x - x^2)dx$. La coordenada x del centroide es

$$\bar{x} = \frac{\int_A x\, dA}{\int_A dA} = \frac{\int_0^1 x(x - x^2)\, dx}{\int_0^1 (x - x^2)\, dx} = \frac{\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_0^1}{\left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1} = \frac{1}{2}.$$



(a) Franja vertical de ancho dx. La altura de la franja es igual a la diferencia de las dos funciones.



(b) Coordenada y del punto medio de la franja.

La coordenada y del punto medio de la franja es $x^2 + \frac{1}{2}(x - x^2) = \frac{1}{2}(x + x^2)$ (Fig. b). Sustituyendo esta expresión para y en la ecuación (7.7), obtenemos la coordenada y del centroide:

$$\bar{y} = \frac{\int_A y\, dA}{\int_A dA} = \frac{\int_0^1 \left[\frac{1}{2}(x + x^2)\right](x - x^2)\, dx}{\int_0^1 (x - x^2)\, dx} = \frac{\frac{1}{2}\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5}\right]_0^1}{\left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1} = \frac{2}{5}.$$

Volúmenes

Considere un volumen V, y sea dV un elemento diferencial de V con coordenadas x, y y z (Fig. 7.6). Por analogía con las ecuaciones (7.6) y (7.7), las coordenadas del centroide de V son

$$\bar{x} = \frac{\int_V x\,dV}{\int_V dV}, \qquad \bar{y} = \frac{\int_V y\,dV}{\int_V dV}, \qquad \bar{z} = \frac{\int_V z\,dV}{\int_V dV}. \tag{7.8}$$

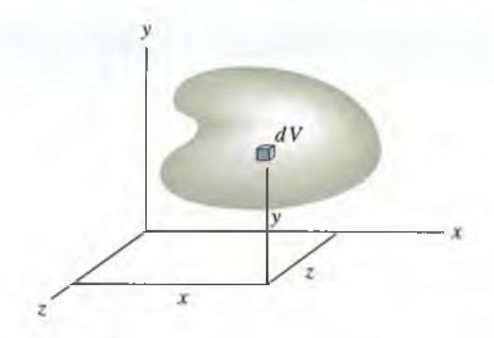


Figura 7.6
Volumen V y elemento diferencial dV.

El subíndice V en la integral significa que la integral se lleva a cabo sobre el volumen completo.

Si un volumen tiene la forma de una placa con espesor uniforme y área A de su sección transversal (Fig. 7.7a), su centroide coincide con el de A y se encuentra en el punto medio entre las dos caras. Para demostrar esto obtenemos un elemento de volumen dV proyectando un elemento dA del área de la sección transversal a través del espesor T del volumen, de manera que $dV = T\,dA$ (Fig. 7.7b). Las coordenadas x y y del centroide del volumen son entonces

$$\bar{x} = \frac{\int_V x\,dV}{\int_V dV} = \frac{\int_A xT\,dA}{\int_A T\,dA} = \frac{\int_A x\,dA}{\int_A dA},$$

$$\bar{y} = \frac{\int_V y\,dV}{\int_V dV} = \frac{\int_A yT\,dA}{\int_A T\,dA} = \frac{\int_A y\,dA}{\int_A dA}.$$

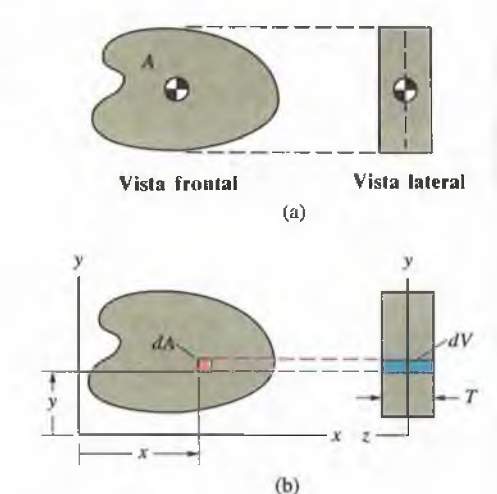


Figura 7.7
(a) Volumen de espesor uniforme.
(b) Obtención de dV proyectando dA a través del volumen.

Por simetría, la coordenada $\bar{z} = 0$. Se conoce entonces el centroide de este tipo de volumen si se conoce (o se puede determinar) el centroide del área de su sección transversal.

Líneas

Las coordenadas del centroide de una línea L son

$$\bar{x} = \frac{\int_L x\,dL}{\int_L dL}, \qquad \bar{y} = \frac{\int_L y\,dL}{\int_L dL}, \qquad \bar{z} = \frac{\int_L z\,dL}{\int_L dL}, \tag{7.9}$$

donde dL es una longitud diferencial de la línea con coordenadas x, y y z (Fig. 7.8).

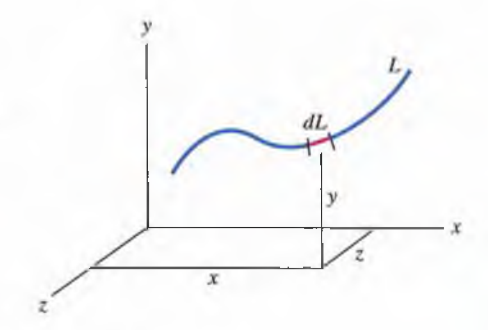


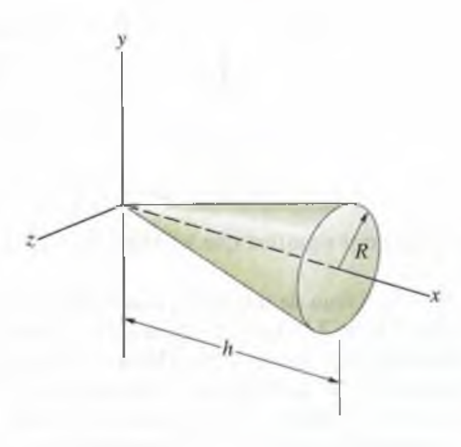
Figura 7.8
Línea L y elemento diferencial dL.

Ahora se muestra el uso de las ecuaciones (7.8) y (7.9) para determinar centroides de volúmenes y líneas. Al igual que para determinar centroides de áreas, se deben escoger elementos diferenciales de volumen o longitud y los límites apropiados para que la integración cubra todo el volumen o línea.

Ejemplo 7.3

Determine el centroide del cono de la figura 7.9.

Figura 7.9



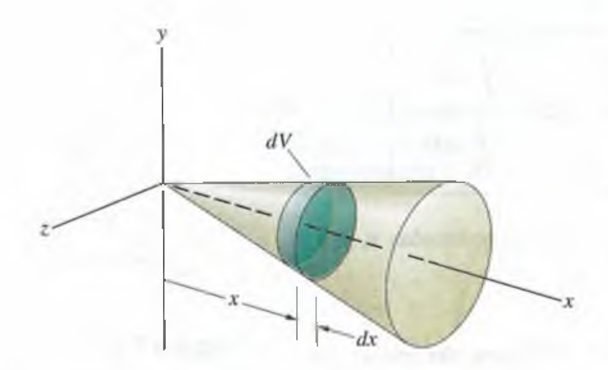
ESTRATEGIA

Debido a la simetría, el centroide debe encontrarse sobre el eje x. Determinaremos su coordenada x usando un elemento de volumen dV en forma de "disco" con ancho dx.

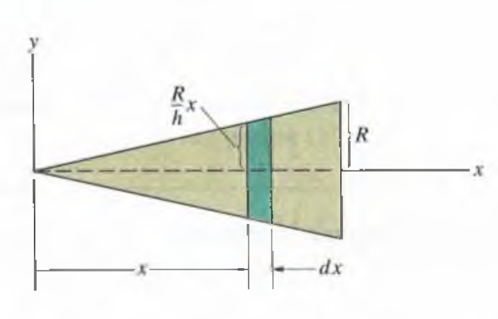
SOLUCIÓN

Sea dV el disco de la figura (a). El radio del disco es $(R/h)x$ (Fig. b) y su volumen es igual al producto del área del disco y su espesor, $dV = \pi[(R/h)x]^2dx$. Para integrar sobre el volumen total, debemos integrar con respecto a x de $x = 0$ a $x = h$. La coordenada x del centroide es

$$\bar{x} = \frac{\int_V x\, dV}{\int_V dV} = \frac{\int_0^h x\pi \frac{R^2}{h^2} x^2\, dx}{\int_0^h \pi \frac{R^2}{h^2} x^2\, dx} = \frac{3}{4}h.$$



(a) Un elemento dV en forma de disco.



(b) El radio del elemento es $(R/h)x$.

Ejemplo 7.4

En la figura 7.10, la línea L está definida por la función $y = x^2$. Determine la coordenada x de su centroide.

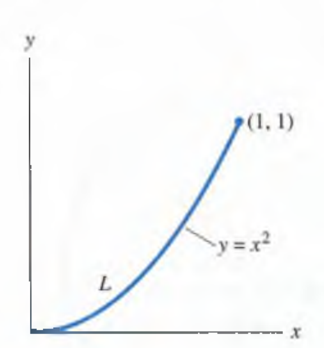
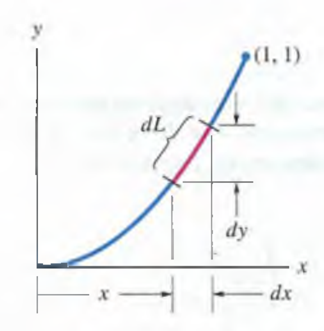


Figura 7.10

SOLUCIÓN

Podemos expresar un elemento diferencial dL de la línea (Fig. a) en función de dx y dy:

$$dL = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx.$$



(a) Elemento diferencial de línea dL.

De la ecuación que describe la línea, la derivada $dy/dx = 2x$, por lo que obtenemos una expresión para dL en función de x:

$$dL = \sqrt{1 + 4x^2}\, dx.$$

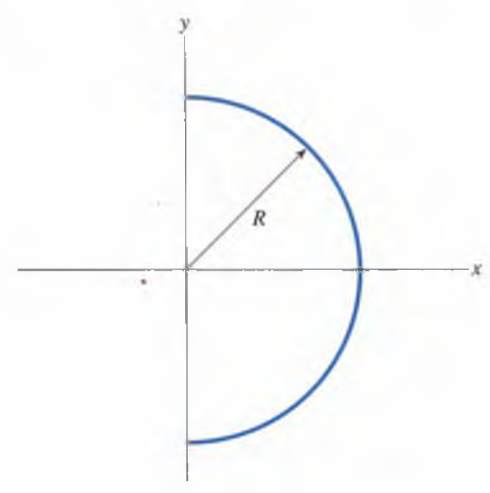
Para integrar sobre toda la línea, debemos integrar de $x = 0$ a $x = 1$. La coordenada x del centroide es

$$\bar{x} = \frac{\int_L x\, dL}{\int_L dL} = \frac{\int_0^1 x\sqrt{1 + 4x^2}\, dx}{\int_0^1 \sqrt{1 + 4x^2}\, dx} = 0.574.$$

Ejemplo 7.5

Determine el centroide de la línea semicircular de la figura 7.11.

Figura 7.11



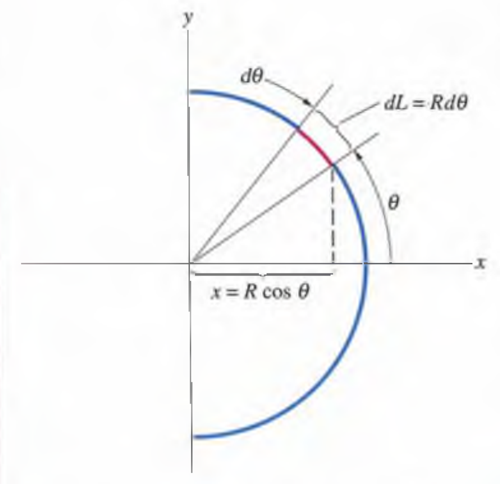
ESTRATEGIA

Debido a la simetría de la línea, el centroide se encuentra sobre el eje x. Para determinar $\bar{x}$ usaremos coordenadas polares a fin de realizar la integración.

SOLUCIÓN

Dándole a θ un incremento $d\theta$ obtenemos un elemento diferencial de línea $dL = R\,d\theta$ (Fig. a). La coordenada x de dL es $x = R\cos\theta$. Para integrar sobre toda la línea, debemos integrar con respecto a θ de $\theta = -\pi/2$ a $\theta = +\pi/2$:

$$\bar{x} = \frac{\int_L x\,dL}{\int_L dL} = \frac{\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (R\cos\theta)R\,d\theta}{\int_{-\pi/2}^{\pi/2} R\,d\theta} = \frac{R^2[\operatorname{sen}\theta]_{-\pi/2}^{\pi/2}}{R[\theta]_{-\pi/2}^{\pi/2}} = \frac{2R}{\pi}.$$



(a) Elemento diferencial de línea $dL = R d\theta$.

COMENTARIO

Observe que este procedimiento de integración nos da la longitud correcta de la línea:

$$\int_L dL = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} R\,d\theta = R[\theta]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \pi R.$$

Centros de masa

El **centro de masa** de un cuerpo es el centroide de su masa,

$$\bar{x} = \frac{\int_m x\,dm}{\int_m dm}, \qquad \bar{y} = \frac{\int_m y\,dm}{\int_m dm}, \qquad \bar{z} = \frac{\int_m z\,dm}{\int_m dm}, \qquad (7.10)$$

donde x, y y z son las coordenadas del elemento diferencial de masa dm (Fig. 7.12). Los subíndices m indican que la integración se debe efectuar sobre la masa completa del cuerpo.

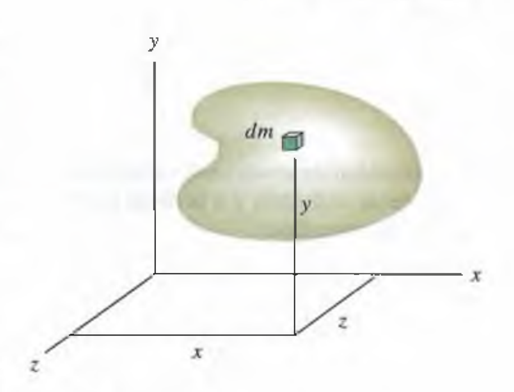


Figura 7.12

Un cuerpo y un elemento diferencial de masa dm.

Representación del peso con una fuerza equivalente Antes de ver cómo determinar el centro de masa, demostraremos una de sus más importantes propiedades. *El peso de un cuerpo se puede representar con una sola fuerza equivalente que actúa en su centro de masa.* Sea un elemento de masa dm de un cuerpo (Fig. 7.13a). Si el eje y del sistema coordenado apunta hacia arriba, el peso de dm es $-dm\,g\mathbf{j}$. Integrando esta expresión sobre la masa m tenemos el peso total del cuerpo,

$$\int_m -g\,\mathbf{j}\,dm = -mg\,\mathbf{j} = -W\mathbf{j}.$$

El momento del peso del elemento dm respecto al origen es

$$(x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}) \times (-dm\,g\mathbf{j}) = gz\,\mathbf{i}\,dm - gx\,\mathbf{k}\,dm.$$

Integrando esta expresión sobre m, obtenemos el momento total respecto al origen debido al peso del cuerpo:

$$\int_m (gz\,\mathbf{i}\,dm - gx\,\mathbf{k}\,dm) = mg\bar{z}\,\mathbf{i} - mg\bar{x}\,\mathbf{k} = W\bar{z}\,\mathbf{i} - W\bar{x}\,\mathbf{k}.$$

Si representamos el peso del cuerpo con la fuerza $-W\mathbf{j}$ que actúa en el centro de masa (Fig. 7.13b), el momento de esta fuerza respecto al origen es igual al momento total debido al peso:

$$(\bar{x}\,\mathbf{i} + \bar{y}\,\mathbf{j} + \bar{z}\,\mathbf{k}) \times (-W\,\mathbf{j}) = W\bar{z}\,\mathbf{i} - W\bar{x}\,\mathbf{k}.$$

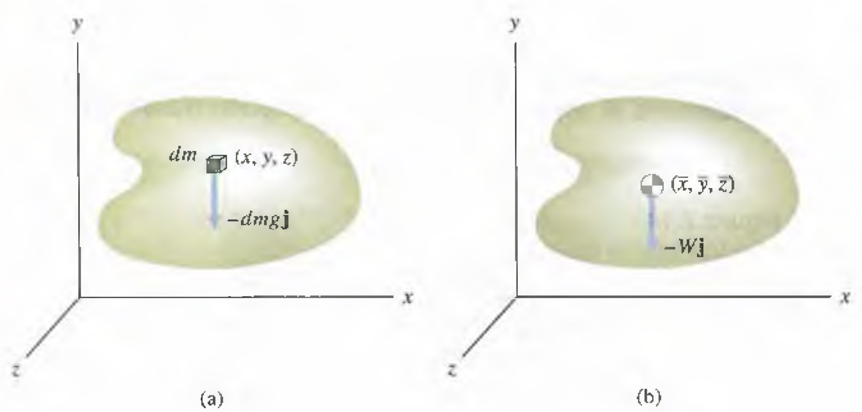


Figura 7.13

(a) Peso del elemento dm.
(b) Representación del peso por una sola fuerza en el centro de masa.

Este resultado muestra que cuando sólo nos interesa la fuerza total y el momento total ejercidos por el peso de un cuerpo, se puede suponer que su peso actúa en el centro de masa.

Densidad La **densidad** ρ* de un cuerpo es tal que la masa de un elemento diferencial de su volumen es $dm = \rho dV$. Por tanto, las dimensiones de ρ son (masa)/(volumen). ρ se puede expresar en kg/m^3 en unidades SI o en slug/pie^3 en unidades inglesas. La masa total de un cuerpo es

$$m = \int_m dm = \int_V \rho\, dV. \tag{7.11}$$

Un cuerpo cuya densidad es uniforme en todo su volumen se conoce como **homogéneo**. En este caso, la masa total es igual al producto de la densidad y el volumen:

$$m = \rho \int_V dV = \rho V. \quad \textbf{Cuerpo homogéneo} \tag{7.12}$$

El **peso específico** $\gamma = g\rho$. Se puede expresar en N/m^3 en unidades SI, o en lb/pie^3 en unidades inglesas. El peso de un elemento de volumen dV de un cuerpo es $dW = \gamma dV$, y el peso total de un cuerpo homogéneo es igual a γV.

Sustituyendo $dm = \rho dV$ en las ecuaciones (7.10), podemos expresar las coordenadas del centro de masa en función de integrales de volumen:

$$\bar{x} = \frac{\int_V \rho x\, dV}{\int_V \rho\, dV}, \quad \bar{y} = \frac{\int_V \rho y\, dV}{\int_V \rho\, dV}, \quad \bar{z} = \frac{\int_V \rho z\, dV}{\int_V \rho\, dV}. \tag{7.13}$$

Si ρ es conocida como función de la posición en un cuerpo, estas integrales determinan su centro de masa. Además, podemos usarlas para demostrar que los centros de masa de ciertas clases de cuerpos coinciden con los centroides de volúmenes, áreas y líneas:

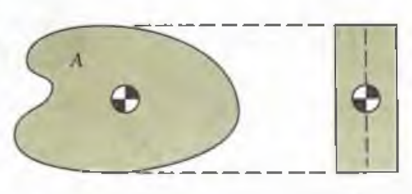
- **El centro de masa de un cuerpo homogéneo coincide con el centroide de su volumen**. Si un cuerpo es homogéneo, ρ = constante y las ecuaciones (7.13) corresponden al centroide del volumen,

$$\bar{x} = \frac{\int_V x\, dV}{\int_V dV}, \quad \bar{y} = \frac{\int_V y\, dV}{\int_V dV}, \quad \bar{z} = \frac{\int_V z\, dV}{\int_V dV}.$$

- **El centro de masa de una placa homogénea de espesor uniforme coincide con el centroide del área de su sección transversal** (Fig.

*A la densidad de masa suele llamársele simplemente *densidad*, y a la densidad de peso, *peso específico*.

Figura 7.14
Placa de espesor uniforme.



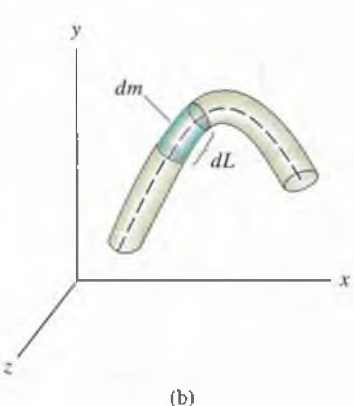
7.14). El centro de masa de la placa coincide con el centroide de su volumen, y ya demostramos en la página 339 que el centroide del volumen de una placa de espesor uniforme coincide con el centroide del área de su sección transversal.

- **El centro de masa de una barra esbelta homogénea de área uniforme en su sección transversal coincide aproximadamente con el centroide del eje de la barra** (Fig. 7.15a). El eje de la barra se define como la línea que pasa por los centroides de sus secciones transversales. Sea $dm = \rho A dL$, donde A es el área de la sección transversal de la barra y dL es un elemento diferencial de la longitud de su eje (Fig. 7.15b). Si sustituimos esta expresión en las ecuaciones (7.13), éstas se convierten en las ecuaciones del centroide del eje:

$$\bar{x} = \frac{\int_L x\,dL}{\int_L dL}, \qquad \bar{y} = \frac{\int_L y\,dL}{\int_L dL}, \qquad \bar{z} = \frac{\int_L z\,dL}{\int_L dL}.$$

Esto es aproximado porque el centro de masa del elemento dm no coincide con el centroide de la sección transversal donde la barra es curva.

(a)



(b)

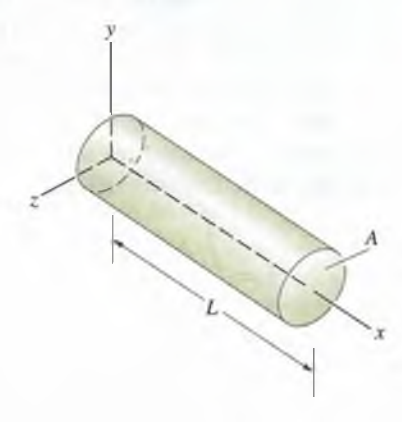
Figura 7.15
(a) Barra esbelta y centroide de su eje.
(b) Elemento dm.

El siguiente ejemplo demuestra el uso de las ecuaciones (7.13) para determinar el centro de masa de un cuerpo no homogéneo.

Ejemplo 7.6

Determine la masa del cilindro de la figura (7.16) y la posición de su centro de masa si (a) es homogéneo con densidad ρ_0; (b) su densidad está dada por la ecuación $\rho = \rho_0 (1 + x/L)$.

Figura 7.16



ESTRATEGIA

En la parte (a), la masa del cilindro es simplemente el producto de su densidad y su volumen, y el centro de masa se encuentra en el centroide de su volumen. En la parte (b), el cilindro no es homogéneo y debemos usar las ecuaciones (7.11) y (7.13) para determinar su masa y su centro de masa.

SOLUCIÓN

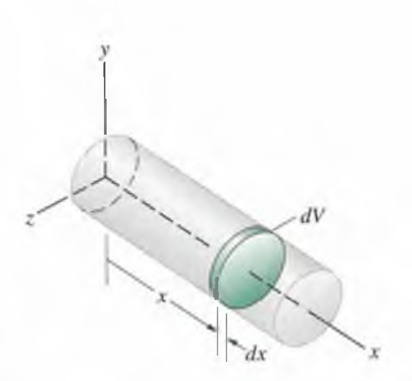
(a) El volumen del cilindro es LA, por lo que su masa es $\rho_0 LA$. Como el centro de masa coincide con el centroide del volumen del cilindro, las coordenadas del centro de masa son $\bar{x} = \frac{1}{2}L$, $\bar{y} = 0$, $\bar{z} = 0$.

(b) Podemos determinar la masa del cilindro usando un elemento de volumen dV en forma de un disco de espesor dx (Fig. a). El volumen $dV = A dx$. La masa del cilindro es

$$m = \int_V \rho \, dV = \int_0^L \rho_0 \left(1 + \frac{x}{L}\right) A \, dx = \frac{3}{2}\rho_0 A L.$$

La coordenada x del centro de masa es

$$\bar{x} = \frac{\int_V x\rho \, dV}{\int_V \rho \, dV} = \frac{\int_0^L \rho_0 \left(x + \frac{x^2}{L}\right) A \, dx}{\frac{3}{2}\rho_0 A L} = \frac{5}{9}L.$$



(a) Elemento de volumen dV en forma de disco.

Como la densidad no depende de y o z, sabemos por simetría que $\bar{y} = 0$ y $\bar{z} = 0$.

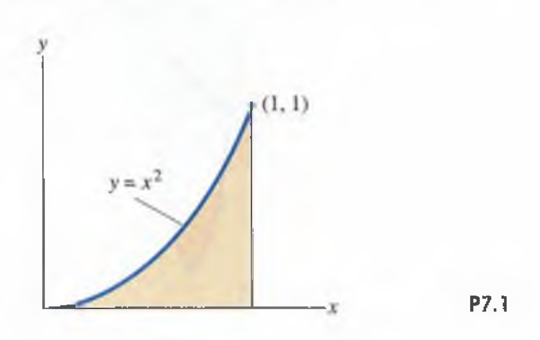
COMENTARIO

Observe que el centro de masa de un cilindro no homogéneo *no* está situado en el centroide de su volumen.

Problemas

7.1 Determine la coordenada x del centroide del área mostrada.

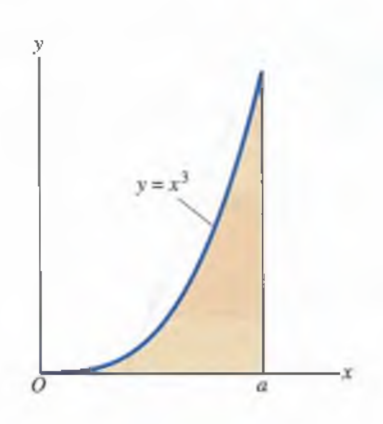
Estrategia: La coordenada x del centroide está dada por la ecuación (7.6). Se puede usar como elemento diferencial de área una franja vertical de ancho dx (Ej. 7.1).



P7.1

7.2 Determine la coordenada y del centroide del área en el problema 7.1.

7.3 Si $a = 2$, ¿cuáles son las coordenadas del centroide del área en la figura?

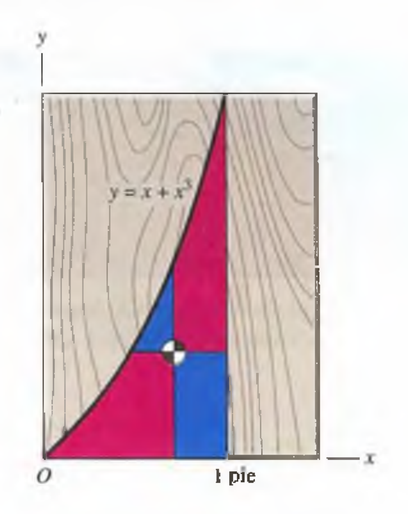


P7.3

7.4 Considere el área del problema 7.3. Si la coordenada y del centroide es $\bar{y} = 5$, ¿qué valor tiene $\bar{x}$?

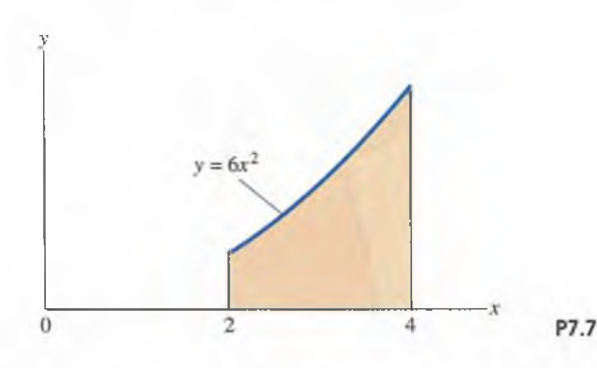
7.5 Considere el área del problema 7.3. El "centro de área" se define como el punto para el cual tenemos la misma área a la derecha y a la izquierda del punto, y la misma área arriba y abajo de él. Si $a = 4$, ¿qué valor tiene la coordenada x del centro de área y la coordenada x del centroide?

7.6 Un estudiante de arte quiere pintar un panel de madera como se muestra en la figura, con las líneas horizontales y verticales pasando por el centroide del área pintada. ¿Cuáles son las coordenadas del centroide?



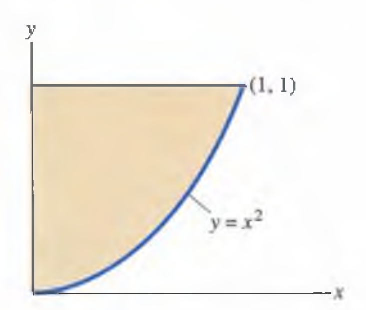
P7.6

7.7 Determine el centroide del área mostrada.



P7.7

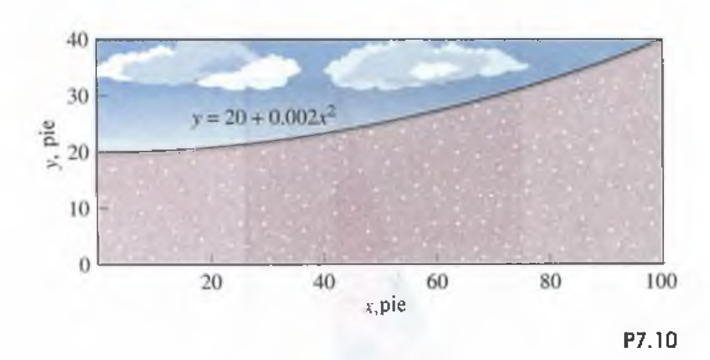
7.8 Determine el centroide del área mostrada considerando dA como una franja vertical de ancho dx.



P7.8

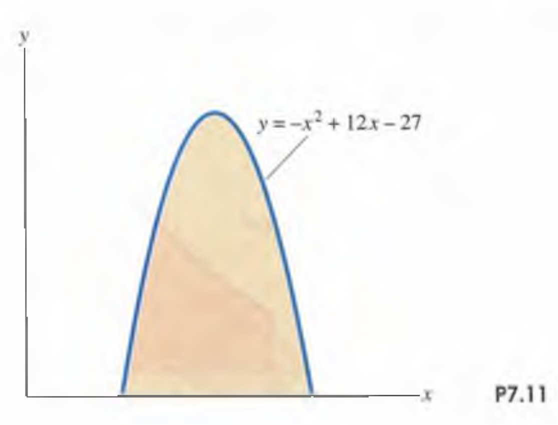
7.9 Determine el centroide del área del problema 7.8 considerando dA como una franja horizontal de altura dy.

7.10 Un arquitecto quiere construir una pared con el perfil mostrado. Para calcular los efectos de la carga de viento en la pared, debe determinar el área de ésta y las coordenadas de su centroide. ¿Cuáles son tales coordenadas?



P7.10

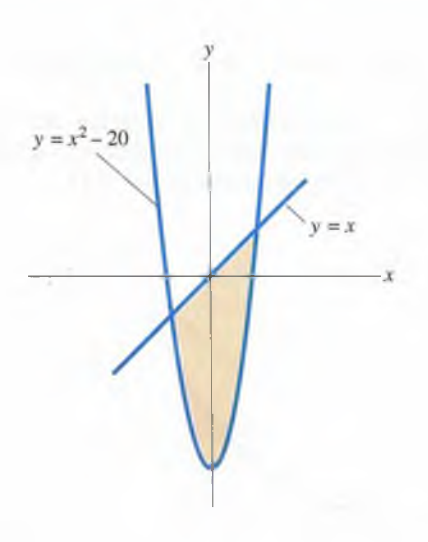
7.11 Determine la coordenada x del centroide del área mostrada.



P7.11

7.12 Determine la coordenada y del centroide del área del problema 7.11.

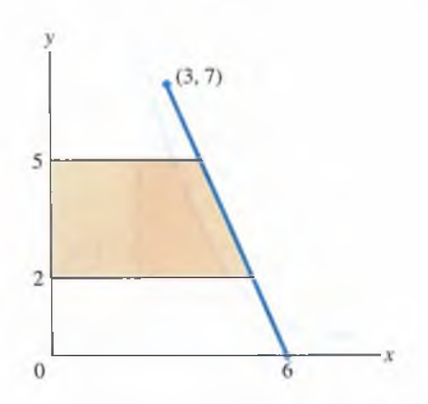
7.13 Determine la coordenada x del centroide del área mostrada.



P7.13

7.14 Determine la coordenada y del centroide del área del problema 7.13.

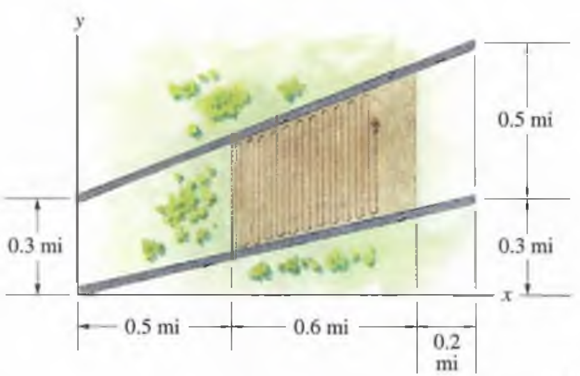
7.15 Determine la coordenada y del centroide del área mostrada.



P7.15

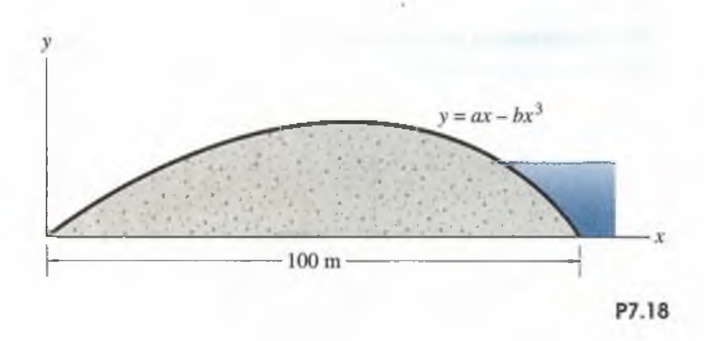
7.16 Determine la coordenada x del centroide del área del problema 7.15.

7.17 Un ingeniero agrónomo quiere medir la precipitación pluvial en el centroide de un campo arado entre dos caminos. ¿Cuáles son las coordenadas del punto donde se debe colocar el medidor?



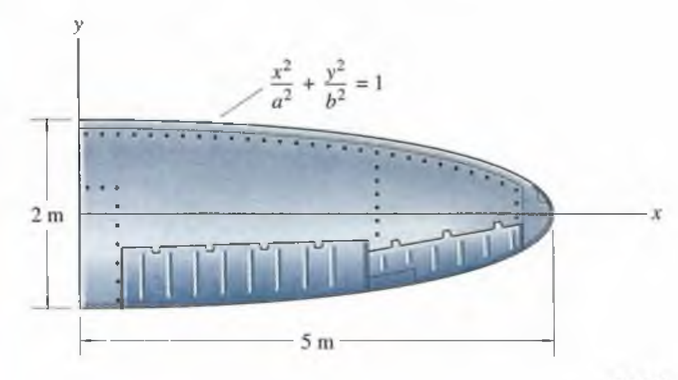
P7.17

7.18 Se muestra la sección transversal de un relleno de tierra. Determine los coeficientes a y b para que la coordenada y del centroide de la sección transversal sea de 10 m.



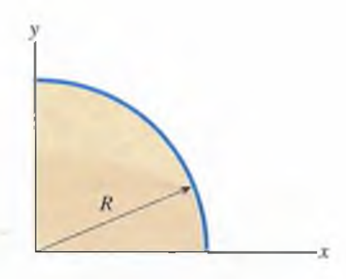
P7.18

7.19 El ala de un aeroplano tiene un perfil elíptico. Determine su centroide.



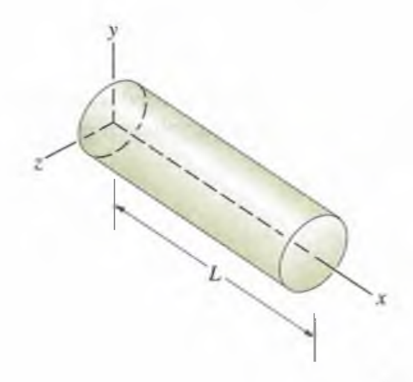
P7.19

7.20 Determine el centroide del área mostrada.



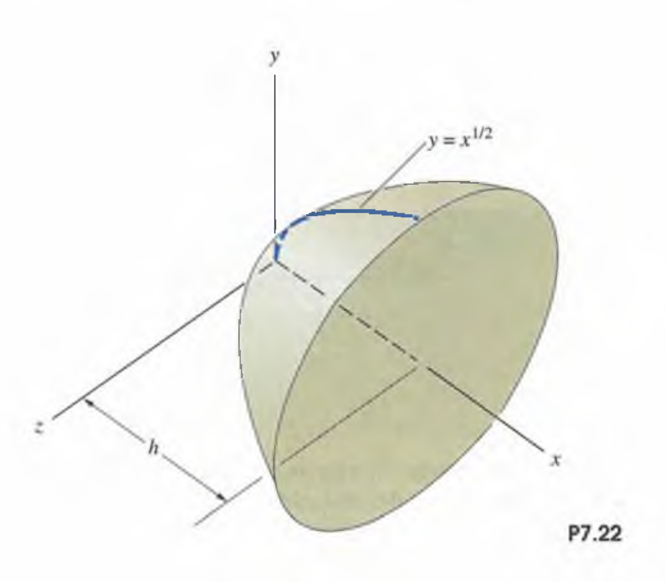
P7.20

7.21 Use el método descrito en el ejemplo 7.3 para verificar que la coordenada x del centroide del volumen cilíndrico sea $\bar{x} = \frac{1}{2}L$.



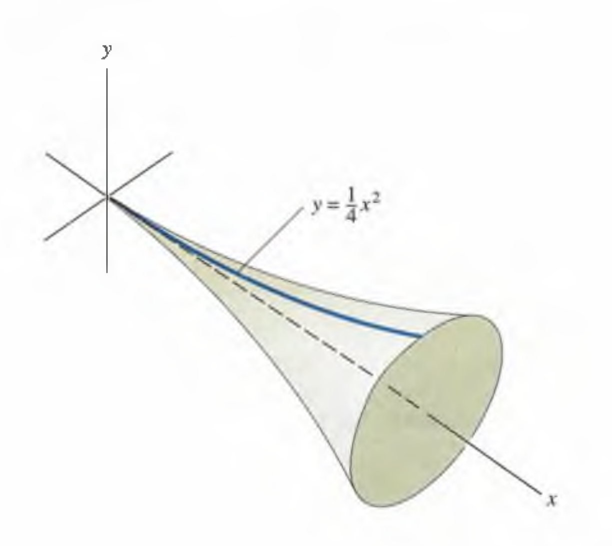
P7.21

7.22 Girando la curva $y = x^{1/2}$ alrededor del eje x se obtiene un volumen de revolución. Determine su centroide.



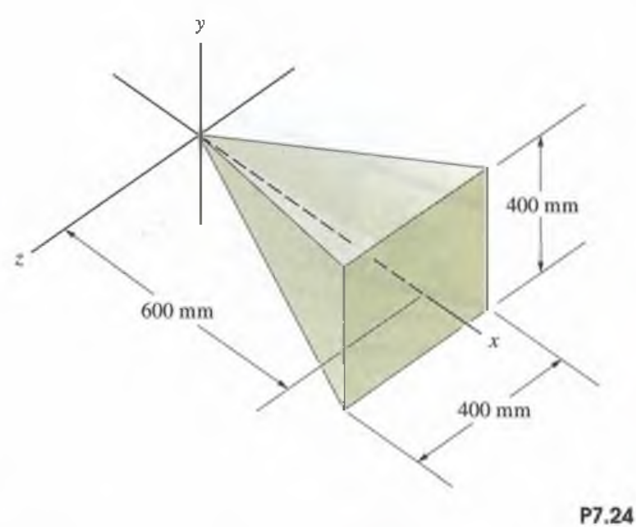
P7.22

7.23 Girando la curva $y = \frac{1}{4}x^2$ alrededor del eje x se obtiene un volumen de revolución. Si su volumen es de 10 m³, determine su centroide.



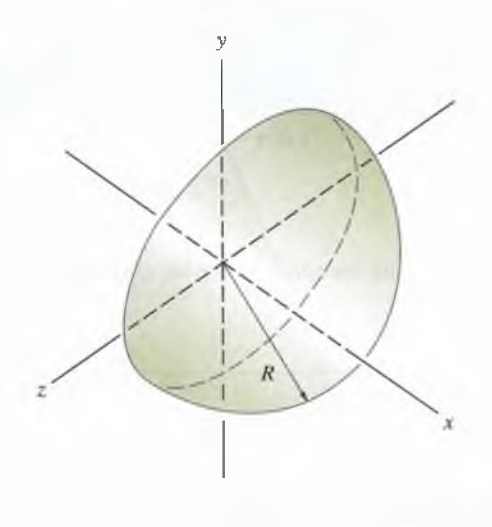
P7.23

7.24 Determine el volumen y el centroide de la pirámide mostrada.



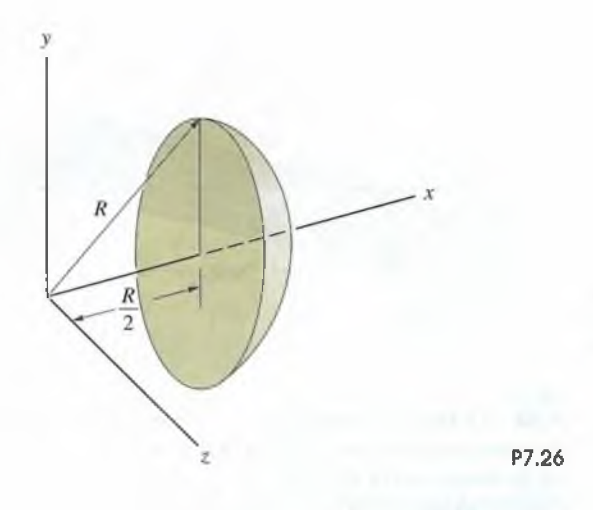
P7.24

7.25 Determine el centroide del volumen semiesférico mostrado.



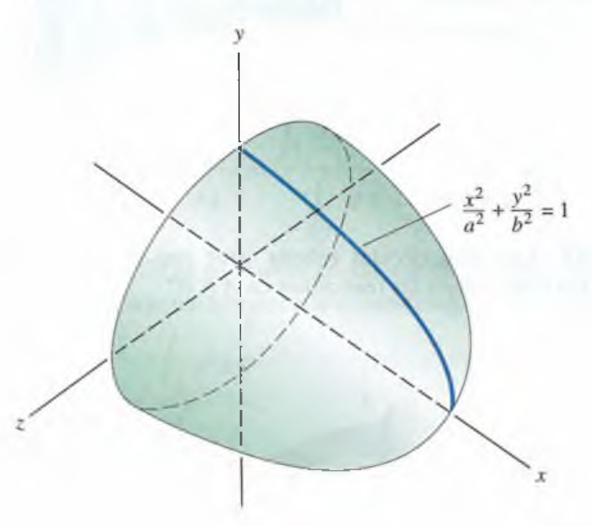
P7.25

7.26 En la figura P7.26, el volumen consiste en un segmento de esfera de radio R. Determine su centroide.



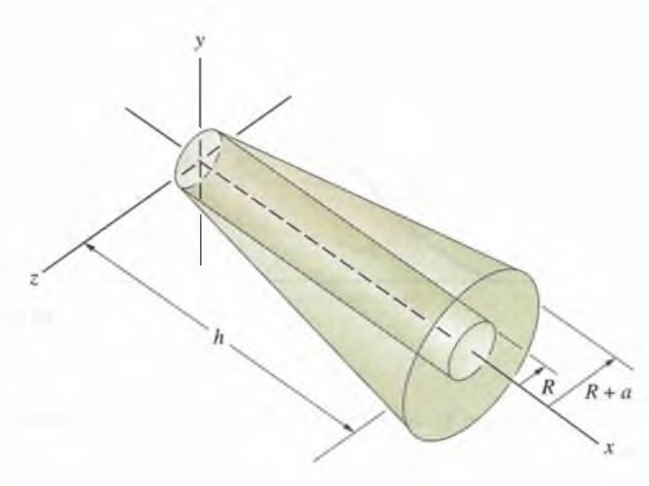
P7.26

7.27 Girando la curva $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ alrededor del eje x se obtiene un volumen de revolución. Determine su centroide.



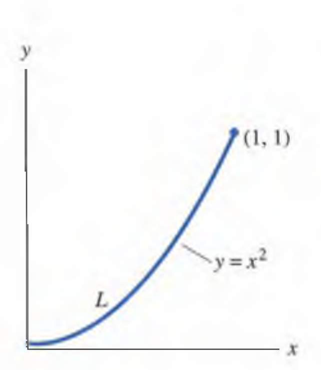
P7.27

7.28 El volumen de revolución tiene un agujero cilíndrico de radio R. Determine su centroide.



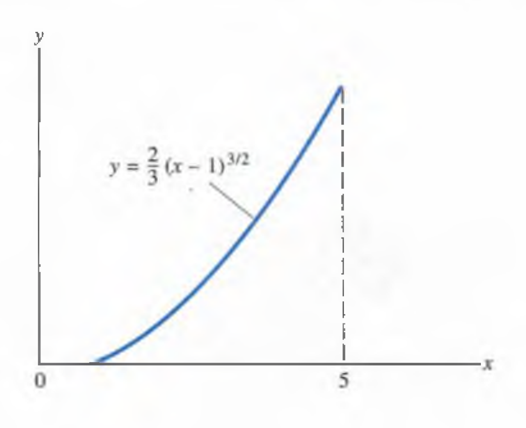
P7.28

7.29 Determine la coordenada y del centroide de la línea (véase el Ej. 7.4).



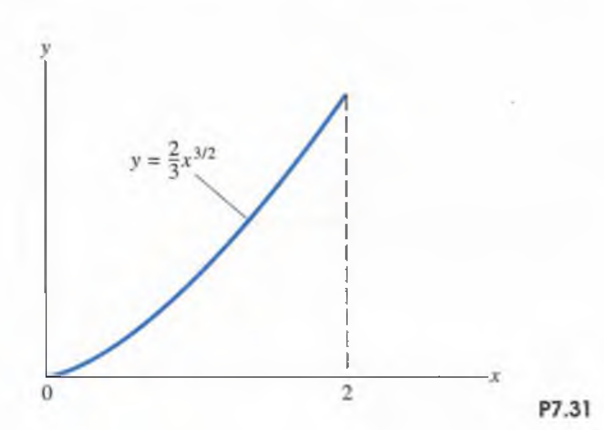
P7.29

7.30 Determine la coordenada x del centroide de la línea mostrada.



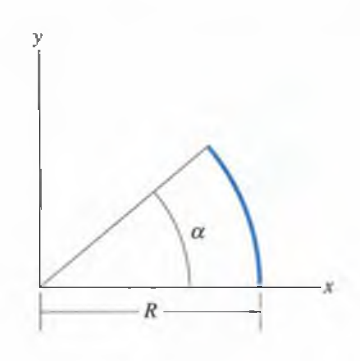
P7.30

7.31 Determine la coordenada x del centroide de la línea mostrada.



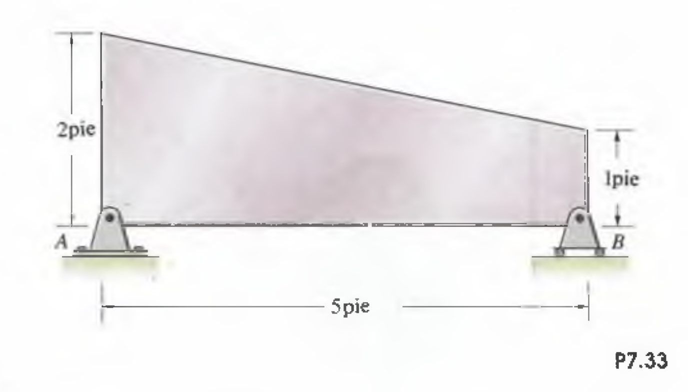
P7.31

7.32 Determine el centroide del arco circular mostrado.



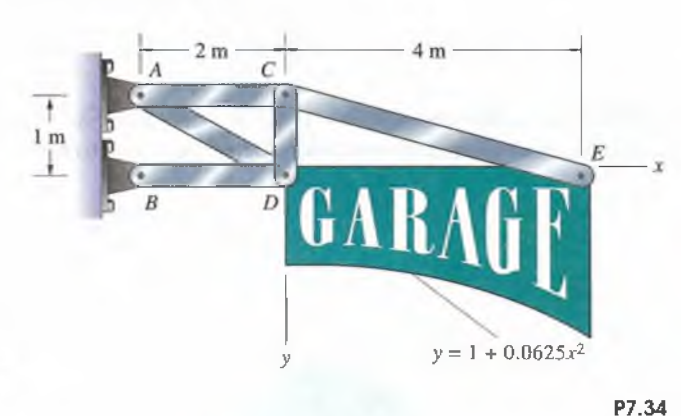
P7.32

7.33 La placa plana homogénea pesa 200 lb. ¿Qué valor tienen las reacciones en A y B?



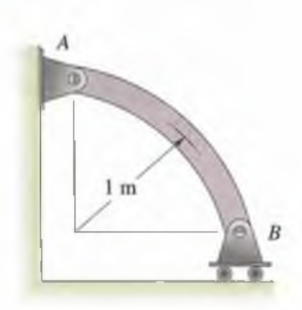
P7.33

7.34 El letrero suspendido consiste en una placa plana homogénea con masa de 130 kg. Determine las fuerzas axiales en las barras AD y CE. (Nótese que la dirección positiva del eje y es hacia abajo)



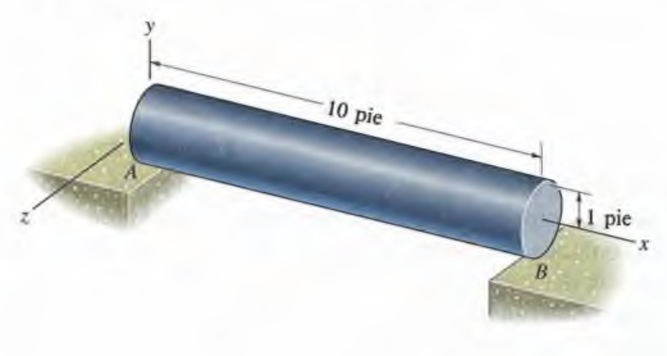
P7.34

7.35 La barra circular esbelta tiene una masa de 20 kg. ¿Qué valor tienen las reacciones en A y B?



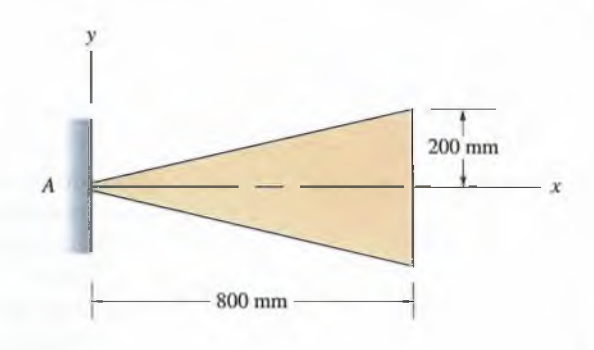
P7.35

7.36 En la figura P7.36, el cilindro horizontal de 10 pies de longitud y 1 pie de radio está apoyado en A y B. Su peso específico está dado por la ecuación $\gamma = 100(1 - 0.002x^2)$ lb/pie^3. ¿Qué valor tienen las reacciones en A y B?



P7.36

7.37 Un cono horizontal tiene 800 mm de longitud y 200 mm de radio y está empotrado en en el punto A de la figura. Su densidad está dada por la ecuación $\rho = 6000\ (1 + 0.4x^2)$ kg/m^3, con x en metros. ¿Qué valor tienen las reacciones en A?



P7.37

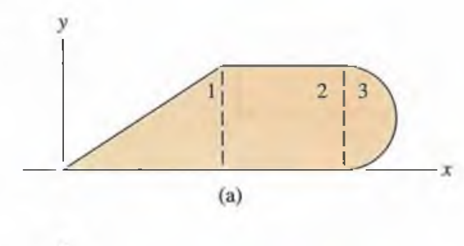
7.2 Elementos compuestos

Un área, un volumen o una línea **compuesta** es una combinacion de partes simples. Es fácil determinar su centroide si se conocen los centroides de las partes.

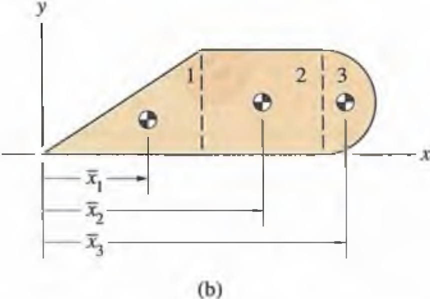
Áreas

El área compuesta de la figura 7.17(a) consiste en un triángulo, un rectángulo y un semicírculo, que llamaremos partes 1, 2 y 3. La coordenada x del centroide del área compuesta es

$$\bar{x} = \frac{\int_A x\,dA}{\int_A dA} = \frac{\int_{A_1} x\,dA + \int_{A_2} x\,dA + \int_{A_3} x\,dA}{\int_{A_1} dA + \int_{A_2} dA + \int_{A_3} dA}. \qquad (7.14)$$



(a)



(b)

Figura 7.17
(a) Área compuesta de tres áreas simples.
(b) Centroides de las partes.

En la figura 7.17(b) se muestran las coordenadas x de los centroides de las partes. De la ecuación para la coordenada x del centroide de la parte 1,

$$\bar{x}_1 = \frac{\int_{A_1} x\,dA}{\int_{A_1} dA},$$

obtenemos

$$\int_{A_1} x\,dA = \bar{x}_1 A_1.$$

Usando esta ecuación y expresiones equivalentes para las partes 2 y 3, podemos escribir la ecuación (7.14) como

$$\bar{x} = \frac{\bar{x}_1 A_1 + \bar{x}_2 A_2 + \bar{x}_3 A_3}{A_1 + A_2 + A_3}.$$

Hemos obtenido una ecuación para la coordenada x del área compuesta en función de las áreas de sus partes. Las coordenadas del centroide de un área compuesta con un número arbitrario de partes son

$$\bar{x} = \frac{\sum_i \bar{x}_i A_i}{\sum_i A_i}, \qquad \bar{y} = \frac{\sum_i \bar{y}_i A_i}{\sum_i A_i}. \tag{7.15}$$

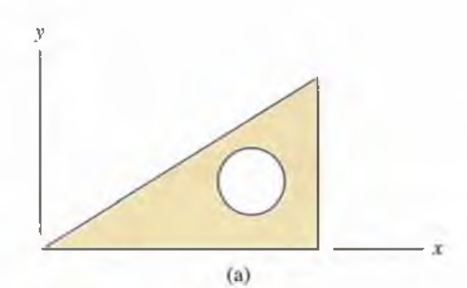
Cuando un área se puede dividir en partes cuyos centroides son conocidos, podemos usar esas expresiones para determinar su centroide. En el apéndice B están tabulados los centroides de algunas áreas simples.

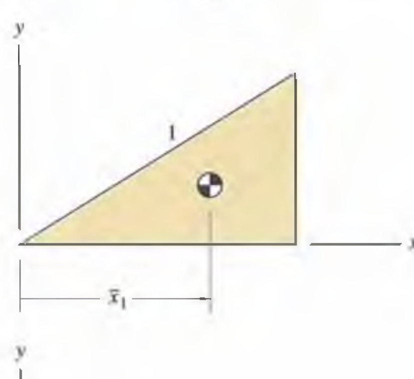
Se inició el análisis del centroide de un área dividiéndola en partes finitas y planteando ecuaciones para su posición de pesos ponderados. Los resultados (Ecs. 7.5), son aproximados por la incertidumbre en las posiciones de las partes del área. Las ecuaciones (7.15) exactas son idénticas excepto que las posiciones de las partes son sus centroides.

El área de la figura 7.18(a) consiste en un área triangular con un "agujero" circular. Designando el área triangular (sin el agujero) como parte 1 del área compuesta y el área del agujero como parte 2 (Fig. 7.18b), obtenemos la coordenada x del centroide del área compuesta:

$$\bar{x} = \frac{\int_{A_1} x\,dA - \int_{A_2} x\,dA}{\int_{A_1} dA - \int_{A_2} dA} = \frac{\bar{x}_1 A_1 - \bar{x}_2 A_2}{A_1 - A_2}.$$

Esta ecuación es idéntica a la primera de las ecuaciones (7.15) excepto que los términos correspondientes al agujero son negativos. Como lo demuestra este ejemplo, se pueden usar las ecuaciones (7.15) para determinar los centroides de áreas compuestas que contengan agujeros, tratando éstos como áreas negativas.





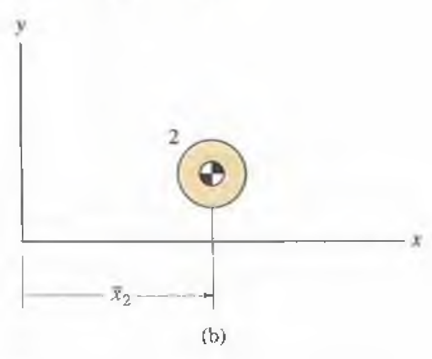


Figura 7.18
(a) Área con un recorte.
(b) Área triangular y área del recorte.

Volúmenes y líneas

Los centroides de volúmenes y líneas compuestos se pueden obtener usando el mismo método que para las áreas. Las coordenadas del centroide de un volumen compuesto son

$$\bar{x} = \frac{\sum_i \bar{x}_i V_i}{\sum_i V_i}, \qquad \bar{y} = \frac{\sum_i \bar{y}_i V_i}{\sum_i V_i}, \qquad \bar{z} = \frac{\sum_i \bar{z}_i V_i}{\sum_i V_i}, \tag{7.16}$$

y las coordenadas del centroide de una línea compuesta son

$$\bar{x} = \frac{\sum_i \bar{x}_i L_i}{\sum_i L_i}, \qquad \bar{y} = \frac{\sum_i \bar{y}_i L_i}{\sum_i L_i}, \qquad \bar{z} = \frac{\sum_i \bar{z}_i L_i}{\sum_i L_i}. \tag{7.17}$$

Los centroides de algunas líneas y volúmenes simples están tabulados en los apéndices B y C.

Centros de masa

Las coordenadas del centro de masa de un cuerpo compuesto de partes con masa m_1, m_2,... son

$$\bar{x} = \frac{\sum_i \bar{x}_i m_i}{\sum_i m_i}, \qquad \bar{y} = \frac{\sum_i \bar{y}_i m_i}{\sum_i m_i}, \qquad \bar{z} = \frac{\sum_i \bar{z}_i m_i}{\sum_i m_i}, \qquad (7.18)$$

donde $\bar{x}_i$, $\bar{y}_i$ y $\bar{z}_i$ son las coordenadas de los centros de masa de las partes. Como los pesos de las partes están relacionados con sus masas por $W_i = gm_i$, las ecuaciones (7.18) también se pueden expresar como

$$\bar{x} = \frac{\sum_i \bar{x}_i W_i}{\sum_i W_i}, \qquad \bar{y} = \frac{\sum_i \bar{y}_i W_i}{\sum_i W_i}, \qquad \bar{z} = \frac{\sum_i \bar{z}_i W_i}{\sum_i W_i}. \qquad (7.19)$$

Cuando se conocen las masas o los pesos y los centros de masa de las partes de un cuerpo compuesto, se pueden usar esas ecuaciones para determinar su centro de masa.

En los siguientes ejemplos determinaremos los centroides de áreas, volúmenes y líneas compuestos, así como los centros de masa de cuerpos compuestos. Se requieren tres pasos (describiremos los pasos para determinar un centroide. Los pasos para determinar un centro de masa son similares.)

1. Escoger las partes. *Trate de dividir el elemento en partes cuyo centroides se conozcan o se puedan determinar con facilidad.*
2. Determinar los valores para las partes. *Determine el centroide y el área, el volumen o la longitud de cada parte. Vea si hay relaciones de simetría que puedan simplificar la tarea.*
3. Calcular el centroide. *Use las ecuaciones (7.15), (7.16) o (7.17) para determinar el centroide del elemento compuesto.*

Ejemplo 7.7

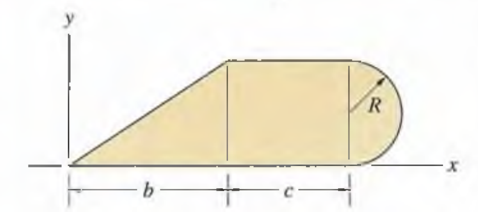


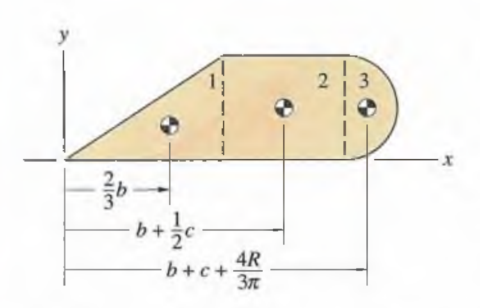
Figura 7.19

Determine el centroide del área de la figura 7.19.

SOLUCIÓN

Selección de las partes Podemos dividir el área en un triángulo, un rectángulo y un semicírculo, que llamaremos partes 1, 2 y 3 respectivamente.

Determinación de los valores de las partes En la figura (a) se muestran las coordenadas x de los centroides de las partes. Las coordenadas x, las áreas de las partes y sus productos se resumen en la tabla 7.1.



(a) Coordenadas x de los centroides de las partes.

Tabla 7.1 Datos para determinar la coordenada x del centroide

	$\bar{x}_i$	A_i	$\bar{x}_i A_i$
Parte 1 (triángulo)	$\frac{2}{3}b$	$\frac{1}{2}b(2R)$	$\left(\frac{2}{3}b\right)\left[\frac{1}{2}b(2R)\right]$
Parte 2 (rectángulo)	$b+\frac{1}{2}c$	$c(2R)$	$\left(b+\frac{1}{2}c\right)[c(2R)]$
Parte 3 (semicírculo)	$b+c+\dfrac{4R}{3\pi}$	$\frac{1}{2}\pi R^2$	$\left(b+c+\dfrac{4R}{3\pi}\right)\left(\frac{1}{2}\pi R^2\right)$

Cálculo del centroide La coordenada x del centroide del área compuesta es

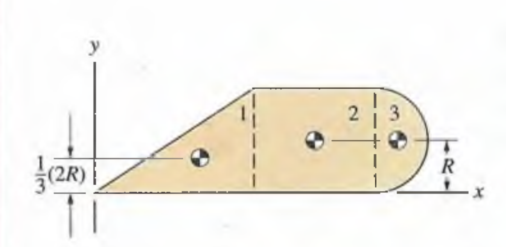
$$\bar{x} = \frac{\bar{x}_1 A_1 + \bar{x}_2 A_2 + \bar{x}_3 A_3}{A_1 + A_2 + A_3}$$

$$= \frac{\left(\frac{2}{3}b\right)\left[\frac{1}{2}b(2R)\right] + \left(b+\frac{1}{2}c\right)[c(2R)] + \left(b+c+\dfrac{4R}{3\pi}\right)\left(\frac{1}{2}\pi R^2\right)}{\frac{1}{2}b(2R) + c(2R) + \frac{1}{2}\pi R^2}.$$

Repetimos los dos últimos pasos para determinar la coordenada y del centroide. En la figura (b) se muestran las ordenadas de los centroides de las partes. Usando la información resumida en la tabla 7.2 obtenemos

$$\bar{y} = \frac{\bar{y}_1 A_1 + \bar{y}_2 A_2 + \bar{y}_3 A_3}{A_1 + A_2 + A_3}$$

$$= \frac{\left[\frac{1}{3}(2R)\right]\left[\frac{1}{2}b(2R)\right] + R[c(2R)] + R\left(\frac{1}{2}\pi R^2\right)}{\frac{1}{2}b(2R) + c(2R) + \frac{1}{2}\pi R^2}.$$



(b) Coordenadas y de los centroides de las partes.

Tabla 7.2 Datos para determinar $\bar{y}$

	$\bar{y}$	A	$\bar{y}A$
Parte 1 (triángulo)	$\frac{1}{3}(2R)$	$\frac{1}{2}b(2R)$	$\left[\frac{1}{3}(2R)\right]\left[\frac{1}{2}b(2R)\right]$
Parte 2 (rectángulo)	R	$c(2R)$	$R[c(2R)]$
Parte 3 (semicírculo)	R	$\frac{1}{2}\pi R^2$	$R\left(\frac{1}{2}\pi R^2\right)$

Ejemplo 7.8

Determine el centroide del área de la figura 7.20.

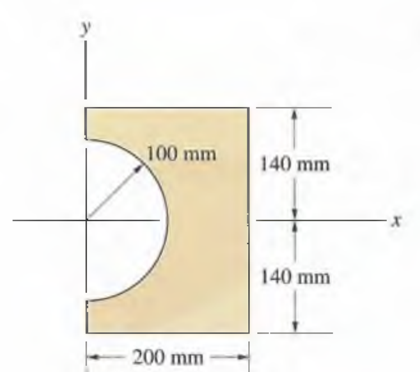


Figura 7.20

SOLUCIÓN

Selección de las partes Trataremos el área como un área compuesta que consista en un rectángulo sin el recorte semicircular y el área del recorte, a las que llamaremos parte 1 y parte 2 respectivamente (Fig. a).

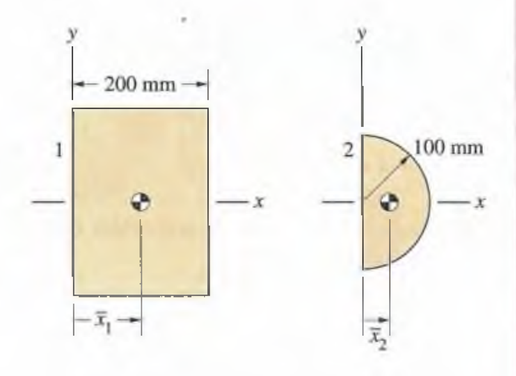
Determinación de los valores de las partes Según el apéndice B, la coordenada x del centroide del recorte es

$$\bar{x}_2 = \frac{4R}{3\pi} = \frac{4(100)}{3\pi} \text{ mm.}$$

En la tabla 7.3 se resume la información para determinar la coordenada x del centroide. Observe que tratamos al recorte como un área negativa.

Tabla 7.3 Datos para determinar $\bar{x}$

	$\bar{x}_i$ (mm)	A_i (mm^2)	$\bar{x}_i A_i$ (mm^3)
Parte 1 (rectángulo)	100	(200)(280)	(100)[(200)(280)]
Parte 2 (recorte)	$\frac{4(100)}{3\pi}$	$-\frac{1}{2}\pi(100)^2$	$-\frac{4(100)}{3\pi}\left[\frac{1}{2}\pi(100)^2\right]$



(a) Rectángulo y recorte semicircular.

Cálculo del centroide La coordenada x del centroide es

$$\bar{x} = \frac{\bar{x}_1 A_1 + \bar{x}_2 A_2}{A_1 + A_2} = \frac{(100)[(200)(280)] - \frac{4(100)}{3\pi}\left[\frac{1}{2}\pi(100)^2\right]}{(200)(280) - \frac{1}{2}\pi(100)^2}$$

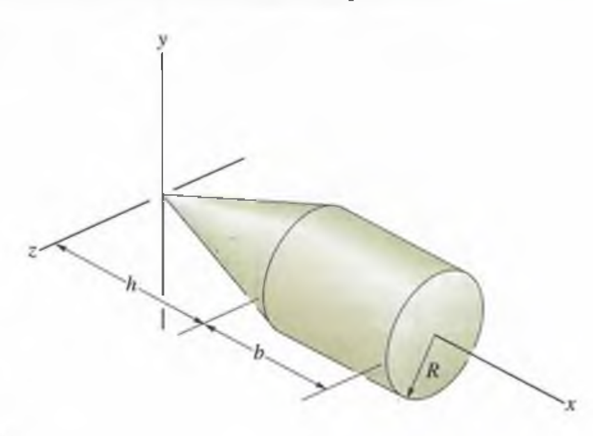
$$= 122.4 \text{ mm.}$$

Debido a la simetría del área, $\bar{y} = 0$.

Ejemplo 7.9

Determine el centroide del volumen de la figura 7.21.

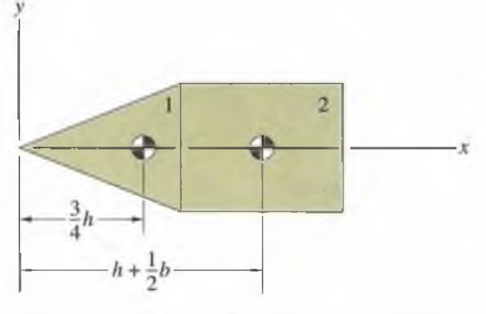
Figura 7.21



SOLUCIÓN

Selección de las partes El volumen consiste en un cono y un cilindro, que llamamos parte 1 y parte 2 respectivamente.

Determinación de los valores de las partes El centroide y el volumen del cono se incluyen en el apéndice C. Las coordenadas x de los centroides de las partes se muestran en la figura (a), y la información para determinar la coordenada x del centroide se resume en la tabla 7.4.



(a) Coordenadas x de los centroides del cono y el cilindro.

Tabla 7.4 Datos para determinar $\bar{x}$

	$\bar{x}_i$	V_i	$\bar{x}_i V_i$
Parte 1 (cono)	$\frac{3}{4}h$	$\frac{1}{3}\pi R^2 h$	$\left(\frac{3}{4}h\right)\left(\frac{1}{3}\pi R^2 h\right)$
Parte 2 (cilindro)	$h + \frac{1}{2}b$	$\pi R^2 b$	$\left(h + \frac{1}{2}b\right)\left(\pi R^2 b\right)$

Cálculo del centroide La coordenada x del centroide del volumen compuesto es

$$\bar{x} = \frac{\bar{x}_1 V_1 + \bar{x}_2 V_2}{V_1 + V_2} = \frac{\left(\frac{3}{4}h\right)\left(\frac{1}{3}\pi R^2 h\right) + \left(h + \frac{1}{2}b\right)\left(\pi R^2 b\right)}{\frac{1}{3}\pi R^2 h + \pi R^2 b}.$$

Debido a la simetría, $\bar{y} = 0$ y $\bar{z} = 0$.

Ejemplo 7.10

Determine el centroide del volumen de la figura 7.22.

SOLUCIÓN

Selección de las partes Podemos dividir el volumen en las cinco partes de la figura (a). La parte 5 es el volumen del agujero de 20 mm de diámetro.

Determinación de los valores de las partes Los centroides de las partes 1 y 3 se localizan en los centroides de sus secciones transversales simicirculares (Fig. b). En la tabla 7.5 se resume la información para determinar la coordenada x del centroide. La parte 5 es un volumen negativo.

Tabla 7.3 Datos para determinar $\bar{x}$

	$\bar{x}_i$ (mm)	V_i (mm^3)	$\bar{x}_i V_i$ (mm^4)
Parte 1	$-\dfrac{4(25)}{3\pi}$	$\dfrac{\pi(25)^2}{2}(20)$	$\left[-\dfrac{4(25)}{3\pi}\right]\left[\dfrac{\pi(25)^2}{2}(20)\right]$
Parte 2	100	(200)(50)(20)	(100)[(200)(50)(20)]
Parte 3	$200+\dfrac{4(25)}{3\pi}$	$\dfrac{\pi(25)^2}{2}(20)$	$\left[200+\dfrac{4(25)}{3\pi}\right]\left[\dfrac{\pi(25)^2}{2}(20)\right]$
Parte 4	0	$\pi(25)^2(40)$	0
Parte 5	200	$-\pi(10)^2(20)$	$-(200)[\pi(10)^2(20)]$

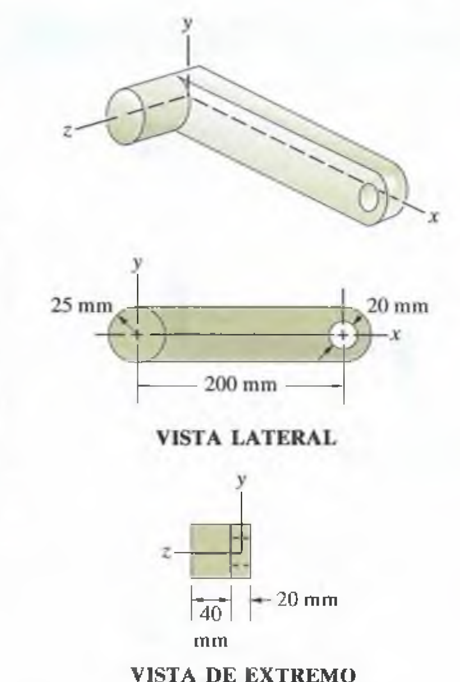


Figura 7.22

Cálculo del centroide La coordenada x del centroide del volumen compuesto es

$$\bar{x} = \frac{\bar{x}_1V_1+\bar{x}_2V_2+\bar{x}_3V_3+\bar{x}_4V_4+\bar{x}_5V_5}{V_1+V_2+V_3+V_4+V_5}$$

$$= \frac{\left\{\left[-\dfrac{4(25)}{3\pi}\right]\left[\dfrac{\pi(25)^2}{2}(20)\right]+(100)[(200)(50)(20)] + \left[200+\dfrac{4(25)}{3\pi}\right]\left[\dfrac{\pi(25)^2}{2}(20)\right]+(0)-(200)[\pi(10)^2(20)]\right\}}{\dfrac{\pi(25)^2}{2}(20)+(200)(50)(20)+\dfrac{\pi(25)^2}{2}(20)+\pi(25)^2(40)-\pi(10)^2(20)}$$

$$= 72.77 \text{ mm}.$$

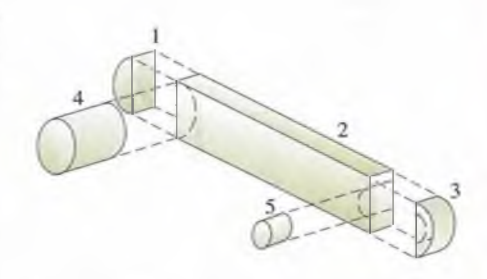
Las coordenadas z de los centroides de las partes son iguales a cero, excepto $\bar{z}_4 = 30$ mm. Por consiguiente, la coordenada z del centroide del volumen compuesto es

$$\bar{z} = \frac{\bar{z}_4V_4}{V_1+V_2+V_3+V_4+V_5}$$

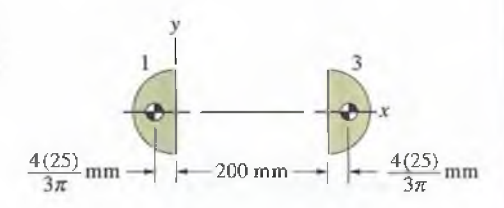
$$= \frac{30[\pi(25)^2(40)]}{\dfrac{\pi(25)^2}{2}(20)+(200)(50)(20)+\dfrac{\pi(25)^2}{2}(20)+\pi(25)^2(40)-\pi(10)^2(20)}$$

$$= 7.56 \text{ mm}.$$

Debido a la simetría, $\bar{y} = 0$.



(a) División del volumen en cinco partes.



(b) Posiciones de los centroides de las partes 1 y 3.

Ejemplo 7.11

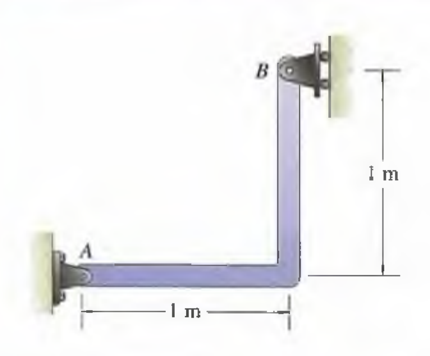


Figura 7.23

La masa de la barra homogénea esbelta de la figura 7.23 es de 80 kg. ¿Qué valor tienen las reacciones en A y B?

ESTRATEGIA

Determinamos las reacciones de dos maneras:

Primer método Representamos el peso de cada segmento recto de la barra con una fuerza que actúa en el centro de masa del segmento.

Segundo método Determinamos el centro de masa de la barra determinando el centroide de su eje y representando el peso de la barra con una sola fuerza que actúa en el centro de masa.

SOLUCIÓN

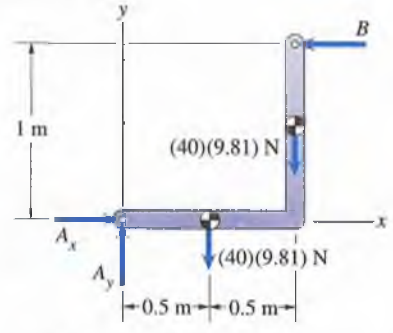
Primer método En el diagrama de cuerpo libre de la figura (a), colocamos la mitad del peso de la barra en el centro de masa de cada segmento recto. De las ecuaciones de equilibrio

$$\Sigma F_x = A_x - B = 0,$$

$$\Sigma F_y = A_y - (40)(9.81) - (40)(9.81) = 0,$$

$$\Sigma M_{(\text{punto } A)} = (1)B - (1)(40)(9.81) - (0.5)(40)(9.81) = 0,$$

obtenemos $A_x = 588.6$ N, $A_y = 784.8$ N y $B = 588.6$ N.

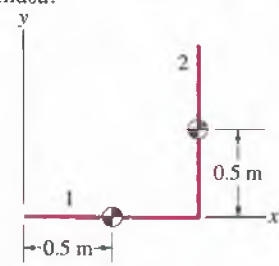


(a) Colocación de los pesos de los segmentos rectos en sus centros de masa.

Segundo método Podemos tratar el eje de la barra como una línea compuesta de dos segmentos rectos (Fig. b). Las coordenadas del centroide de la línea compuesta son

$$\bar{x} = \frac{\bar{x}_1 L_1 + \bar{x}_2 L_2}{L_1 + L_2} = \frac{(0.5)(1) + (1)(1)}{1 + 1} = 0.75 \text{ m},$$

$$\bar{y} = \frac{\bar{y}_1 L_1 + \bar{y}_2 L_2}{L_1 + L_2} = \frac{(0)(1) + (0.5)(1)}{1 + 1} = 0.25 \text{ m}.$$



(b) Centroides de los segmentos rectos del eje.

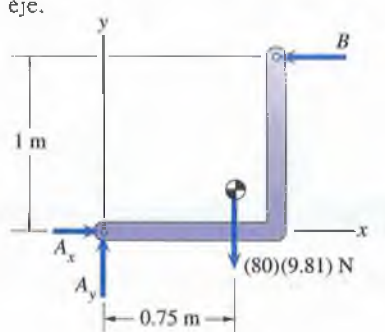
En el diagrama de cuerpo libre de la figura (c) colocamos el peso de la barra en su centro de masa. De las ecuaciones de equilibrio

$$\Sigma F_x = A_x - B = 0,$$

$$\Sigma F_y = A_y - (80)(9.81) = 0,$$

$$\Sigma M_{(\text{punto } A)} = (1)B - (0.75)(80)(9.81) = 0,$$

obtenemos de nuevo $A_x = 588.6$ N, $A_y = 784.8$ N y $B = 588.6$ N.



(c) Colocación del peso de la barra en su centro de masa.

Ejemplo 7.12

La pieza está compuesta de dos barras homogéneas. La barra 1 es de una aleación de tungsteno con densidad de 14 000 kg/m^3, mientras que la barra 2 es de acero con densidad de 7800 kg/m^3. Determine el centro de masa.

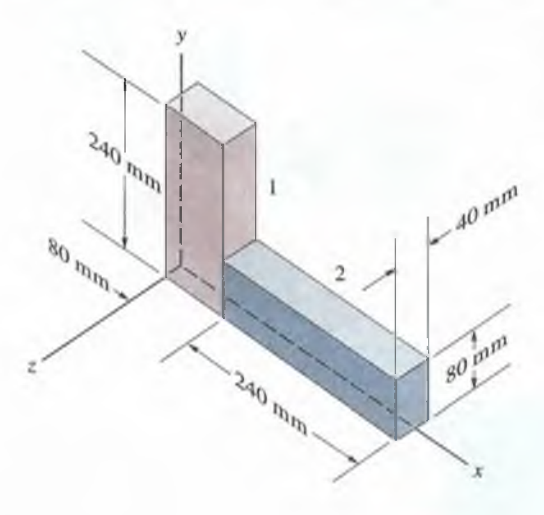


Figura 7.24
Parte de máquina en forma de L que consiste en dos barras homogéneas.

SOLUCIÓN

El volumen de la barra 1 es

$$(80)(240)(40) = 7.68 \times 10^5 \text{ mm}^3 = 7.68 \times 10^{-4} \text{ m}^3,$$

por lo que su masa es $(7.68 \times 10^{-4})(1.4 \times 10^4) = 10.75$ kg. El centro de masa de la barra 1 coincide con el centroide de su volumen, $\bar{x}_1 = 40$ mm, $\bar{y}_1 = 120$ mm, $\bar{z}_1 = 0$.

La barra 2 tiene el mismo volumen que la barra 1 y su masa es $(7.68 \times 10^{-4})(7.8 \times 10^3) = 5.99$ kg. Las coordenadas de su centro de masa son $\bar{x}_2 = 200$ mm, $\bar{y}_2 = 40$ mm, $\bar{z}_2 = 0$. Usando la información resumida en la tabla 7.6, obtenemos la coordenada x del centro de masa,

$$\bar{x} = \frac{\bar{x}_1 m_1 + \bar{x}_2 m_2}{m_1 + m_2} = \frac{(40)(10.75) + (200)(5.99)}{10.75 + 5.99} = 97.2 \text{ mm},$$

y la coordenada y,

$$\bar{y} = \frac{\bar{y}_1 m_1 + \bar{y}_2 m_2}{m_1 + m_2} = \frac{(120)(10.75) + (40)(5.99)}{10.75 + 5.99} = 91.4 \text{ mm}.$$

Debido a la simetría del cuerpo, $\bar{z} = 0$.

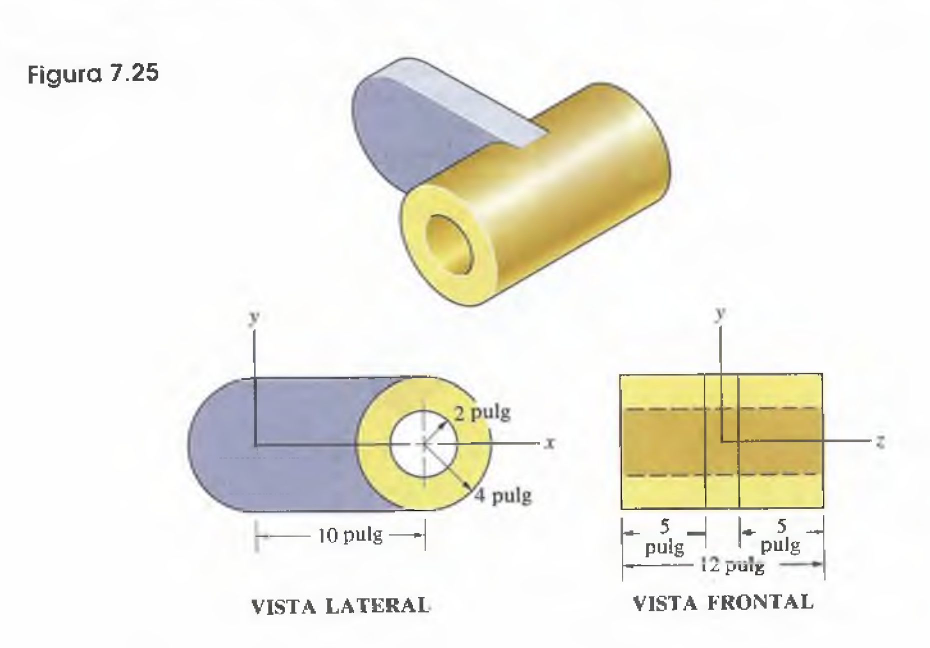
Tabla 7.6 Datos para determinar el centro de masa

	m_i (kg)	$\bar{x}_i$ (mm)	$\bar{x}_i m_i$ (mm-kg)	$\bar{y}_i$ (mm)	$\bar{y}_i m_i$ (mm-kg)
Barra 1	10.75	40	(40)(10.75)	120	(120)(10.75)
Barra 2	5.99	200	(200)(5.99)	40	(40)(5.99)

Ejemplo 7.13

En la figura 7.25 el cuerpo compuesto consiste en una barra soldada a un cilindro. La barra homogénea es de aluminio (peso específico = 168 lb/pie^3) y el cilindro homogéneo es de bronce (peso específico = 530 lb/pie^3). Determine el centro de masa del cuerpo.

Figura 7.25



ESTRATEGIA

Podemos determinar el peso de cada una de las partes homogéneas multiplicando su volumen por su peso específico. Sabemos también que el centro de masa de cada parte coincide con el centroide de su volumen. El centroide del cilindro se localiza en su centro, pero debemos determinar la localización del centroide de la barra tratándola como un volumen compuesto.

SOLUCIÓN

El volumen del cilindro es $12[\pi(4)^2 - \pi(2)^2] = 452 \text{ pulg}^3 = 0.262 \text{ pie}^3$, por lo que su peso es

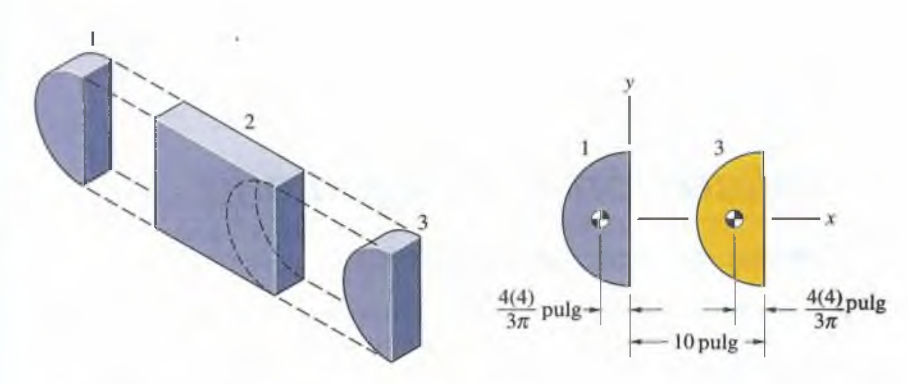
$$W_{(\text{cilindro})} = (0.262)(530) = 138.8 \text{ lb}.$$

La coordenada x de su centro de masa es $\bar{x}_{(\text{cilindro})} = 10$ pulg.

El volumen de la barra es $(10)(8)(2) + \frac{1}{2}\pi(4)^2(2) - \frac{1}{2}\pi(4)^2(2) = 160 \text{ pulg}^3 = 0.0926 \text{ pie}^3$ y su peso es

$$W_{(\text{barra})} = (0.0926)(168) = 15.6 \text{ lb}.$$

Podemos determinar el centroide del volumen de la barra tratando ésta como un volumen compuesto que consta de tres partes (Fig. a). La parte 3 es un "recorte" semicircular. Los centroides de la parte 1 y del recorte semicircular



(a) División de la barra en tres partes. **(b)** Centroides de las dos partes semicirculares.

Tabla 7.7 Datos para determinar la coordenada x del centroide de la barra

	$\bar{x}_i$ (pulg)	V_i (pulg^3)	$\bar{x}_i V_i$ (pulg^4)
Parte 1	$-\dfrac{4(4)}{3\pi}$	$\frac{1}{2}\pi(4)^2(2)$	$-\dfrac{4(4)}{3\pi}\left[\frac{1}{2}\pi(4)^2(2)\right]$
Parte 2	5	(10)(8)(2)	5[(10)(8)(2)]
Parte 3	$10-\dfrac{4(4)}{3\pi}$	$-\frac{1}{2}\pi(4)^2(2)$	$-\left[10-\dfrac{4(4)}{3\pi}\right]\left[\frac{1}{2}\pi(4)^2(2)\right]$

3 se localizan en los centroides de sus secciones transversales semicirculares (Fig. b). Usando la información resumida en la tabla 7.7, tenemos

$$\bar{x}_{(\text{barra})} = \frac{\bar{x}_1 V_1 + \bar{x}_2 V_2 + \bar{x}_3 V_3}{V_1 + V_2 + V_3}$$

$$= \frac{-\dfrac{4(4)}{3\pi}\left[\frac{1}{2}\pi(4)^2(2)\right] + 5[(10)(8)(2)] - \left[10 - \dfrac{4(4)}{3\pi}\right]\left[\frac{1}{2}\pi(4)^2(2)\right]}{\frac{1}{2}\pi(4)^2(2) + (10)(8)(2) - \frac{1}{2}\pi(4)^2(2)}$$

$$= 1.86 \text{ pulg.}$$

Por consiguiente, la coordenada x del centro de masa del cuerpo compuesto es

$$\bar{x} = \frac{\bar{x}_{(\text{barra})} W_{(\text{barra})} + \bar{x}_{(\text{cilindro})} W_{(\text{cilindro})}}{W_{(\text{barra})} + W_{(\text{cilindro})}}$$

$$= \frac{(1.86)(15.6) + (10)(138.8)}{15.6 + 138.8} = 9.18 \text{ pulg.}$$

Debido a la simetría de la barra, las coordenadas y y z de su centro de masa son $\bar{y} = 0$ y $\bar{z} = 0$.

Ejemplo 7.14

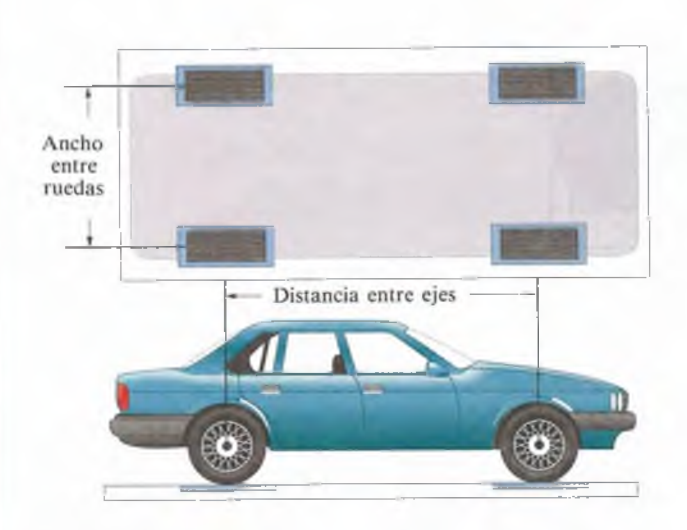
Aplicación a la ingeniería

Centros de masa de vehículos

Un automóvil se coloca sobre una plataforma que mide la fuerza normal ejercida por cada neumático en forma independiente (Fig. 7.26). En la tabla 7.8 se muestran los pesos registrados con las plataformas horizontal e inclinada a $\alpha = 15°$. Determine la posición del centro de masa del automóvil.

Tabla 7.8 Mediciones de las fuerzas normales ejercidas por los neumáticos

Distancia entre ejes = 111 pulg Ancho entre ruedas = 60.9 pulg	Cargas medidas (lb)	
	$\alpha = 0$	$\alpha = 15°$
Rueda frontal izquierda, N_{LF}	1147.5	1003.4
Rueda frontal derecha, N_{RF}	1130.2	988.3
Rueda trasera izquierda, N_{LR}	812.2	889.5
Rueda trasera derecha, N_{RR}	800.1	876.3



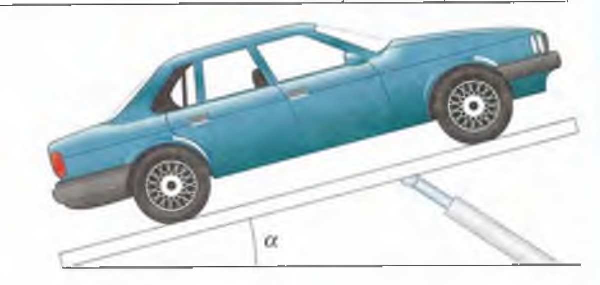


Figura 7.26

SOLUCIÓN

Dibujamos el diagrama de cuerpo libre del automóvil con la plataforma en posición horizontal (Figs. a y b). El peso del automóvil es

$$W = N_{LF} + N_{RF} + N_{LR} + N_{RR} = 1147.5 + 1130.2 + 812.2 + 800.1$$

$$= 3890.0 \text{ lb}.$$

De la figura (a), obtenemos la ecuación de equilibrio

$$\Sigma M_{(\text{eje } z)} = (\text{Distancia entre ejes})(N_{LF} + N_{RF}) - \bar{x}W = 0,$$

de la que podemos despejar $\bar{x}$:

$$\bar{x} = \frac{(\text{Distancia entre ejes})(N_{LF} + N_{RF})}{W} = \frac{(111)(1147.5 + 1130.2)}{3890.0} = 65.0 \text{ pulg}.$$

De la figura (b),

$$\Sigma M_{(\text{eje } x)} = \bar{z}W - (\text{Ancho entre ruedas})(N_{RF} + N_{RR}) = 0,$$

de la que podemos despejar $\bar{z}$:

$$\bar{z} = \frac{(\text{Ancho entre ruedas})(N_{RF} + N_{RR})}{W} = \frac{(60.9)(1130.2 + 800.1)}{3890.0} = 30.2 \text{ pulg.}$$

Ahora que conocemos $\bar{x}$, podemos determinar $\bar{y}$ a partir del diagrama de cuerpo libre del automóvil cuando la plataforma está inclinada (Fig. c). De la ecuación de equilibrio

$$\Sigma M_{(\text{eje }z)} = (\text{Distancia entre ejes})(N_{LF} + N_{RF}) + \bar{y}W \text{ sen } 15° - \bar{x}W \cos 15° = 0,$$

obtenemos

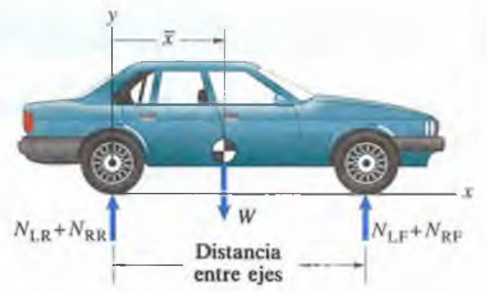
$$\bar{y} = \frac{\bar{x}W \cos 15° - (\text{Distancia entre ejes})(N_{LF} + N_{RF})}{W \text{ sen } 15°}$$

$$= \frac{(65.0)(3890.0)\cos 15° - (111)(1003.4 + 988.3)}{(3890) \text{ sen } 15°} = 23.0 \text{ pulg.}$$

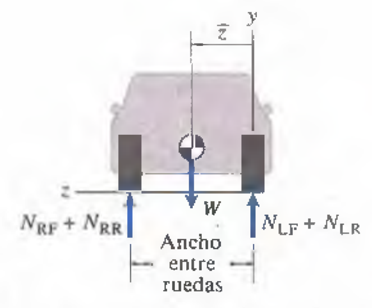
Observe que no podríamos haber determinado $\bar{y}$ sin las mediciones hechas con el automóvil en la posición inclinada.

CONSIDERACIONES DE DISEÑO

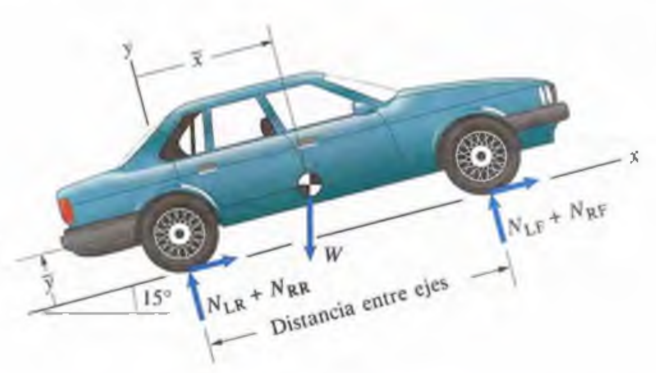
El centro de masa de un vehículo afecta su operación y desempeño. Las fuerzas ejercidas sobre las suspensiones y ruedas de los automóviles y vagones de trenes, las tracciones que generan sus ruedas, así como sus comportamientos dinámicos, dependen de las posiciones de sus centros de masa. El comportamiento de los aeroplanos depende de las posiciones de sus centros de masa, y no pueden volar a menos que sus centros de masa se encuentren dentro de los límites prescritos. Al diseñar vehículos, la posición del centro de masa es uno de los parámetros que determinan su configuración y la disposición de sus partes. Al probar nuevos diseños de vehículos terrestres y aéreos, la posición del centro de masa depende de la configuración del vehículo particular y de los pesos y posiciones de sus partes y de los pasajeros. Suele ser necesario localizar experimentalmente el centro de masa, por medio de un procedimiento como el que hemos descrito. Tales medidas experimentales se usan también para verificar las posiciones de los centros de masa predichos por los cálculos efectuados durante el diseño.



(a) Vista lateral del diagrama de cuerpo libre con la plataforma horizontal.



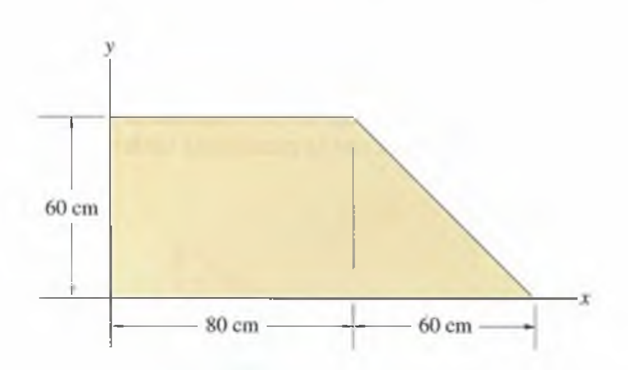
(b) Vista frontal del diagrama de cuerpo libre con la plataforma horizontal.



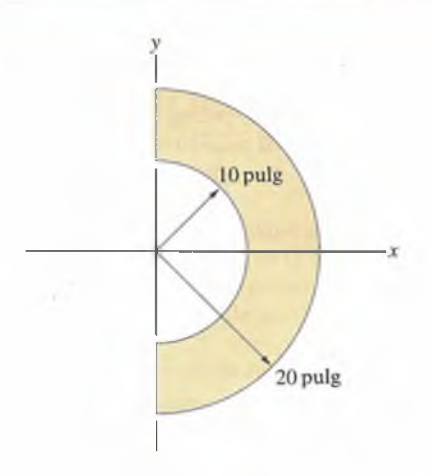
(c) Vista lateral del diagrama de cuerpo libre con la plataforma inclinada.

Problemas

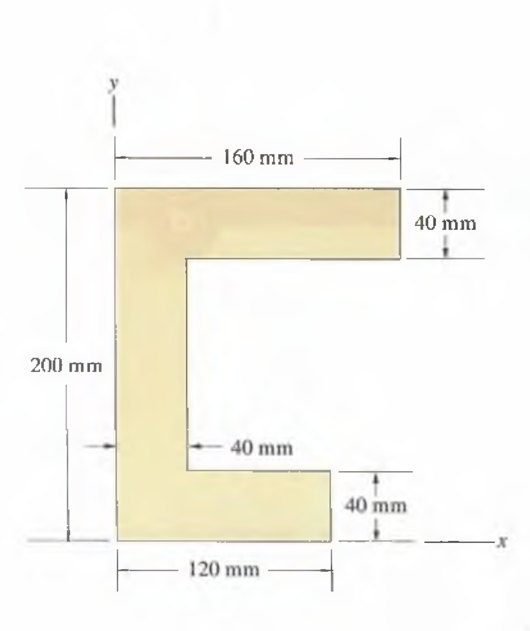
En los problemas 7.38 a 7.46 determine los centroides de las áreas.



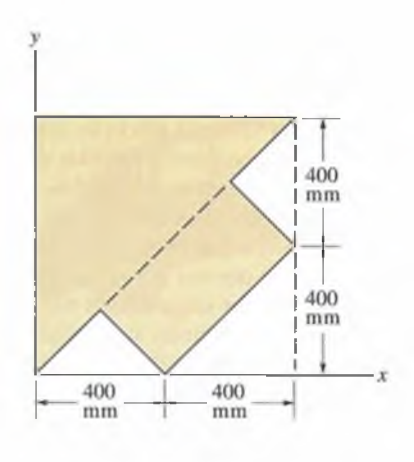
P7.38



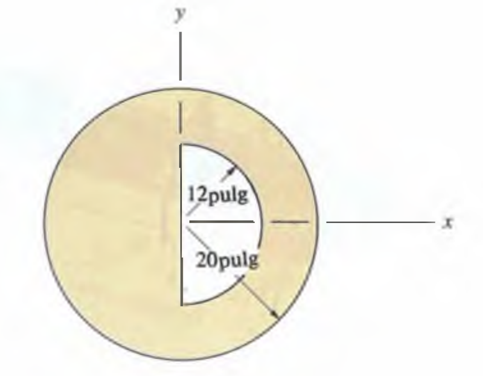
P7.40



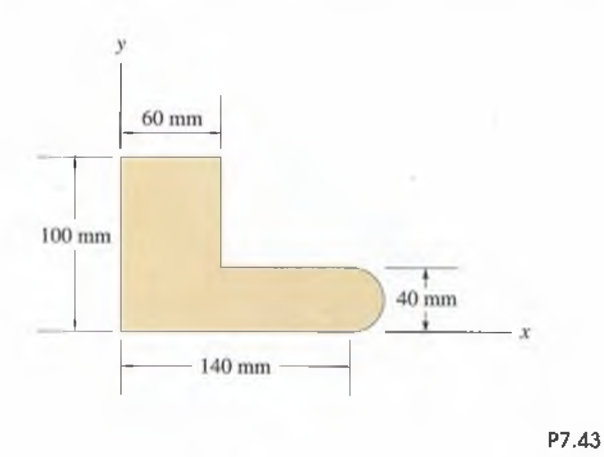
P7.39



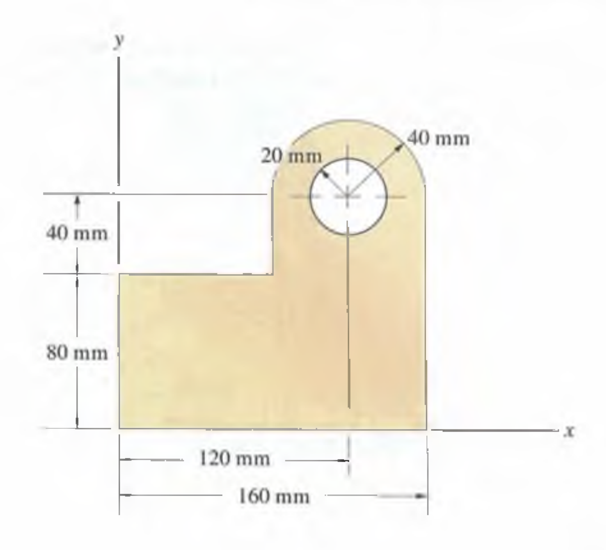
P7.41



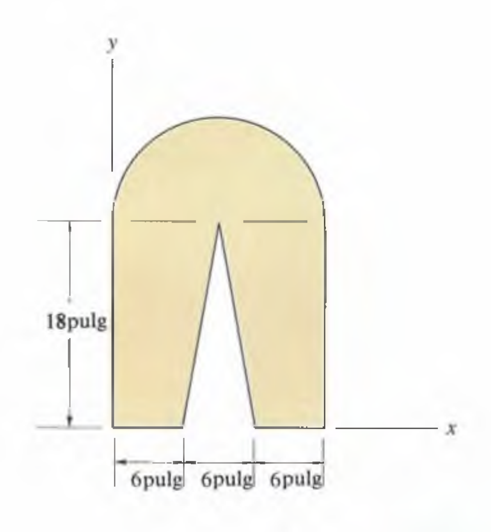
P7.42



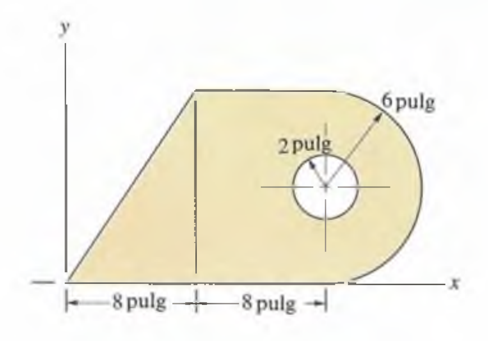
P7.43



P7.46

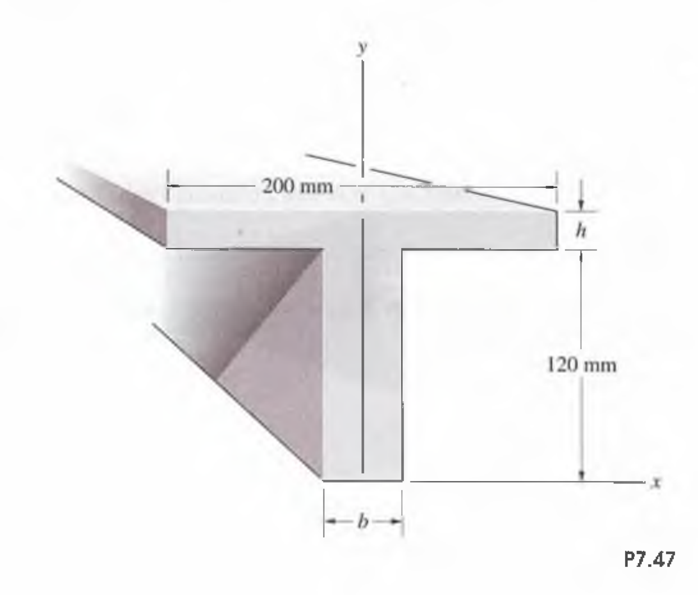


P7.44



P7.45

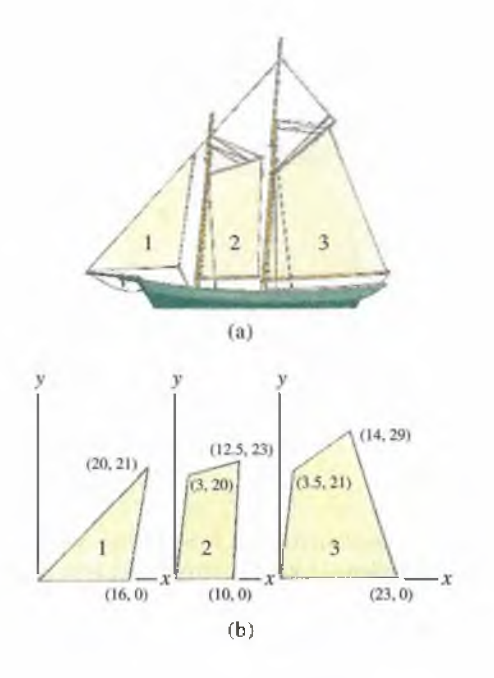
7.47 Se tienen las dimensiones $b = 40$ mm y $h = 20$ mm. Determine la coordenada y del centroide del área mostrada.



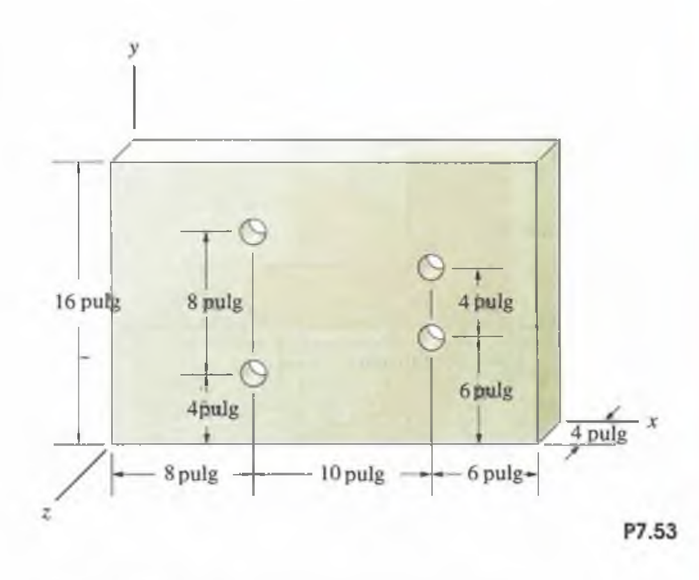
P7.47

7.48 El área del problema 7.47 es la sección transversal de una viga. Si la sección transversal de la viga es $A = 0.01$ m^2 y la coordenada y del centroide del área es $\bar{y} = 80$ mm, ¿qué valor tienen las dimensiones b y h?

Problemas 7.49-7.51: se muestran las tres velas de un velero. Las coordenadas de los puntos están en pies.



P7.49



P7.53

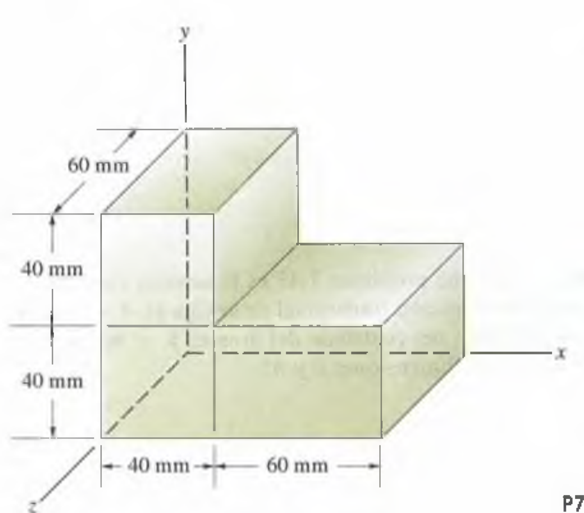
Los agujeros tienen 3 pulg de diámetro

7.49 Determine el centroide de la vela 1.

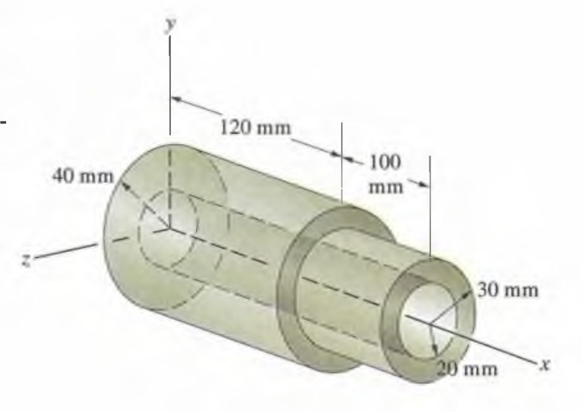
7.50 Determine el centroide de la vela 2 (véase el Prob. 7.49).

7.51 Determine el centroide de la vela 3 (véase el Prob. 7.49).

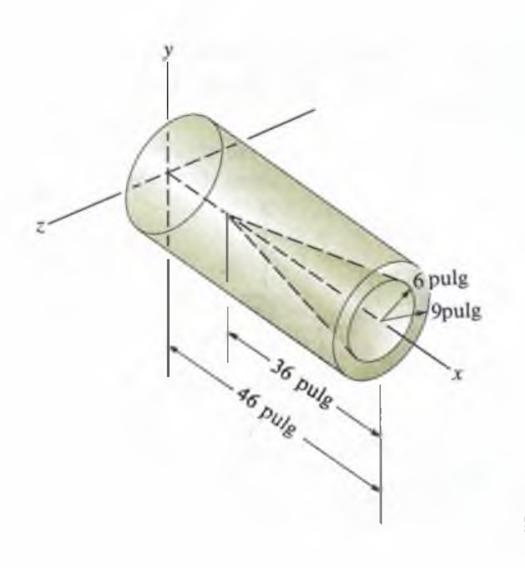
En los problemas 7.52 a 7.57 determine los centroides de los volúmenes.



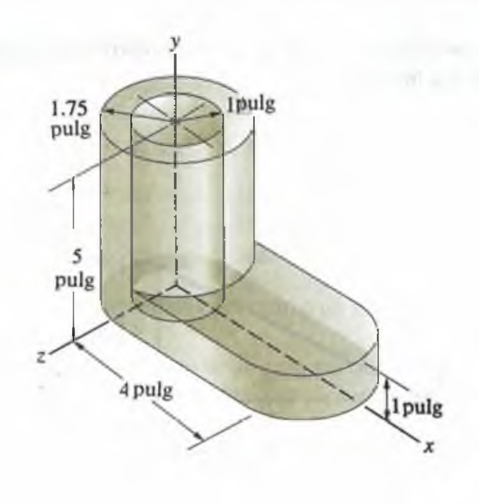
P7.52



P7.54

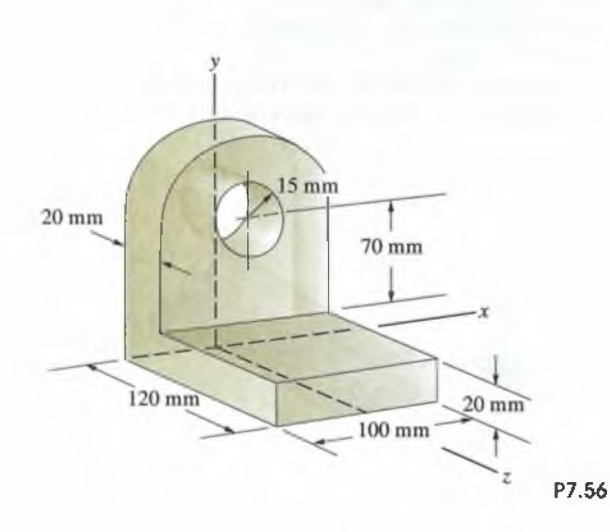


P7.55

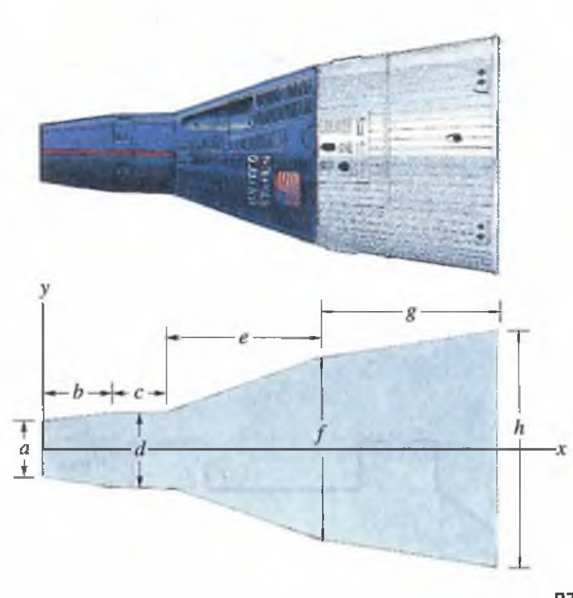


P7.57

7.58 Las dimensiones (en metros) del vehículo espacial *Gemini* mostrado en la figura son: a = 0.70, b = 0.88, c = 0.74, d = 0.98, e = 1.82, f = 2.20, g = 2.24 y h = 2.98. Determine el centroide de su volumen.

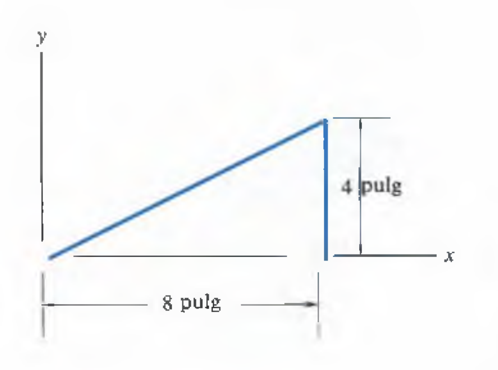


P7.56

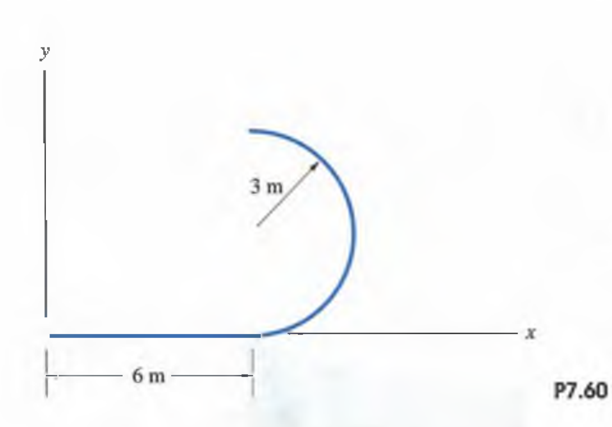


P7.58

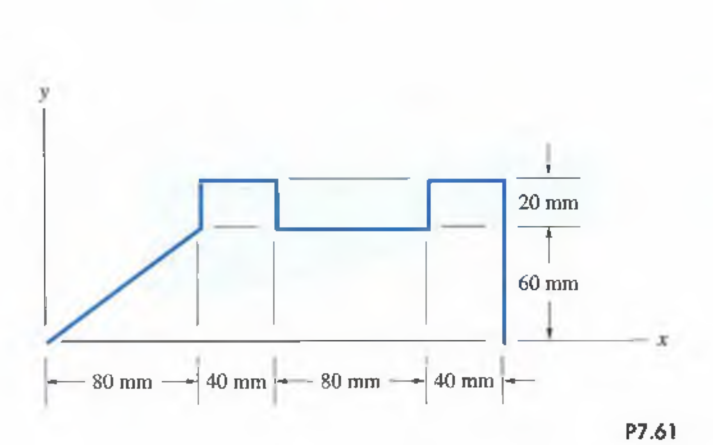
En los problemas 7.59 a 7.61 determine los centroides de las líneas.



P7.59

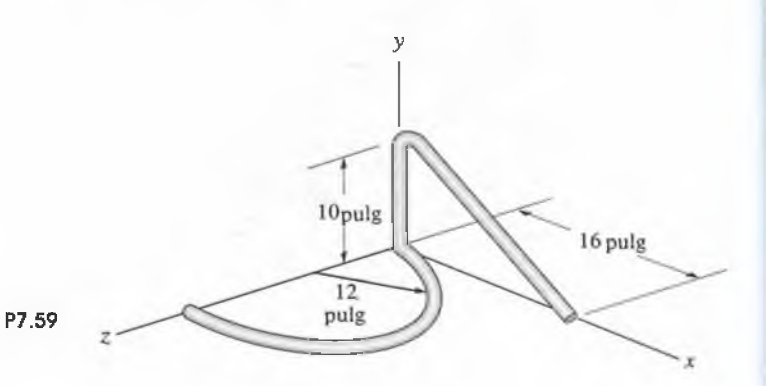


P7.60



P7.61

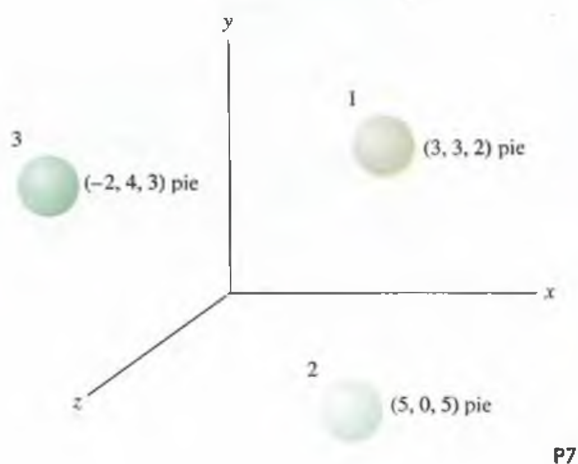
7.62 La parte semicircular de la barra homogénea y esbelta descansa en el plano x-z mostrado. Determine el centro de masa de la barra.



P7.62

7.63 El siguiente teorema *no* es verdadero: "El centroide de cualquier área coincide con el centroide de la línea que forma su frontera". Demuestre la falsedad del teorema por medio de un contraejemplo, es decir, encuentre un ejemplo en el que no se cumpla tal aseveración.

7.64 Se muestran las posiciones de los centros de tres esferas homogéneas de radios iguales. La densidad de la esfera 1 es ρ_0, la densidad de la esfera 2 es 1.2 ρ_0 y la densidad de la esfera 3 es 1.4 ρ_0.
(a) Determine el centroide del volumen de las tres esferas.
(b) Determine el centro de masa de las tres esferas.

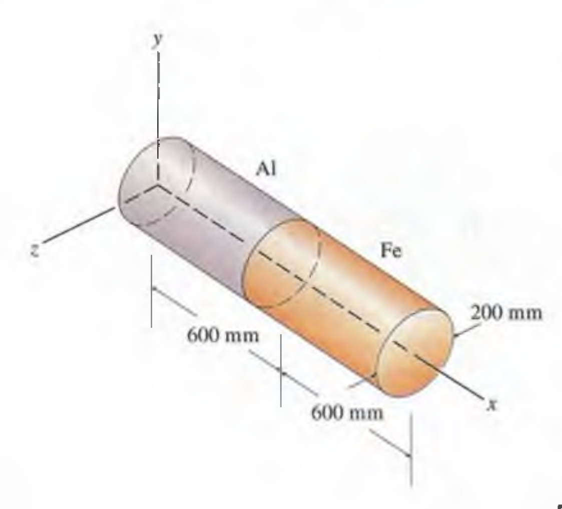


P7.64

7.65 El cilindro circular mostrado está hecho de aluminio (Al) con densidad de 2700 kg/m^3 y hierro (Fe) con densidad de 7860 kg/m^3.

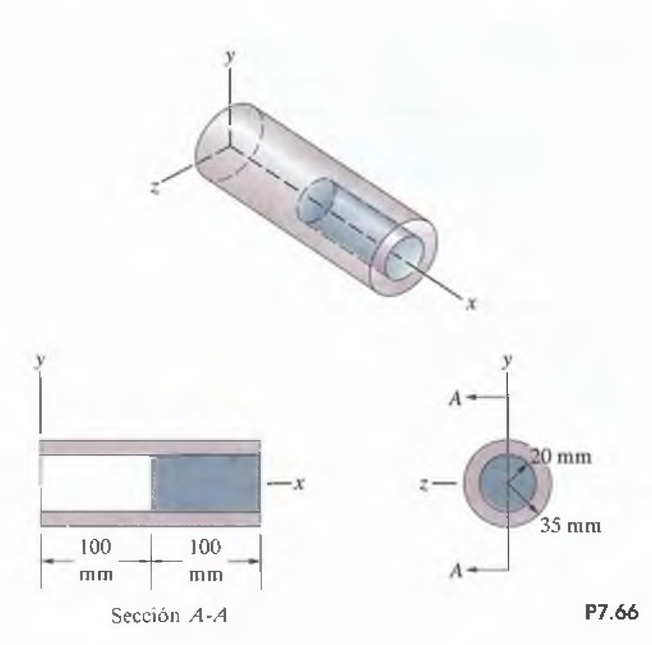
(a) Determine el centroide del volumen del cilindro.

(b) Determine el centro de masa del cilindro.



P7.65

7.66 El tubo cilíndrico mostrado está hecho de aluminio con densidad de 2700 kg/m^3. El tapón cilíndrico está hecho de acero con densidad de 7800 kg/m^3. Determine las coordenadas del centro de masa del cuerpo compuesto.



P7.66

7.67 Una máquina consta de tres partes. Las masas y las posiciones de los centros de masa de las partes son

Parte	Masa, kg	$\bar{x}$, mm	$\bar{y}$, mm	$\bar{z}$, mm
1	2.0	100	50	−20
2	4.5	150	70	0
3	2.5	180	30	0

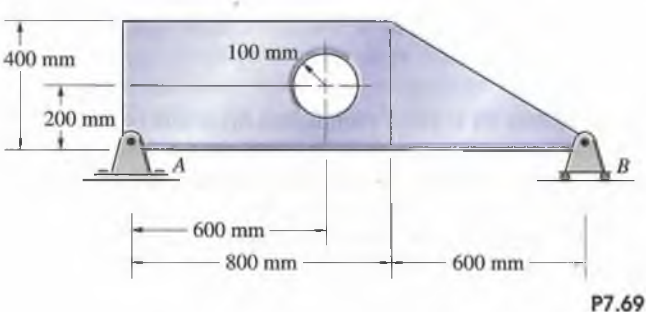
Determine las coordenadas del centro de masa de la máquina.

7.68 Una máquina consta de tres partes. Las masas y las posiciones de los centros de masa de dos de las partes son

Parte	Masa, kg	$\bar{x}$, mm	$\bar{y}$, mm	$\bar{z}$, mm
1	2.0	100	50	−20
2	4.5	150	70	0

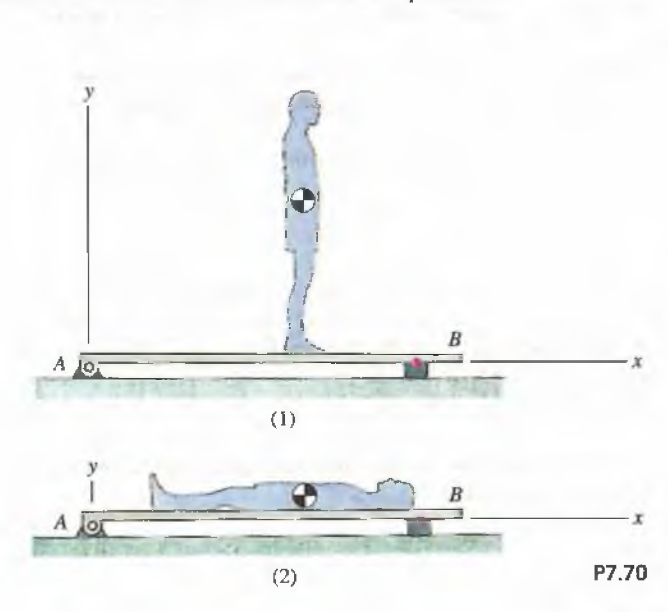
La masa de la parte 3 es de 2.5 kg. El ingeniero encargado del diseño quiere colocar la parte 3 de modo que el centro de masa de la máquina tenga las coordenadas $\bar{x}$ = 120 mm, $\bar{y}$ = 80 mm, y $\bar{z}$ = 0. Determine la posición requerida para el centro de masa de la parte 3.

7.69 La placa homogénea mostrada pesa 500 N. Determine las reacciones en los soportes *A* y *B*.



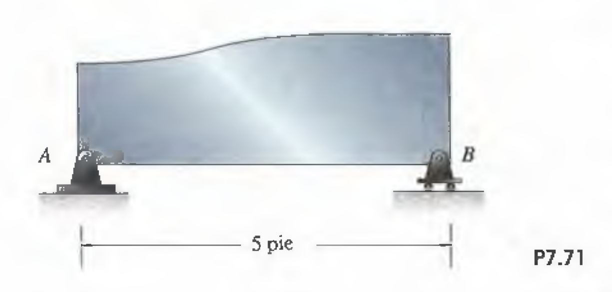
P7.69

7.70 Este esquema sirve para determinar la posición del centro de masa de una persona. Un tablón horizontal tiene un soporte de pasador en A y descansa en una balanza que registra pesos en B. La distancia AB es de 90 pulg. Cuando la persona no está sobre la balanza, ésta registra 20 lb.
(a) En la posición (1), la balanza registra 98 lb. ¿Cuál es la coordenada x del centro de masa de la persona?
(b) En la posición (2), la balanza registra 94 lb. ¿Cuál es la coordenada x del centro de masa de la persona?



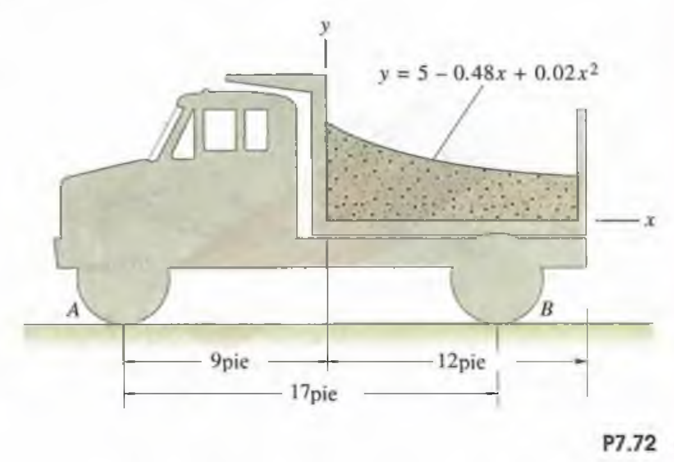
P7.70

7.71 El área de la placa homogénea mostrada es de 10 pie². Las reacciones verticales sobre la placa en A y B son de 80 lb y 84 lb respectivamente. Suponga que se quieren igualar las reacciones en A y B taladrando un agujero de 1 pie de diámetro en la placa. ¿A qué distancia horizontal de A debe estar el agujero? ¿Qué valor tienen las reacciones resultantes en A y B?



P7.71

7.72 Si el camión está descargado, las reacciones totales en las ruedas son A = 12 klb y B = 8 klb. La carga de grava pesa 100 lb/pie³. La dimensión de la carga en la dirección z es de 10 pies y el perfil de su superficie, dado por la función mostrada, no depende de z. ¿Qué valor tienen las reacciones totales del camión cargado en las ruedas?



P7.72

Los problemas 7.73 a 7.76 están relacionados con el ejemplo 7.14.

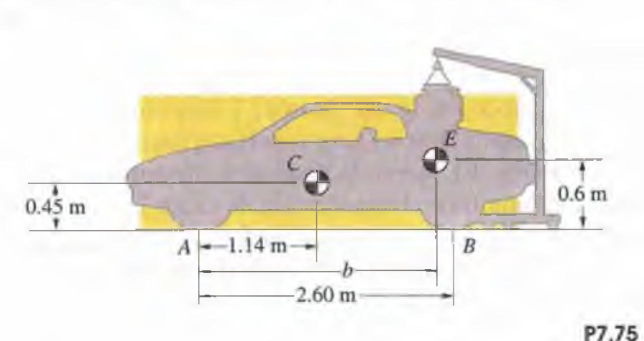
7.73 Un baúl de 200 lb se pone en la cajuela del automóvil descrito en el ejemplo 7.14. La posición del centro de masa del baúl está dada por $\bar{x}_s = -21.0$ pulg, $\bar{y}_s = 30.0$ pulg y $\bar{z}_s = -12.0$ pulg. Si se considera al baúl como parte del automóvil, ¿cuál es la posición del centro de masa del automóvil?

7.74 Un grupo de estudiantes de ingeniería construye un dispositivo del tipo descrito en el ejemplo 7.14 y lo usa para determinar el centro de masa de un vehículo. Los datos que obtienen se muestran en la siguiente tabla:

Distancia entre ejes = 36 pulg Ancho entre ruedas = 30 pulg	Cargas medidas (lb)	
	$\alpha = 0$	$\alpha = 10°$
Rueda frontal izquierda, N_{LF}	35	32
Rueda frontal derecha, N_{RF}	36	33
Rueda trasera izquierda, N_{LR}	27	34
Rueda trasera derecha, N_{RR}	29	30

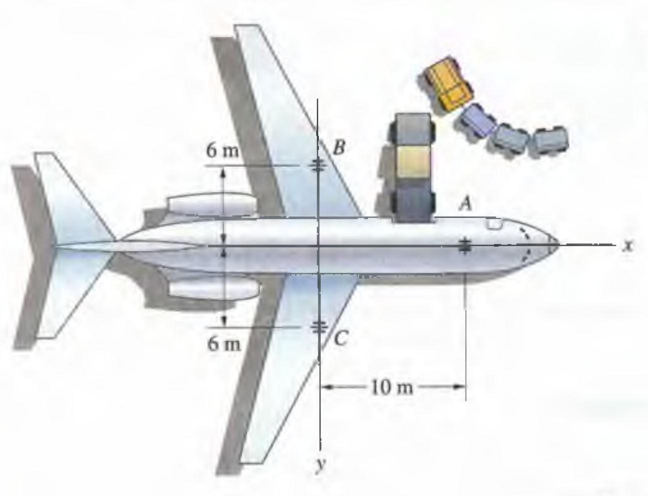
Determine el centro de masa del vehículo. Use el mismo sistema coordenado que en el ejemplo 7.14.

7.75 Con el motor retirado, la masa del automóvil es de 1100 kg y su centro de masa está en C. La masa del motor es de 220 kg. (a) Se quiere situar el centro de masa E del motor de manera que el centro de masa del automóvil quede a la mitad de la distancia entre las ruedas frontales A y las traseras B. ¿Qué valor debe tener b? (b) Si el automóvil se estaciona sobre una pendiente a 15° de cara a ésta, ¿qué valor tiene la fuerza normal ejercida por el suelo sobre las ruedas B?



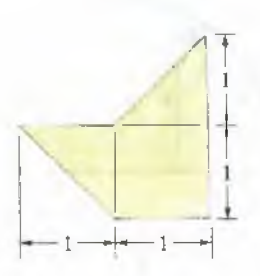
P7.75

7.76 El avión de la figura se encuentra estacionado con su tren de aterrizaje descansando sobre balanzas. Los pesos registrados en A, B y C son 30 kN, 140 kN y 146 kN respectivamente. Después de que el avión se carga con un contenedor, los pesos registrados en A, B y C son 31 kN, 142 kN y 147 kN respectivamente. Determine la masa y las coordenadas x y y del centro de masa del contenedor.



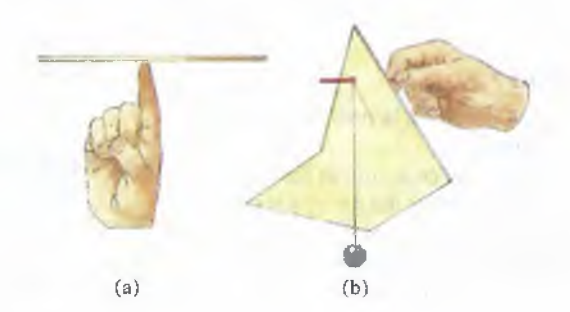
P7.76

Proyecto 7.1 Construya una placa delgada homogénea con la forma mostrada. (Use el cartón de una libreta. Trate que la placa resulte lo más grande posible.) Calcule la posición del centro de masa de la placa. Midiendo con el mayor cuidado posible, marque con claridad el centro de masa en ambos lados de la placa. Luego lleve a cabo el siguiente experimento.



Proyecto 7.1

(a) Coloque la placa sobre un dedo (Fig. a) y observe que se equilibra sobre su centro de masa. Explique esto dibujando un diagrama de cuerpo libre de la placa.
(b) Este experimento requiere una aguja, un tramo de cuerda y un pequeño peso. Una el peso a un extremo de la cuerda y haga un lazo pequeño en el otro extremo. Inserte la aguja en la placa en cualquier punto que no sea el centro de masa. Sostenga horizontalmente la aguja de modo que la placa cuelgue con libertad de ella (Fig. b). Use el lazo para colgar el peso de la aguja y deje que cuelgue libremente de modo que la cuerda se encuentre a lo largo de la cara de la placa. Observe que la cuerda pasa por el centro de masa de la placa. Repita este experimento varias veces, insertando la aguja en varios puntos de la placa. Explique los resultados de este experimento dibujando un diagrama de cuerpo libre de la placa.
(c) Sostenga la placa de modo que el plano de ésta sea vertical, y láncela hacia arriba haciéndola girar como un *frisbee*. Observe que la placa gira alrededor de su centro de masa.



(a) (b)

7.3 Teoremas de Pappus-Guldinus

En esta sección presentaremos dos teoremas de gran utilidad que relacionan las superficies y volúmenes de revolución con los centroides de las líneas y áreas que los generan.

Primer teorema

Sea una línea L en el plano x-y (Fig. a). Sean $\bar{x}$, $\bar{y}$ las coordenadas del centroide de la línea. Podemos generar una superficie haciendo girar la línea alrededor del eje x (Fig. b). Como la línea gira alrededor del eje x, su centroide se mueve en una trayectoria circular de radio $\bar{y}$.

El primer teorema de Pappus-Guldinus establece que el área de la superficie de revolución es igual al producto de la distancia que el centroide de la línea recorre y la longitud de la línea:

$$A = 2\pi \bar{y} L. \tag{7.20}$$

Para demostrar este resultado, observamos que conforme la línea gira alrededor del eje x, el área dA generada por un elemento dL de la línea es $dA = 2\pi y\, dL$, donde y es la ordenada del elemento dL (Fig. 7.27c). Por consiguiente, el área total de la superficie de revolución es

$$A = 2\pi \int_L y\, dL. \tag{7.21}$$

De la definición de la coordenada y del centro de la línea,

$$\bar{y} = \frac{\int_L y\, dL}{\int_L dL},$$

obtenemos

$$\int_L y\, dL = \bar{y} L.$$

Sustituyendo en la ecuación (7.21), obtenemos la ecuación (7.20).

Figura 7.27
(a) Una línea L y la ordenada de su centroide.
(b) Superficie generada al hacer girar la línea L alrededor del eje x, y trayectoria seguida por el centroide de la línea.
(c) Un elemento dL de la línea y el elemento dA que genera.

Segundo teorema

Sea un área A en el plano x-y (Fig. 7.28a). Sean $\bar{x}$, $\bar{y}$ las coordenadas del centroide del área. Podemos generar un volumen haciendo girar el área alrededor del eje x (Fig. 7.28b). Conforme el área gira alrededor del eje x, su centroide recorre la trayectoria circular de longitud $2\pi\bar{y}$.

El segundo teorema de Pappus-Guldinus establece que la magnitud V del volumen de revolución generado es igual al producto de la distancia que recorre el centroide del área y la magnitud del área:

$$V = 2\pi \bar{y} A. \tag{7.22}$$

Al girar el área alrededor del eje x, el volumen dV generado por un elemento dA del área es $dV = 2\pi y\, dA$, donde y es la ordenada del elemento dA (Fig. 7.28c). Por consiguiente, el volumen total es

$$V = 2\pi \int_A y dA. \tag{7.23}$$

De la definición de la coordenada y del centroide del área,

$$\bar{y} = \frac{\int_A y dA}{\int_A dA},$$

obtenemos

$$\int_A y\, dA = \bar{y} A.$$

Sustituyendo este resultado en la ecuación (7.23), obtenemos la ecuación (7.22).

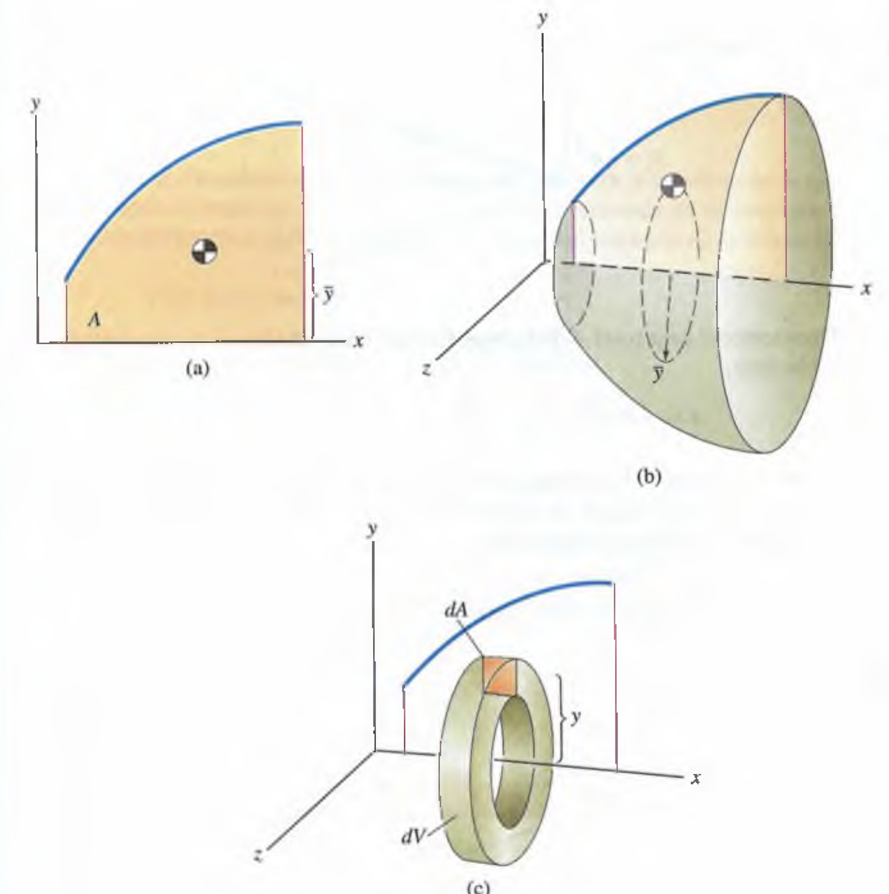


Figura 7.28

(a) Un área A y la ordenada de su centroide.

(b) El volumen generado cuando gira el área A alrededor del eje x y la trayectoria seguida por el centroide del área.

(c) Elemento dA del área y elemento de volumen dV que genera.

Ejemplo 7.15

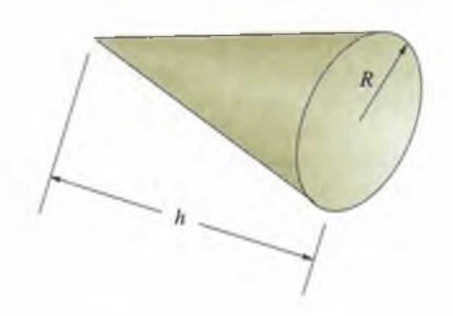


Figura 7.29

Utilice los teoremas de Pappus-Guldinus para determinar el área A y el volumen V del cono de la figura 7.29.

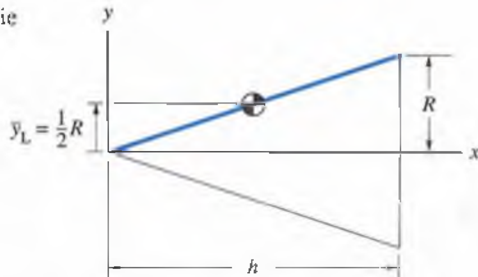
ESTRATEGIA

Podemos generar la superficie curva del cono haciendo girar una línea recta alrededor de un eje, y podemos generar su volumen haciendo girar un área triangular alrededor del eje. Como conocemos los centroides de la línea recta y del área triangular, podemos usar los teoremas de Pappus-Guldinus para determinar el área y el volumen del cono.

SOLUCIÓN

Al girar la línea recta alrededor del eje x se genera la superficie curva del cono. La coordenada y del centroide de la línea es $\bar{y}_L = \frac{1}{2}R$, y su longitud es $L = \sqrt{h^2 + R^2}$. El centroide de la línea recorre una distancia $2\pi y_L$ conforme la línea gira alrededor del eje x; así, el área de la superficie curva es

$$(2\pi\bar{y})L = \pi R\sqrt{h^2 + R^2}.$$



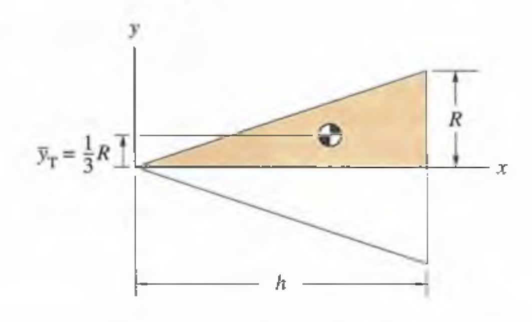
(a) La línea recta que genera la superficie curva del cono.

Obtenemos el área total A de la superficie del cono añadiendo la suma del área de la base,

$$A = \pi R\sqrt{h^2 + R^2} + \pi R^2.$$

Si el área triangular en la figura (b) gira alrededor del eje x se genera el volumen V. La coordenada y de su centroide es $\bar{y}_T = \frac{1}{3}R$, y su área es $A = \frac{1}{2}hR$, por lo que el volumen del cono es

$$V = (2\pi\bar{y}_T)A = \frac{1}{3}\pi h R^2.$$



(b) El área que genera el volumen del cono.

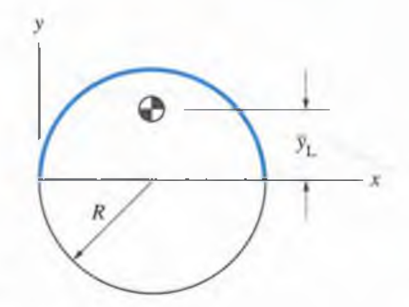
Ejemplo 7.16

La circunferencia de una esfera de radio R es $2\pi R$, su área es $4\pi R^2$ y su volumen es $\frac{4}{3}\pi R^3$. Use esta información para determinar: (a) el centroide de una línea semicircular; (b) el centroide de un área semicircular.

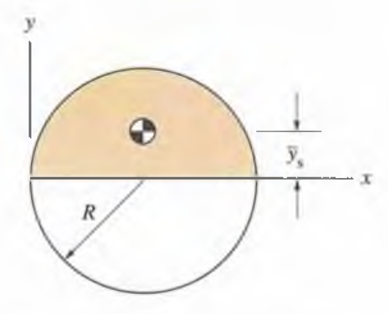
ESTRATEGIA

Al girar una línea semicircular alrededor de un eje se genera un área esférica, y al girar un área semicircular alrededor de un eje se genera un volumen esférico. Conociendo el área y el volumen generados, podemos usar los teoremas de Pappus-Guldinus para determinar los centroides de la línea y del área generatrices.

Figura 7.30



(a) Giro de una línea semicircular alrededor del eje x.



(b) Giro de un área semicircular alrededor del eje x.

SOLUCIÓN

(a) Al girar la línea semicircular en la figura (a) alrededor del eje x se genera el área de una esfera. La longitud de la línea es $L = \pi R$, y $\bar{y}_L$ es la ordenada de su centroide. El centroide de la línea recorre una distancia $2\pi\bar{y}_L$, por lo que el área de la esfera es

$$(2\pi\bar{y}_L)L = 2\pi^2 R\bar{y}_L.$$

Igualando esta expresión al área $4\pi R^2$, determinamos $\bar{y}_L$:

$$\bar{y}_L = \frac{2R}{\pi}.$$

(b) Al girar el área semicircular en la figura (b) se genera el volumen de la esfera. El área del semicírculo es $A = \frac{1}{2}\pi R^2$, y $\bar{y}_S$ es la ordenada de su centroide. El centroide recorre una distancia $2\pi\bar{y}_S$, por lo que el volumen de la esfera es

$$(2\pi\bar{y}_S)A = \pi^2 R^2\bar{y}_S.$$

Igualando esta expresión al volumen $\frac{4}{3}\pi R^3$, obtenemos

$$\bar{y}_S = \frac{4R}{3\pi}.$$

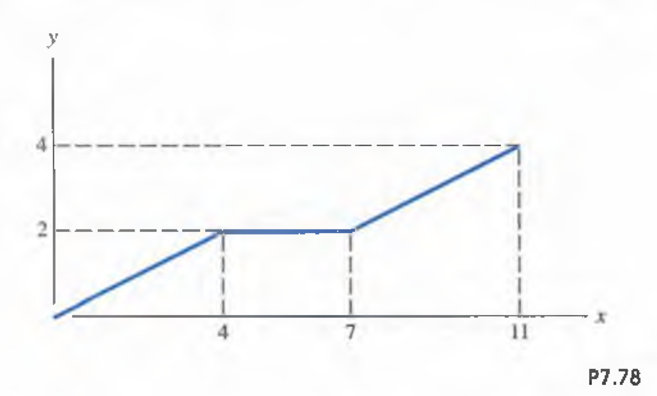
COMENTARIO

Si se puede obtener un resultado usando los teoremas de Pappus-Guldinus, se ahorrará tiempo y esfuerzo en comparación con otros métodos. Compare este ejemplo con el ejemplo 7.5, en el que se usó integración para determinar el centroide de una línea semicircular.

Problemas

7.77 Use los teoremas de Pappus-Guldinus para determinar el área lateral A y el volumen V de un cilindro circular de longitud L y radio R.

7.78 Use el segundo teorema de Pappus-Guldinus para determinar el volumen generado al girar la línea alrededor del eje x mostrado.

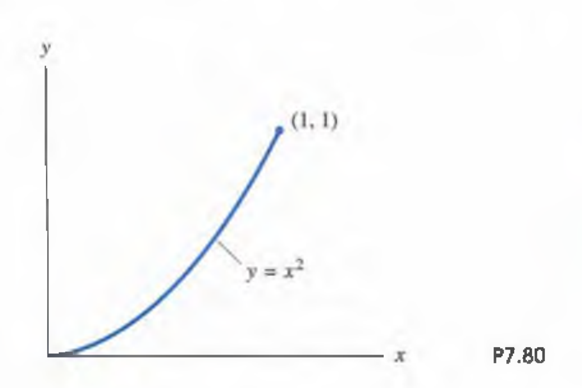


P7.78

7.79 Use el primer teorema de Pappus-Guldinus para determinar el área de la superficie generada al girar la línea del problema 7.78 alrededor del eje x.

Problemas 7.80-7.83

7.80 Use el segundo teorema de Pappus-Guldinus para determinar el volumen generado al girar la curva alrededor del eje x mostrado.



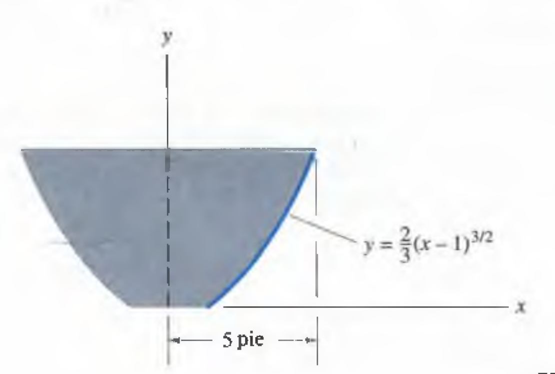
P7.80

7.81 Use el segundo teorema de Pappus-Guldinus para determinar el volumen generado al girar la curva alrededor del eje y (véase P7.80).

7.82 La longitud de la curva es $L = 1.479$, y el área generada cuando gira alrededor del eje x es $A = 3.810$. Use el primer teorema de Pappus-Guldinus para determinar la coordenada y del centroide de la curva (véase P7.80).

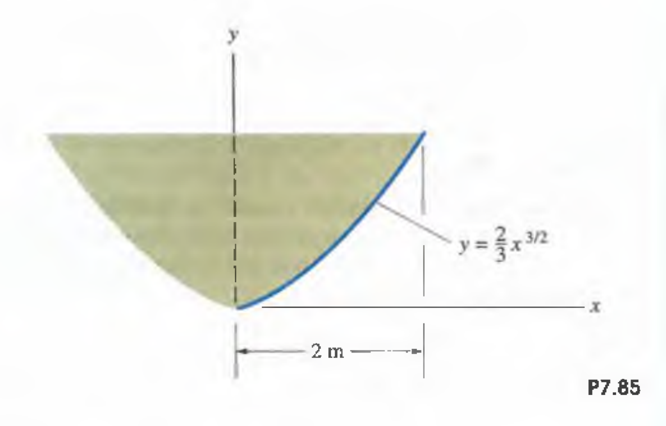
7.83 Use el primer teorema de Pappus-Guldinus para determinar el área de la superficie generada al girar la curva alrededor del eje y (véase P7.80).

7.84 Una tobera para el motor de un gran cohete se diseña girando la función $y = \frac{2}{3}(x - 1)^{3/2}$ alrededor del eje y. Use el primer teorema de Pappus-Guldinus para determinar el área de la superficie lateral de la tobera.



P7.84

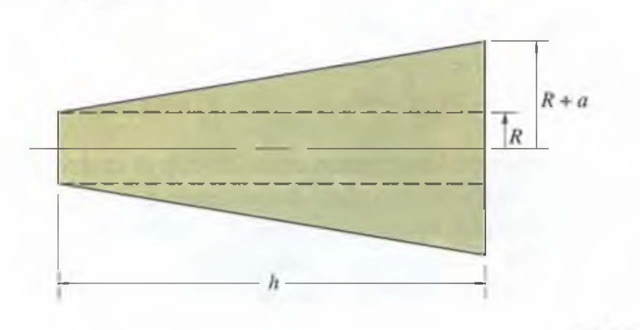
7.85 Un volumen de revolución se obtiene girando alrededor del eje y el área entre la función $y = \frac{2}{3}x^{3/2}$ y el eje y. Use el segundo teorema de Pappus-Guldinus para determinar su volumen.



P7.85

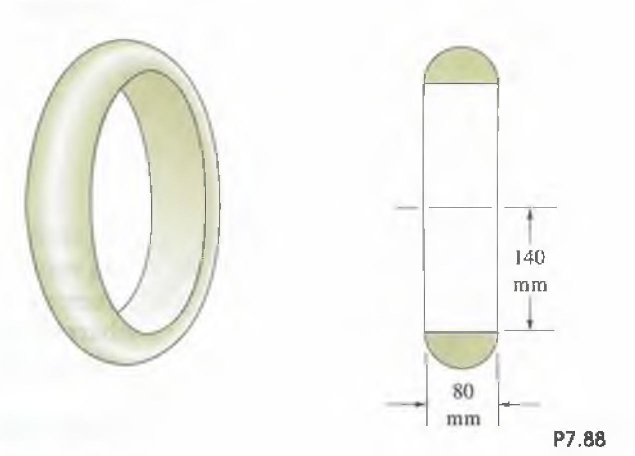
7.86 Use el primer teorema de Pappus-Guldinus para determinar el área de la superficie curva del volumen de revolución del problema 7.85.

7.87 El volumen de revolución de la figura tiene un agujero de radio R.
(a) Use la integración para determinar su volumen.
(b) Use el segundo teorema de Pappus-Guldinus para determinar su volumen.



P7.87

7.88 Con base en la figura P7.88, determine la magnitud del volumen de revolución.



P7.88

7.89 Determine el área de la superficie del volumen de revolución del problema 7.88.

7.90 Determine el área de la superficie de revolución obtenida al hacer girar la línea en el problema 7.61 alrededor del eje x.

Resumen del capítulo

Centroides

El **centroide** es la posición del peso ponderado. Las coordenadas del centroide de un área A en el plano x-y son

$$\bar{x} = \frac{\int_A x\,dA}{\int_A dA}, \qquad \bar{y} = \frac{\int_A y\,dA}{\int_A dA}. \qquad \text{Ecs. (7.6), (7.7)}$$

Las coordenadas del centroide de un área **compuesta** de partes A_1, A_2,... son

$$\bar{x} = \frac{\sum_i \bar{x}_i A_i}{\sum_i A_i}, \qquad \bar{y} = \frac{\sum_i \bar{y}_i A_i}{\sum_i A_i}. \qquad \text{Ec. (7.15)}$$

Ecuaciones similares definen los centroides de volúmenes (Ecs. 7.8 y 7.16) y de líneas (Ecs. 7.9 y 7.17).

Centros de masa

El **centro de masa** de un cuerpo es el centroide de su masa. El peso de un cuerpo se puede representar con una sola fuerza equivalente actuando en su centro de masa.

La **densidad** ρ se define de manera tal que la masa de un elemento diferencial de volumen es $dm = \rho dV$. Un cuerpo es **homogéneo** si su densidad es uniforme en todo su volumen. El **peso específico** $\gamma = g\rho$.

Las coordenadas del centro de masa de un cuerpo son

$$\bar{x} = \frac{\int_V \rho x\, dV}{\int_V \rho\, dV}, \quad \bar{y} = \frac{\int_V \rho y\, dV}{\int_V \rho\, dv}, \quad \bar{z} = \frac{\int_V \rho z\, dV}{\int_V \rho\, dV}. \qquad \textbf{Ec. (7.13)}$$

El centro de masa de un cuerpo homogéneo coincide con el centroide de su volumen. El centro de masa de una placa homogénea de espesor uniforme coincide con el centroide de su área. El centro de masa de una barra homogénea esbelta de sección transversal uniforme coincide aproximadamente con el centroide del eje de la barra.

Teoremas de Pappus-Guldinus

Primer teorema Sea L una línea en el plano x-y con centroide $\bar{x}$, $\bar{y}$. El área A de la superficie generada al girar L alrededor del eje x es

$$A = 2\pi \bar{y} L. \qquad \textbf{Ec. (7.20)}$$

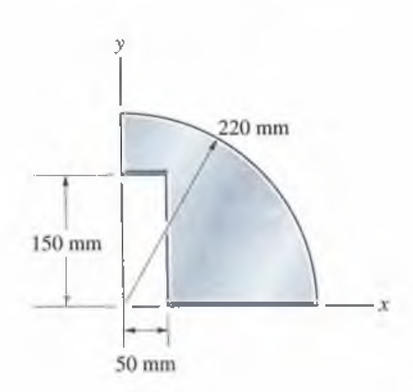
Segundo teorema Sea A un área en el plano x-y con centroide $\bar{x}$, $\bar{y}$. El volumen V generado al girar A alrededor del eje x es

$$V = 2\pi \bar{y} A. \qquad \textbf{Ec. (7.22)}$$

Problemas de repaso

7.91 La masa de la Luna es 0.0123 veces la masa de la Tierra. Si el centro de masa de la Luna está a 238 000 millas del centro de masa de la Tierra, ¿qué distancia hay del centro de masa de la Tierra al centro de masa del sistema Tierra-Luna?

7.92 Determine la coordenada x del centro de masa de la placa homogénea de acero mostrada.



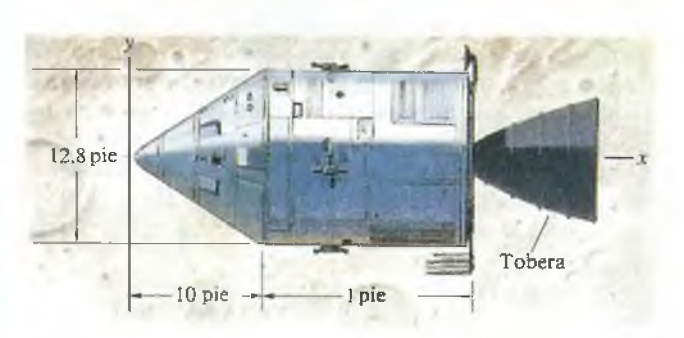
P7.92

7.93 Determine la coordenada x del centro de masa de la placa homogénea de acero mostrada.

P7.93

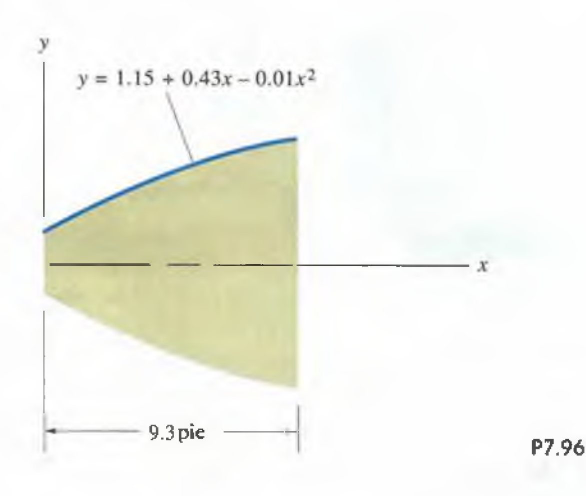
7.94 Determine la coordenada y del centro de masa de la placa homogénea de acero del problema 7.93.

7.95 Calcule el centroide del volumen de la configuración de retorno de la Luna del *Apolo* (sin incluir la tobera de su cohete) considerándolo como un cono y un cilindro.



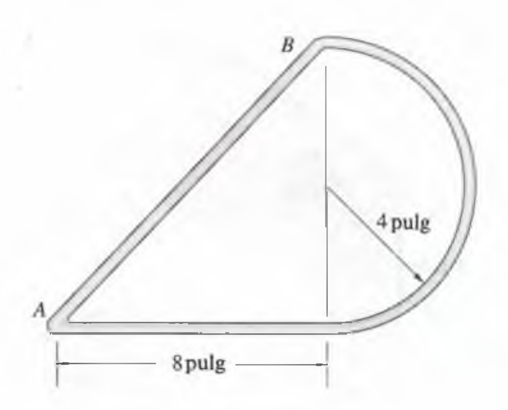
P7.95

7.96 La configuración de la tobera de la configuración de retorno del cohete lunar *Apolo* se obtiene en forma aproximada haciendo girar la curva mostrada alrededor del eje x. En función de las coordenadas indicadas, determine el centroide del volumen de la tobera.



P7.96

7.97 Si se amarra una cuerda a la barra en A y se permite que la barra mostrada cuelgue libremente, ¿cuál será el ángulo entre AB y la vertical?



P7.97

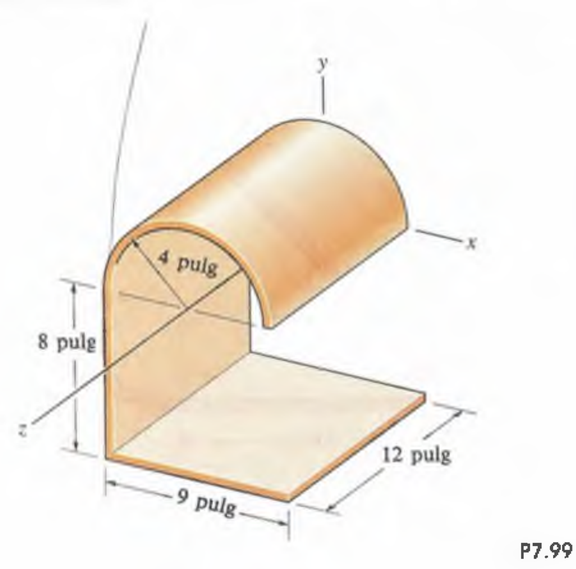
7.98 La placa es de espesor uniforme y está hecha de un material homogéneo cuya masa por unidad de área de la placa es de 2 kg/m^2. Las reacciones verticales en A y B son 6 N y 10 N respectivamente. ¿Qué valor tiene la coordenada x del centroide del agujero?

1 m

2 m

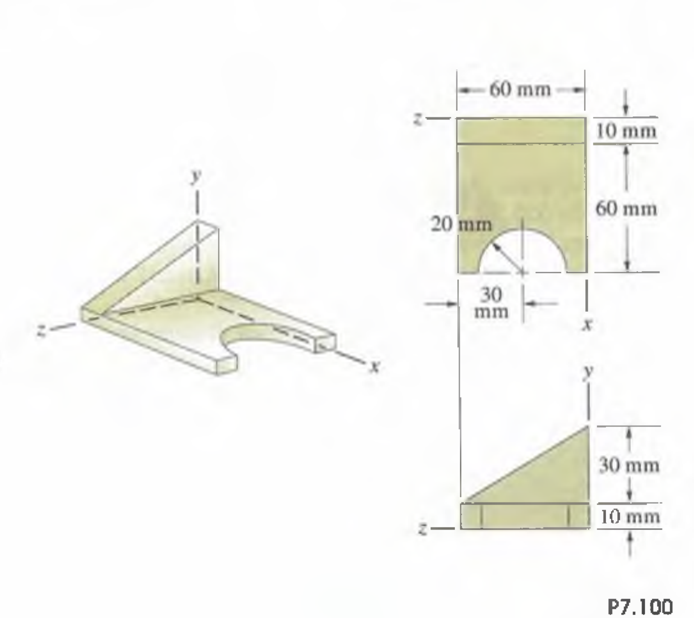
P7.98

7.99 Determine el centro de masa de la lámina de metal homogénea mostrada.



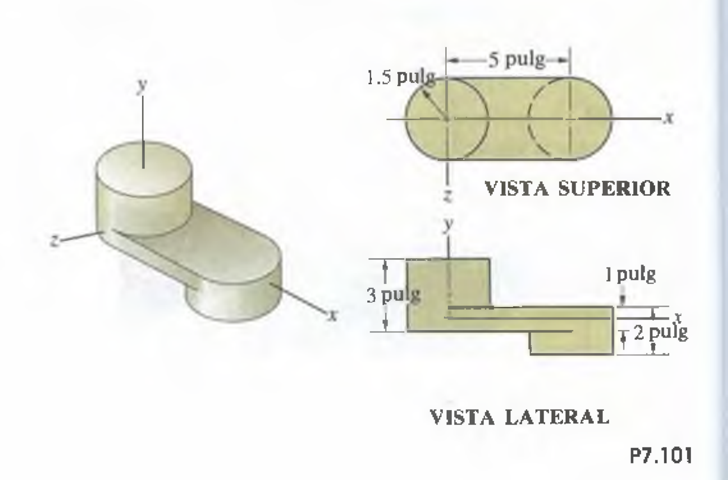
P7.99

7.100 Determine el centro de masa del cuerpo homogéneo mostrado.



P7.100

7.101 Determine el centro de masa del cuerpo homogéneo mostrado.



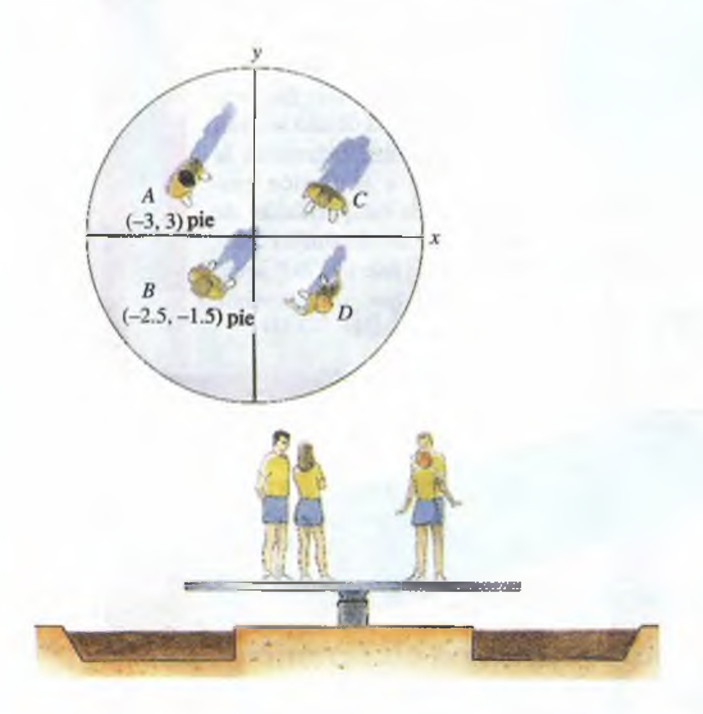
P7.101

7.102 Determine la magnitud del volumen de revolución de la figura P7.101.

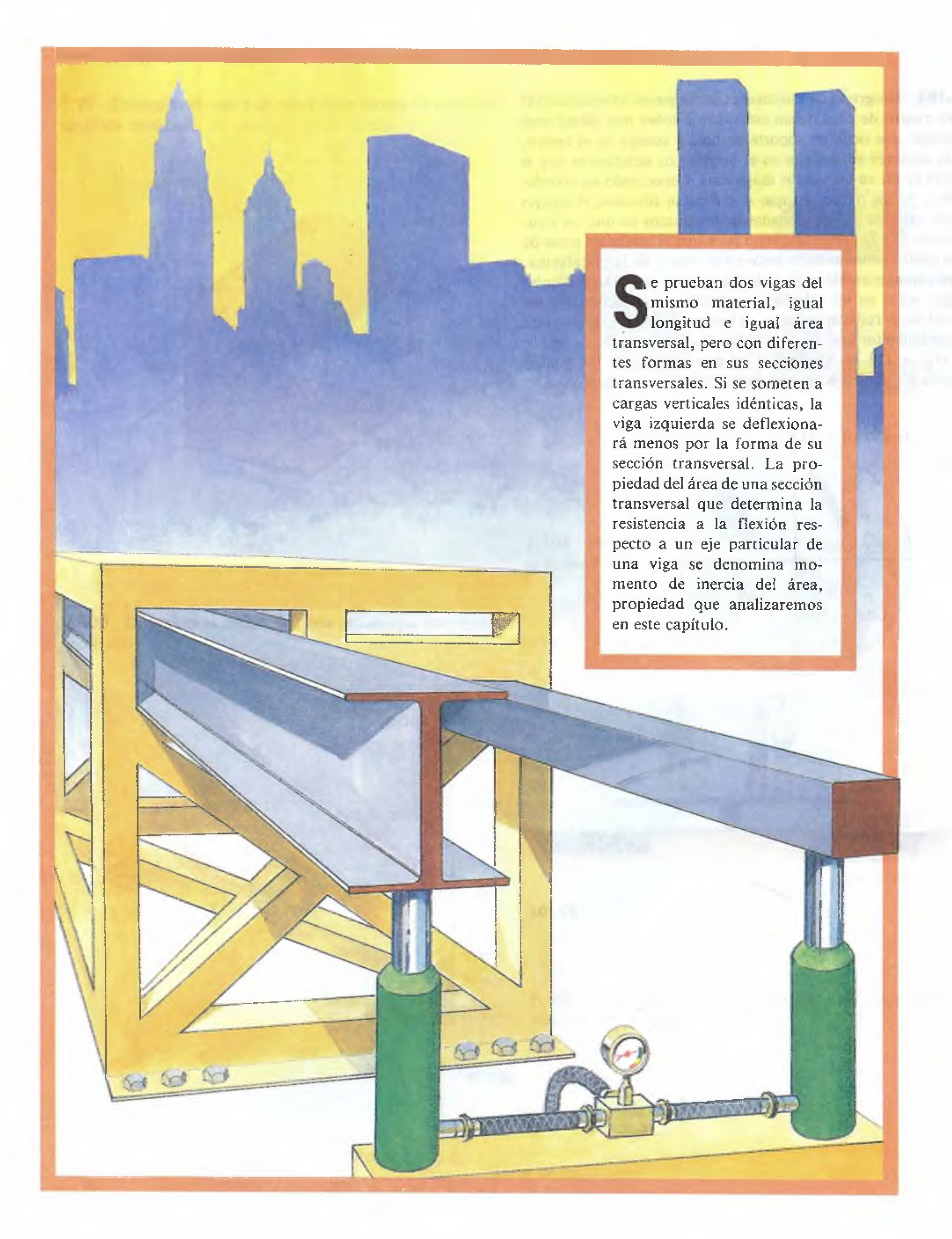
P7.102

7.103 Determine el área de la superficie del volumen de revolución del problema 7.102.

7.104 Un grupo de estudiantes participa en un evento en el que cuatro de ellos deben estar de pie sobre una plataforma circular que tiene un soporte de bola y cuenca en el centro, con soportes adicionales en el borde. Los estudiantes A y B están de pie en los puntos mostrados. Conociendo las coordenadas de los puntos en que A y B están situados, el equipo debe calcular las coordenadas de los puntos en que los estudiantes C y D deben colocarse para que el centro de masa de los cuatro estudiantes se halle en el centro de la plataforma. Los soportes en el borde de la plataforma se quitan y si hubo algún error en los cálculos, la plataforma se inclinará y los estudiantes resbalarán hacia un tanque de lodo. Los pesos de los estudiantes son: W_A = 182 lb, W_B = 122 lb, W_C = 165 lb y W_D = 124 lb. Determine las coordenadas de los puntos donde C y D deben situarse para no inclinar la plataforma.



P7.104



Se prueban dos vigas del mismo material, igual longitud e igual área transversal, pero con diferentes formas en sus secciones transversales. Si se someten a cargas verticales idénticas, la viga izquierda se deflexionará menos por la forma de su sección transversal. La propiedad del área de una sección transversal que determina la resistencia a la flexión respecto a un eje particular de una viga se denomina momento de inercia del área, propiedad que analizaremos en este capítulo.

Capítulo 8

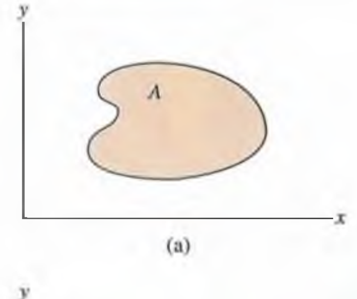
Momentos de inercia

LAS cantidades llamadas momentos de inercia aparecen con frecuencia en los análisis de problemas de ingeniería. Por ejemplo, los momentos de inercia de áreas se utilizan en el estudio de fuerzas distribuidas y en el cálculo de deflexiones de vigas. El momento ejercido por la presión sobre una placa plana sumergida se puede expresar en términos del momento de inercia del área de la placa. En dinámica, los momentos de inercia de masa se usan para calcular los movimientos rotatorios de objetos. Para estudiar estas aplicaciones, los momentos de inercia deben ser parte de nuestro ''vocabulario'' técnico.

En este capítulo presentamos tanto los momentos de inercia de áreas como los momentos de inercia de masa. Mostraremos cómo calcular los momentos de inercia de áreas simples o de cuerpos y luego usaremos resultados llamados teoremas de los ejes paralelos para calcular los momentos de inercia de áreas o cuerpos más complejos.



8.1 *Definiciones*



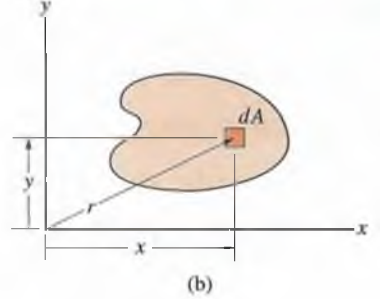


Figura 8.1
(a) Área A en el plano x-y.
(b) Elemento diferencial de A.

Los momentos de inercia de un área son integrales de forma similar a la de las usadas para determinar el centroide de un área. Sea un área A en el plano x-y (Fig. a). Definimos cuatro momentos de inercia de A:

1. **Momento de inercia respecto al eje x:**

$$I_x = \int_A y^2 dA, \tag{8.1}$$

donde y es la ordenada del elemento diferencial de área dA (Fig. 8.1b). Este momento de inercia se expresa a veces en términos del radio de giro respecto al eje x, k_x definido por

$$I_x = k_x^2 A. \tag{8.2}$$

2. **Momento de inercia respecto al eje y:**

$$I_y = \int_A x^2 dA, \tag{8.3}$$

donde x es la coordenada x del elemento dA (Fig. 8.1b). El radio de giro respecto al eje y, k_y se define con

$$I_y = k_y^2 A. \tag{8.4}$$

3. **Producto de inercia:**

$$I_{xy} = \int_A xy dA. \tag{8.5}$$

4. **Momento polar de inercia:**

$$J_0 = \int_A r^2 dA, \tag{8.6}$$

donde r es la distancia radial del origen O a dA (Fig. 8.1b). El radio de giro respecto a O, k_0 se define como

$$J_0 = k_0^2 A. \tag{8.7}$$

El momento polar de inercia es igual a la suma de los momentos de inercia respecto a los ejes x y y:

$$J_0 = \int_A r^2 dA = \int_A (y^2 + x^2) dA = I_x + I_y.$$

Sustituyendo en esta ecuación las expresiones para los momentos de inercia en términos de los radios de giro obtenemos

$$k_0^2 = k_x^2 + k_y^2.$$

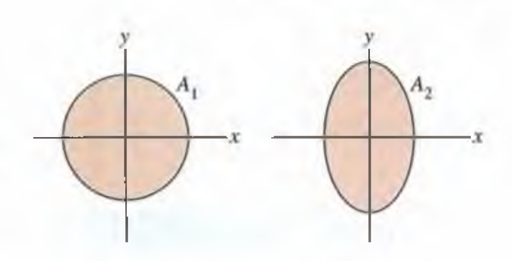


Figura 8.2
Las áreas son iguales, $A_1 = A_2$. Con base en sus formas, se pueden sacar conclusiones sobre los tamaños relativos de sus momentos de inercia.

Las dimensiones de los momentos de inercia de un área son (longitud)[4] y los radios de giro tienen dimensiones de longitud. Las definiciones de los momentos de inercia I_x, I_y y J_0 y las de los radios de giro implican que ambos tienen valores positivos para cualquier área; no pueden ser negativos ni nulos. Se pueden hacer deducciones cualitativas respecto a los valores de esos momentos de inercia según sus definiciones. En la figura 8.2, $A_1 = A_2$. Sin embargo, como la contribución de un elemento dA a la integral para I_x es proporcional al *cuadrado* de su distancia perpendicular desde el eje x, el valor de I_x es mayor para A_2 que para A_1: $(I_x)_2 > (I_x)_1$. Por lo mismo, $(I_y)_2 < (I_y)_1$ y $(J_0)_2 > (J_0)_1$. Las áreas circulares de la figura 8.3 son idénticas, pero por sus posiciones relativas en el sistema coordenado, $(I_x)_2 > (I_x)_1$, $(I_y)_2 > (I_y)_1$, y $(J_0)_2 > (J_0)_1$.

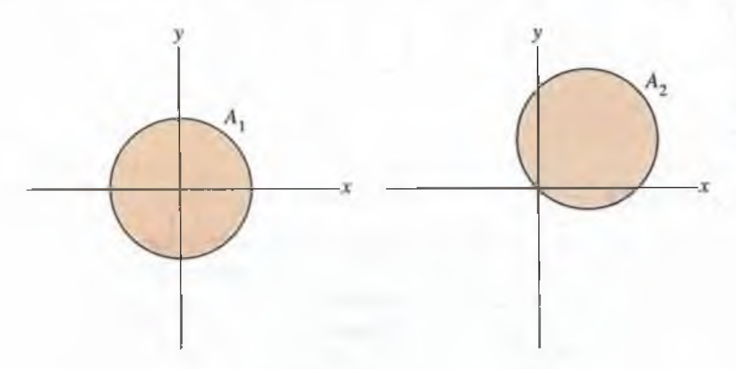


Figura 8.3
Áreas idénticas que tienen momentos de inercia diferentes con respecto al sistema coordenado xy.

Las áreas A_2 y A_3 de la figura 8.4 se obtienen con el giro de A_1 alrededor de los ejes y y x respectivamente. De las definiciones se puede deducir que los momentos de inercia I_x, I_y y J_0 de esas áreas son iguales. Los productos de inercia $(I_{xy})_2 = -(I_{xy})_1$ e $(I_{xy})_3 = -(I_{xy})_1$: para cada elemento dA de A_1 con coordenadas (x, y) hay un elemento correspondiente de A_2 con coordenadas $(-x, y)$ y un elemento correspondiente de A_3 con coordenadas $(x, -y)$. Estos resultados también implican que si un área es simétrica respecto al eje x o al eje y, su producto de inercia es cero.

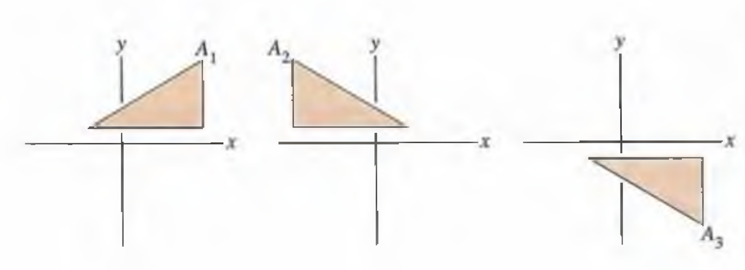


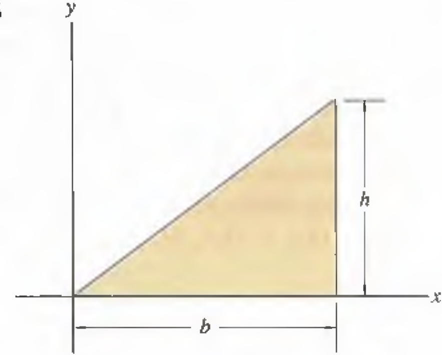
Figura 8.4
Áreas obtenidas al girar un área alrededor de los ejes x y y.

Ahora se muestra el uso de las ecuaciones (8.1)-(8.7) para determinar los momentos de inercia de áreas. Las formas de las integrales son tan parecidas a aquellas utilizadas para determinar los centroides de áreas (Sec. 7.1), que a menudo se puede usar el mismo método para evaluarlas.

Ejemplo 8.1

Determine los momentos de inercia y los radios de giro del área triangular de la figura 8.5.

Figura 8.5



ESTRATEGIA

La ecuación 8.3 para el momento de inercia respecto al eje y es muy parecida a la ecuación para la coordenada x del centroide de un área, y podemos evaluarla para esta área triangular exactamente del mismo modo: con un elemento diferencial de área dA en forma de una franja vertical de ancho dx. Podemos luego demostrar que I_x e I_{xy} se pueden evaluar utilizando el mismo elemento de área. El momento polar de inercia J_0 es igual a la suma de I_x e I_y.

SOLUCIÓN

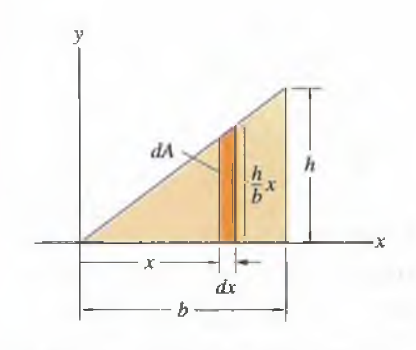
Sea dA la franja vertical de la figura (a). La altura de la franja es $(h/b)x$, por lo que $dA = (h/b)xdx$. Para integrar sobre toda el área, debemos integrar con respecto a x de $x = 0$ a $x = b$.

Momento de inercia respecto al eje *y*

$$I_y = \int_A x^2 dA = \int_0^b x^2 \left(\frac{h}{b}x\right) dx = \frac{h}{b}\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^b = \frac{1}{4}hb^3$$

El radio de giro k_y es

$$k_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} = \sqrt{\frac{(1/4)hb^3}{(1/2)bh}} = \frac{1}{\sqrt{2}}b.$$

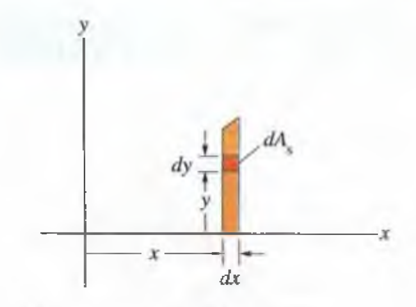


(a) Elemento dA en forma de franja.

Momento de inercia respecto al eje x Primero determinaremos el momento de inercia de la franja dA respecto al eje x manteniendo x y dx fijos. En términos del elemento de área $dA_s = dx\,dy$ mostrado en la figura (b),

$$(I_x)_{\text{franja}} = \int_{\text{franja}} y^2\,dA_s = \int_0^{(h/b)x} (y^2\,dx)\,dy$$

$$= \left[\frac{y^3}{3}\right]_0^{(h/b)x} dx = \frac{h^3}{3b^3}x^3\,dx.$$



(b) Elemento de la franja dA.

Integrando esta expresión con respecto a x de $x = 0$ a $x = b$, obtenemos el valor de I_x para toda el área:

$$I_x = \int_0^b \frac{h^3}{3b^3}x^3\,dx = \frac{1}{12}bh^3.$$

El radio de giro k_x es

$$k_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}} = \sqrt{\frac{(1/12)bh^3}{(1/2)bh}} = \frac{1}{\sqrt{6}}h.$$

Producto de inercia Podemos determinar I_{xy} de la misma manera en que determinamos I_x. Primero evaluamos el producto de inercia de la franja dA, manteniendo fijos x y dx (Fig. b),

$$(I_{xy})_{\text{franja}} = \int_{\text{franja}} xy\,dA_s = \int_0^{(h/b)x} (xy\,dx)\,dy$$

$$= \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{(h/b)x} x\,dx = \frac{h^2}{2b^2}x^3\,dx.$$

Integrando esta expresión con respecto a x de $x = 0$ a $x = b$, el valor de I_{xy} para toda el área es

$$I_{xy} = \int_0^b \frac{h^2}{2b^2}x^3\,dx = \frac{1}{8}b^2h^2.$$

Momento polar de inercia

$$J_0 = I_x + I_y = \frac{1}{12}bh^3 + \frac{1}{4}hb^3$$

El radio de giro k_0 es

$$k_0 = \sqrt{k_x^2 + k_y^2} = \sqrt{\frac{1}{6}h^2 + \frac{1}{2}b^2}.$$

COMENTARIO

Tal como se determinan los centroides de áreas, se pueden determinar los momentos de inercia de un área usando un elemento diferencial de área en forma de franja, como en este ejemplo. Use este procedimiento si se pueden expresar las fronteras del área en términos de coordenadas cartesianas.

Ejemplo 8.2

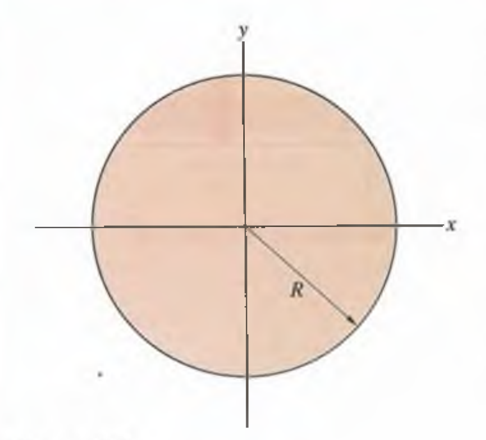
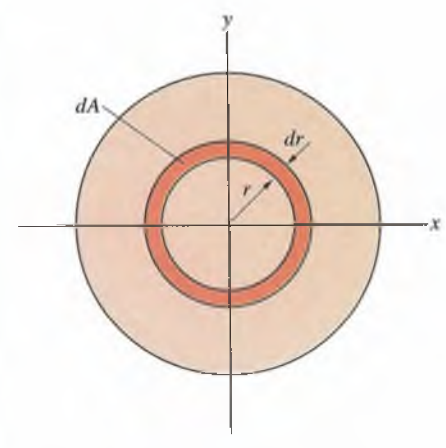


Figura 8.6



(a) Elemento anular dA.

Determine los momentos de inercia y los radios de giro del área circular de la figura 8.6.

ESTRATEGIA

Primero determinaremos el momento polar de inercia J_0 integrando en términos de coordenadas polares. Por la simetría del área, $I_x = I_y$, y como $I_x + I_y = J_0$, cada uno de los momentos de inercia I_x e I_y es igual a $(1/2)J_0$. Sabemos además que, por la simetría del área, $I_{xy} = 0$.

SOLUCIÓN

Si permitimos que r cambie una cantidad dr, obtenemos un elemento anular de área $dA = 2\pi r dr$ (Fig. a). El momento polar de inercia es

$$J_0 = \int_A r^2 dA = \int_0^R 2\pi r^3\, dr = 2\pi \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^R = \frac{1}{2}\pi R^4,$$

y el radio de giro respecto a O es

$$k_0 = \sqrt{\frac{J_0}{A}} = \sqrt{\frac{(1/2)\pi R^4}{\pi R^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}R.$$

Los momentos de inercia respecto a los ejes x y y son

$$I_x = I_y = \frac{1}{2}J_0 = \frac{1}{4}\pi R^4,$$

y los radios de giro respecto a los ejes x y y son

$$k_x = k_y = \sqrt{\frac{I_x}{A}} = \sqrt{\frac{(1/4)\pi R^4}{\pi R^2}} = \frac{1}{2}R.$$

El producto de inercia es cero,

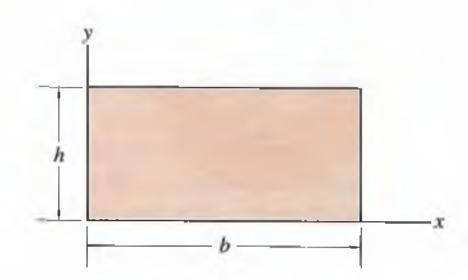
$$I_{xy} = 0.$$

COMENTARIO

Gracias a la simetría de este ejemplo no tuvimos que integrar para determinar I_x, I_y e I_{xy}. Manténgase alerta respecto a simetrías que puedan simplificar su trabajo. En particular, recuerde que $I_{xy} = 0$ si el área es simétrica respecto a uno de los ejes, x o y.

Problemas

Problemas 8.1-8.3



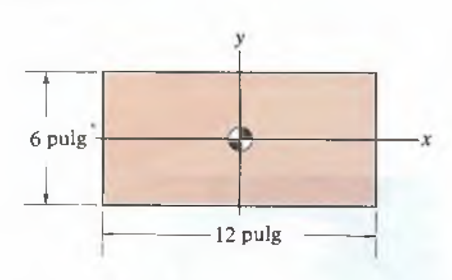
P8.1

8.1 Determine I_y y k_y.

8.2 Determine I_x y k_x considerando que dA es (a) una franja horizontal de altura dy; y (b) una franja vertical de ancho dx.

8.3 Determine I_{xy}.

Problemas 8.4, 8.5

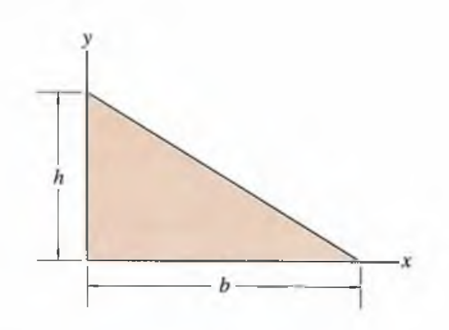


P8.4

8.4 Determine I_x, k_x, I_y y k_y.

8.5 Determine I_{xy} y J_0.

Problemas 8.6-8.8



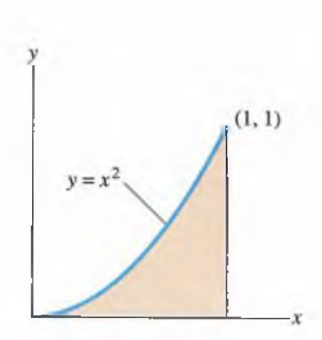
P8.6

8.6 Determine I_y y k_y.

8.7 Determine J_0 y k_0.

8.8 Determine I_{xy}.

Problemas 8.9-8.12



P8.9

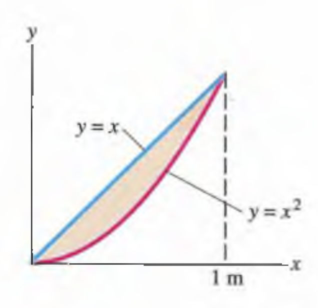
8.9 Determine I_y y k_y.

8.10 Determine I_x y k_x.

8.11 Determine J_0 y k_0.

8.12 Determine I_{xy}.

Problemas 8.13-8.16



P8.13

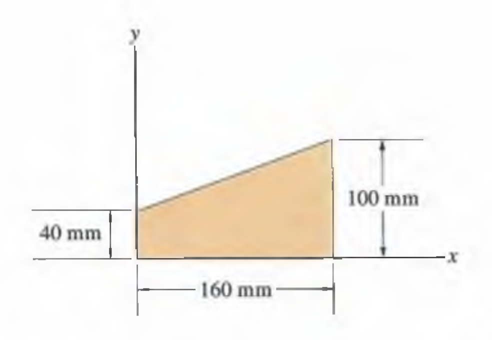
8.13 Determine I_y y k_y.

8.14 Determine I_x y k_x.

8.15 Determine J_0 y k_0.

8.16 Determine I_{xy}.

Problemas 8.17, 8.18

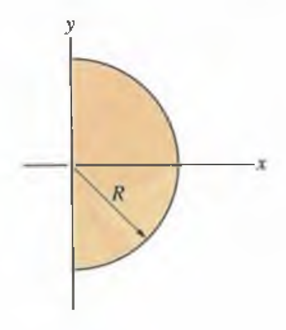


P8.17

8.17 Determine k_y.

8.18 Determine k_0.

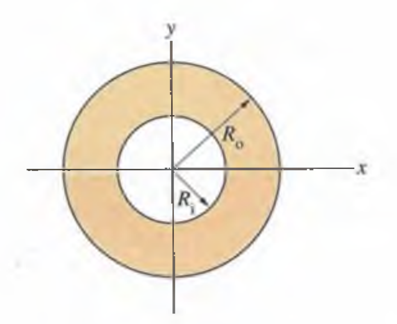
8.19 (a) Determine I_y y k_y de la figura P8.19 considerando dA como una franja vertical de ancho dx.
(b) El momento polar de inercia de un área circular con su centro en el origen es $J_0 = \frac{1}{2}\pi R^4$. Explique cómo se puede usar esta información para verificar su respuesta en la parte (a).



P8.19

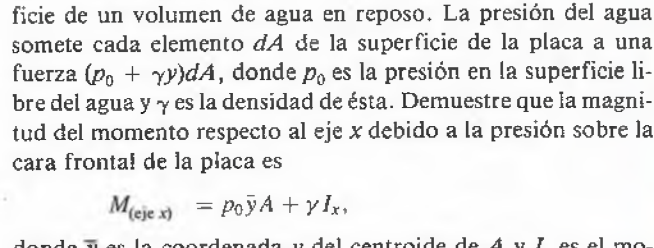
8.20 (a) Determine I_x y k_x para el área del problema 8.19, considerando dA como una franja horizontal de altura dy.
(b) El momento polar de inercia de un área circular con su centro en el origen es $J_0 = \frac{1}{2}\pi R^4$. Explique cómo se puede usar esta información para verificar su respuesta a la parte (a).

8.21 Determine J_0 y k_0 de la figura P8.21.



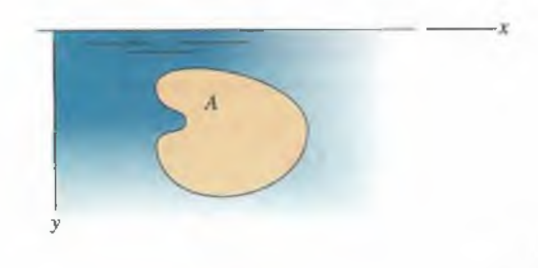
P8.21

8.22 La placa vertical mostrada se encuentra bajo la superficie de un volumen de agua en reposo. La presión del agua somete cada elemento dA de la superficie de la placa a una fuerza $(p_0 + \gamma y)dA$, donde p_0 es la presión en la superficie libre del agua y γ es la densidad de ésta. Demuestre que la magnitud del momento respecto al eje x debido a la presión sobre la cara frontal de la placa es



$$M_{(\text{eje } x)} = p_0 \bar{y} A + \gamma I_x,$$

donde $\bar{y}$ es la coordenada y del centroide de A y I_x es el momento de inercia de A respecto al eje x.



P8.22

8.2 *Teoremas de los ejes paralelos*

En algunos casos se conocen los momentos de inercia de un área respecto a un sistema coordenado particular, pero a veces se requieren sus valores en términos de un sistema coordenado diferente. Si los sistemas coordenados son paralelos, se pueden obtener los momentos de inercia con los teoremas que describimos en esta sección. Además, estos teoremas permiten determinar los momentos de inercia de un área compuesta cuando se conocen los momentos de inercia de sus partes.

Conocemos los momentos de inercia de un área A en términos de un sistema coordenado $x'y'$ con su origen en el centroide del área, y queremos determinar sus momentos de inercia con respecto a un sistema coordenado paralelo xy (Fig. 8.7a). Las coordenadas del centroide de A en el sistema coordenado xy se denotan con (d_x, d_y) y $d = \sqrt{d_x^2 + d_y^2}$ es la distancia del origen del sistema xy al centroide (Fig. 8.7b).

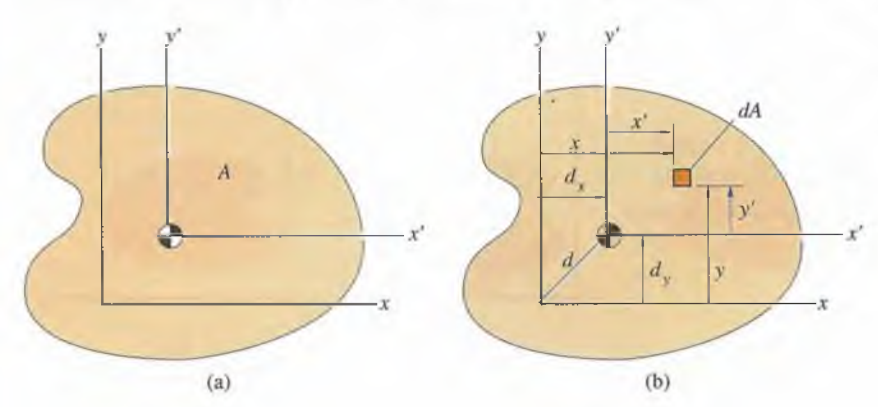


Figura 8.7
(a) Área A y sistemas coordenados $x'y'$ y xy.
(b) Elemento diferencial dA.

Necesitamos obtener dos resultados preliminares antes de deducir los teoremas de los ejes paralelos. Con respecto al sistema coordenado $x'y'$, las coordenadas del centroide de A son

$$\bar{x}' = \frac{\int_A x'\,dA}{\int_A dA}, \quad \bar{y}' = \frac{\int_A y'\,dA}{\int_A dA}.$$

Pero el origen del sistema coordenado $x'y'$ está localizado en el centroide de A, por lo que $\bar{x}' = 0$ y $\bar{y}' = 0$. Por tanto,

$$\int_A x'\,dA = 0, \quad \int_A y'\,dA = 0. \tag{8.8}$$

Momento de inercia respecto al eje x Con respecto al sistema coordenado xy, el momento de inercia de A respecto al eje x es

$$I_x = \int_A y^2\,dA, \tag{8.9}$$

donde y es la coordenada del elemento de área dA relativa al sistema coordenado xy. En la figura 8.7(b) vemos que $y = y' + d_y$, donde y' es la coordenada de dA relativa al sistema coordenado $x'y'$. Sustituyendo esta expresión en la ecuación (8.9) obtenemos

$$I_x = \int_A (y' + d_y)^2 \, dA = \int_A (y')^2 \, dA + 2d_y \int_A y' \, dA + d_y^2 \int_A dA.$$

La primera integral a la derecha es el momento de inercia de A respecto al eje x'. De acuerdo con la ecuación (8.8), la segunda integral a la derecha es igual a cero. Por tanto,

$$I_x = I_{x'} + d_y^2 A. \qquad (8.10)$$

Ésta es la expresión del **teorema de los ejes paralelos**. Relaciona el momento de inercia de A respecto al eje centroidal x' con el momento de inercia respecto al eje x paralelo (Fig. 8.8).

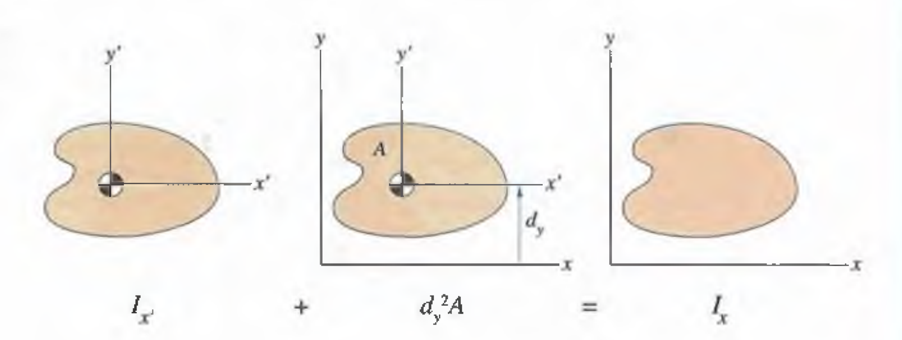


Figura 8.8
Teorema de los ejes paralelos para el momento de inercia respecto al eje x.

Momento de inercia respecto al eje y En términos del sistema coordenado xy, el momento de inercia de A respecto al eje y es

$$I_y = \int_A x^2 \, dA = \int_A (x' + d_x)^2 \, dA$$

$$= \int_A (x')^2 \, dA + 2d_x \int_A x' \, dA + d_x^2 \int_A dA.$$

Por la Ec. (8.8), la segunda integral a la derecha es cero. Así, el teorema que relaciona el momento de inercia de A respecto al eje y' centroidal con el momento de inercia respecto al eje y paralelo es

$$I_y = I_{y'} + d_x^2 A. \qquad (8.11)$$

Producto de inercia El teorema de los ejes paralelos para el producto de inercia es

$$I_{xy} = I_{x'y'} + d_x d_y A. \qquad (8.12)$$

Momento polar de inercia El teorema de los ejes paralelos para el momento polar de inercia es

$$J_0 = J'_0 + (d_x^2 + d_y^2)A = J'_0 + d^2 A, \qquad (8.13)$$

donde d es la distancia del origen del sistema coordenado $x'y'$ al origen del sistema coordenado xy.

¿Cómo usar el teorema de los ejes paralelos para determinar los momentos de inercia de un área compuesta? Digamos que se quiere determinar el momento de inercia respecto al eje y del área de la figura 8.9(a). Ésta se puede dividir en un triángulo, un semicírculo y un recorte circular, que llamaremos partes 1, 2 y 3 respectivamente (Fig. 8.9b). Usando el teorema de los ejes paralelos para I_y podemos determinar el momento de inercia de cada parte respecto al eje y. Por ejemplo, el momento de inercia de la parte 2 (el semicírculo) respecto al eje y es (Fig. 8.9c)

$$(I_y)_2 = (I_{y'})_2 + (d_x)_2^2 A_2.$$

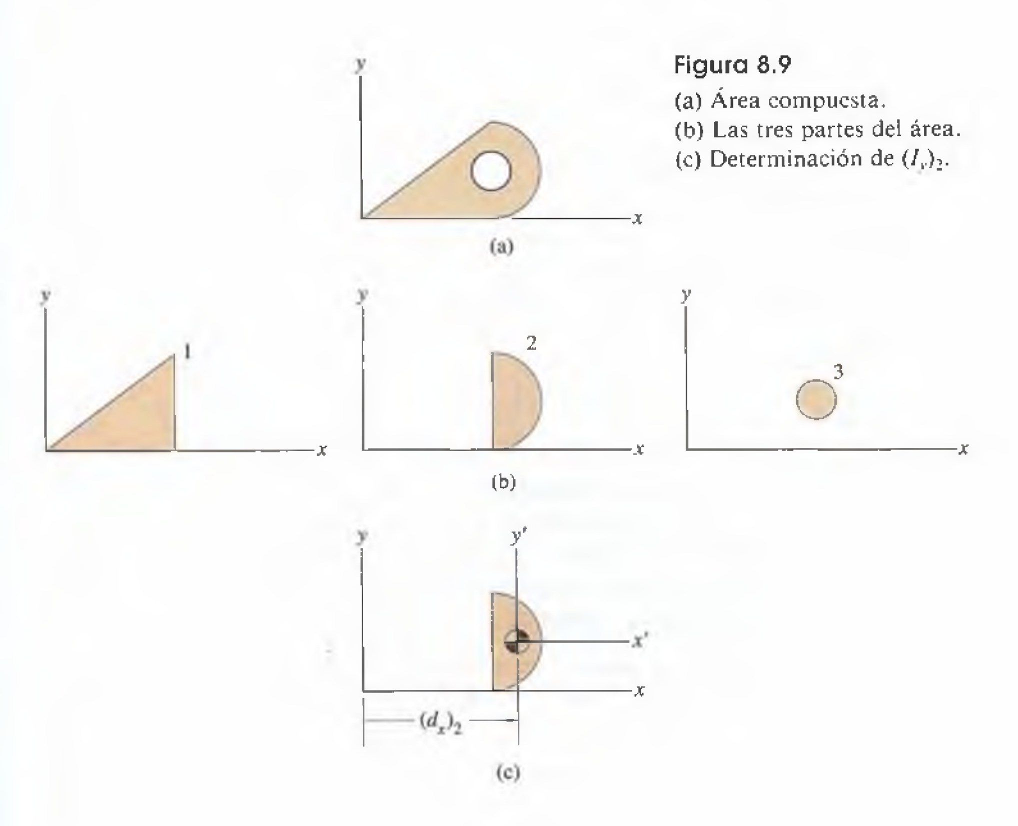


Figura 8.9
(a) Área compuesta.
(b) Las tres partes del área.
(c) Determinación de $(I_y)_2$.

Se deben determinar los valores de $(I_y)_2$ y $(d_x)_2$. En el apéndice B están tabulados los momentos de inercia y las posiciones de los centroides de algunas áreas simples. Una vez que se ha efectuado el cálculo para cada parte, el momento de inercia del área compuesta es

$$I_y = (I_y)_1 + (I_y)_2 - (I_y)_3.$$

Observe que se debe restar el momento de inercia del recorte circular.

En el ejemplo siguiente aplicamos el teorema de los ejes paralelos a un área simple. Luego presentamos dos ejemplos que muestran cómo determinar los momentos de inercia de áreas compuestas. La determinación del momento de inercia de un área compuesta en términos de un sistema coordenado específico consta de tres pasos:

1. Seleccionar las partes. *Trate de dividir el área compuesta en partes cuyos momentos de inercia se conozcan o se puedan determinar con facilidad.*

2. Determinar los momentos de inercia de las partes. *Determine el momento de inercia de cada parte en términos de un sistema coordenado paralelo con su origen en el centroide de la parte y luego use el teorema de los ejes paralelos para determinar el momento de inercia en términos del sistema coordenado dado.*

3. Sumar los resultados. *Sume los momentos de inercia de las partes (o reste en caso de un recorte) para obtener el momento de inercia del área compuesta.*

Ejemplo 8.3

Los momentos de inercia del área rectangular de la figura 8.10 con respecto al sistema coordenado $x'y'$ son $I_{x'} = \frac{1}{12}bh^3$, $I_{y'} = \frac{1}{12}hb^3$, $I_{x'y'} = 0$ y $J'_0 = \frac{1}{12}(bh^3 + hb^3)$. (Véase el Ap. B.) Determine sus momentos de inercia con respecto al sistema coordenado xy.

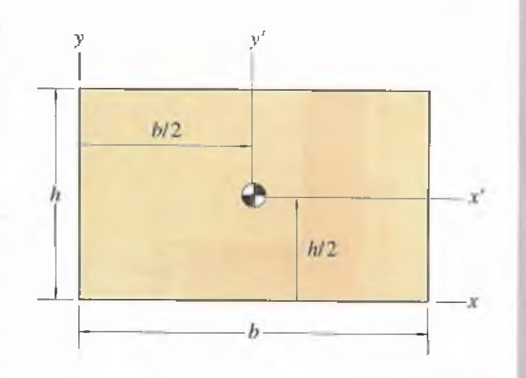


Figura 8.10

ESTRATEGIA

El sistema coordenado $x'y'$ tiene su origen en el centroide del área y es paralelo al sistema coordenado xy. Podemos utilizar los teoremas de eje-paralelo para determinar los momentos de inercia de A en términos del eje coordenado xy.

SOLUCIÓN

Las coordenadas del centroide con respecto al sistema coordenado xy son $d_x = b/2$, $d_y = h/2$. El momento de inercia respecto al eje x es

$$I_x = I_{x'} + d_y^2 A = \frac{1}{12}bh^3 + \left(\frac{1}{2}h\right)^2 (bh) = \frac{1}{3}bh^3.$$

El momento de inercia respecto al eje y es

$$I_y = I_{y'} + d_x^2 A = \frac{1}{12}hb^3 + \left(\frac{1}{2}b\right)^2 (bh) = \frac{1}{3}hb^3.$$

El producto de inercia es

$$I_{xy} = I_{x'y'} + d_x d_y A = 0 + \left(\frac{1}{2}b\right)\left(\frac{1}{2}h\right)(bh) = \frac{1}{4}b^2h^2.$$

El momento polar de inercia es

$$J_0 = J_0' + d^2 A = \frac{1}{12}(bh^3 + hb^3) + \left[\left(\frac{1}{2}b\right)^2 + \left(\frac{1}{2}h\right)^2\right](bh)$$

$$= \frac{1}{3}(bh^3 + hb^3).$$

COMENTARIO

Observe que J_0 también se pudo haber determinado usando la relación

$$J_0 = I_x + I_y = \frac{1}{3}bh^3 + \frac{1}{3}hb^3.$$

Ejemplo 8.4

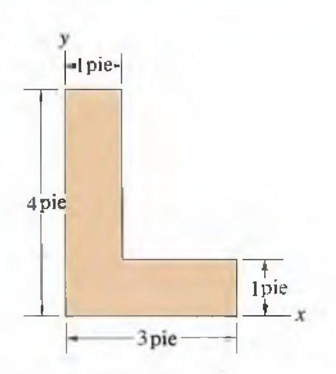


Figura 8.11

Determine I_x, k_x e I_{xy} para el área compuesta de la figura 8.11.

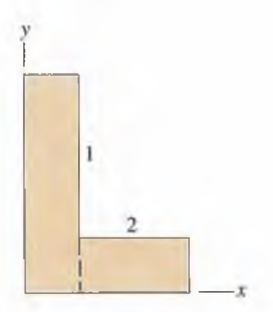
SOLUCIÓN

Selección de las partes Podemos determinar los momentos de inercia subdividiendo el área en las partes rectangulares 1 y 2 de la figura (a).

Determinación de los momentos de inercia de las partes Para cada parte incluimos un sistema coordenado $x'y'$ con origen en el centroide de la parte (Fig. b). En el apéndice B aparecen los momentos de inercia de las partes rectangulares en términos de esos sistemas coordenados. Luego usamos el teorema de los ejes paralelos para determinar el momento de inercia de cada parte respecto al eje x (Tabla 8.1).

Tabla 8.1 Determinación de los momentos de inercia de las partes respecto al eje x

	d_y(pie)	A(pie^2)	$I_{x'}$(pie^4)	$I_x = I_{x'} + d_y^2 A$(pie^4)
Parte 1	2	(1)(4)	$\frac{1}{12}(1)(4)^3$	21.33
Parte 2	0.5	(2)(1)	$\frac{1}{12}(2)(1)^3$	0.67



(a) División del área en los rectángulos 1 y 2.

Suma de los resultados El momento de inercia del área compuesta respecto al eje x es

$$I_x = (I_x)_1 + (I_x)_2 = 21.33 + 0.67 = 22.00\,\text{pies}^4.$$

La suma de las áreas es $A = A_1 + A_2 = 6$ pie^2, por lo que el radio de giro respecto al eje x es

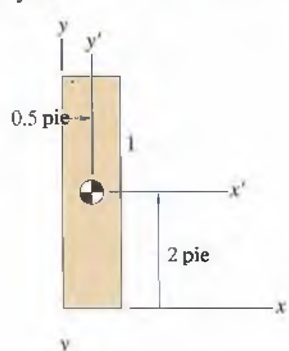
$$k_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}} = \sqrt{\frac{22}{6}} = 1.91\ \text{pies}^4.$$

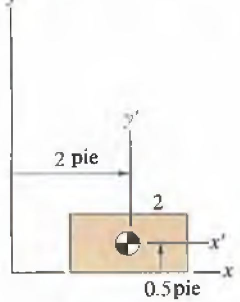
Repitiendo este procedimiento, en la tabla 8.2 determinamos I_{xy} para cada una de las partes. El producto de inercia del área compuesta es

$$I_{xy} = (I_{xy})_1 + (I_{xy})_2 = 4 + 2 = 6\,\text{pies}^4.$$

Tabla 8.2 Determinación de los productos de inercia de las partes con respecto al sistema coordenado xy

	d_x(pie)	d_y(pie)	A(pie^2)	$I_{x'y'}$	$I_{xy} = I_{x'y'} + d_x d_y A$(pie^4)
Parte 1	0.5	2	(1)(4)	0	4
Parte 2	2	0.5	(2)(1)	0	2





(b) Sistemas coordenados paralelos $x'y'$ y xy con orígenes en los centroides de las partes.

COMENTARIO

Los momentos de inercia no dependen de cómo se divide un área compuesta en partes, y siempre habrá varias maneras de hacerlo. Véase el problema 8.24, donde dividimos de manera distinta el área compuesta de este ejemplo.

Ejemplo 8.5

Determine I_y y k_y para el área compuesta de la figura 8.12.

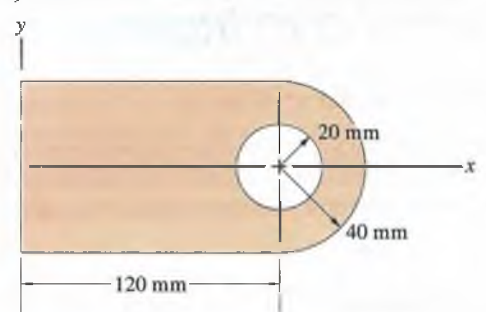


Figura 8.12

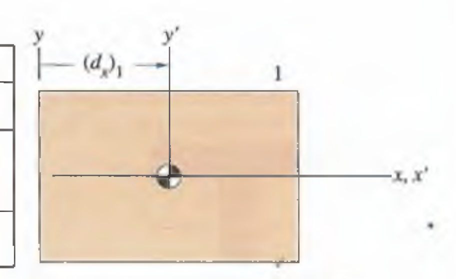
SOLUCIÓN

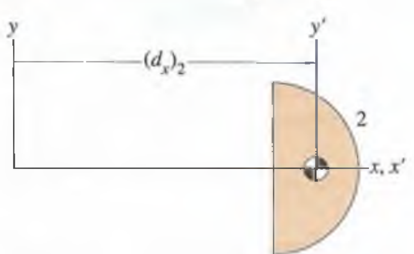
Selección de las partes Dividimos el área en un rectángulo, un semicírculo y un recorte circular, a los que llamamos partes 1, 2 y 3 (Fig. a).

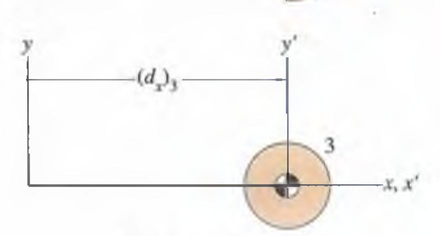
Determinación de los momentos de inercia de las partes En el apéndice B se incluyen los momentos de inercia de las partes con respecto a los sistemas coordenados $x'y'$ y la localización del centroide de la parte semicircular. En la tabla 8.3 usamos el teorema de los ejes paralelos para determinar el momento de inercia de cada parte respecto al eje x.

Tabla 8.3 Determinación de los momentos de inercia de las partes

	d_x (mm)	A (mm^2)	$I_{y'}$ (mm^4)	$I_y = I_{y'} + d_x^2 A$ (mm^4)
Parte 1	60	(120)(80)	$\frac{1}{12}(80)(120)^3$	4.608×10^7
Parte 2	$120 + \dfrac{4(40)}{3\pi}$	$\frac{1}{2}\pi(40)^2$	$\left(\dfrac{\pi}{8} - \dfrac{8}{9\pi}\right)(40)^4$	4.744×10^7
Parte 3	120	$\pi(20)^2$	$\frac{1}{4}\pi(20)^4$	1.822×10^7







(a) Partes 1, 2 y 3.

Suma de los resultados El momento de inercia del área compuesta respecto al eje y es

$$I_y = (I_y)_1 + (I_y)_2 - (I_y)_3 = (4.608 + 4.744 - 1.822) \times 10^7$$

$$= 7.530 \times 10^7 \text{ mm}^4.$$

El área total es

$$A = A_1 + A_2 - A_3 = (120)(80) + \frac{1}{2}\pi(40)^2 - \pi(20)^2$$

$$= 1.086 \times 10^4 \text{ mm}^2,$$

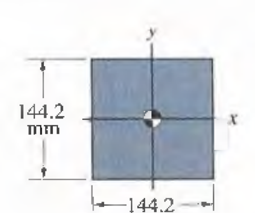
por lo que el radio de giro respecto al eje y es

$$k_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} = \sqrt{\frac{7.530 \times 10^7}{1.086 \times 10^4}} = 83.3 \text{ mm}.$$

Ejemplo 8.6

Aplicación a la ingeniería

Diseño de una viga



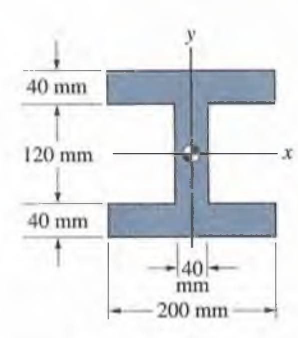


Figura 8.13

Las áreas iguales de la figura 8.13 son diferentes opciones de la sección transversal de una viga (una viga con la segunda sección transversal se denomina viga I). Compare sus momentos de inercia respecto al eje x.

SOLUCIÓN

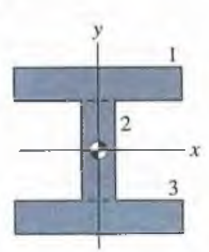
Sección transversal cuadrada De acuerdo con el apéndice B, el momento de inercia de la sección cuadrada respecto al eje x es

$$I_x = \frac{1}{12}(144.2)(144.2)^3 = 3.60 \times 10^7 \text{ mm}^4.$$

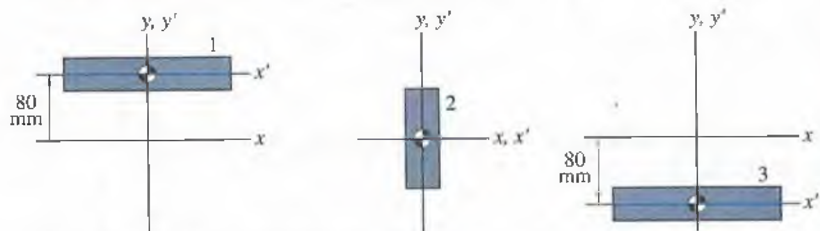
Sección transversal de viga I Podemos dividir el área en partes rectangulares (Fig. a). Incluyendo sistemas coordenados $x'y'$ con orígenes en los centroides de las partes (Fig. b), usamos el teorema de los ejes paralelos para determinar los momentos de inercia respecto al eje x (Tabla 8.4). Su suma es

$$I_x = (I_x)_1 + (I_x)_2 + (I_x)_3 = (5.23 + 0.58 + 5.23) \times 10^7$$
$$= 11.03 \times 10^7 \text{ mm}^4.$$

El momento de inercia de la viga I respecto al eje x es 3.06 veces el de la sección transversal cuadrada de igual área.



(a) División en partes de la sección transversal de la viga I.



(b) Sistemas coordenados paralelos $x'y'$ con orígenes en los centroides de las partes.

Tabla 8.4 Determinación de los momentos de inercia respecto al eje x de cada parte.

	d_y (mm)	A (mm^2)	$I_{x'}$ (mm^4)	$I_x = I_{x'} + d_y^2 A$ (mm^4)
Parte 1	80	(200)(40)	$\frac{1}{12}(200)(40)^3$	5.23×10^7
Parte 2	0	(40)(120)	$\frac{1}{12}(40)(120)^3$	0.58×10^7
Parte 3	−80	(200)(40)	$\frac{1}{12}(200)(40)^3$	5.23×10^7

CONSIDERACIONES DE DISEÑO



(a) Viga simplemente apoyada.



(b) Viga en voladizo.

Figura 8.14

Una **viga** es una barra de un material que soporta cargas laterales, es decir, cargas perpendiculares al eje de la barra. En la figura 8.14 se muestran dos tipos comunes de vigas que soportan una carga lateral F. La viga con pasado-

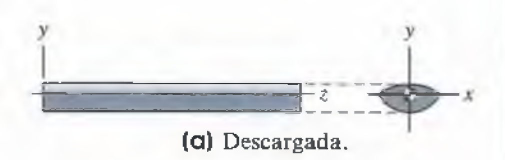
res extremos se denomina **viga simplemente apoyada**, mientras que la viga con un solo soporte de empotramiento se denomina **viga en voladizo**.

Las cargas laterales sobre una viga hacen que se deflexione; debe ser rígida o resistente a la flexión para soportar las cargas. La resistencia de una viga a la flexión depende directamente del momento de inercia del área de su sección transversal. Consideremos la viga de la figura 8.15(a). La sección transversal es simétrica respecto al eje y y el origen del sistema coordenado se ubica en su centroide. Si la viga es de un material estructural homogéneo como el acero y está sometida a pares en sus extremos (Fig. b), al flexionarse asumirá una forma de arco circular de radio R. Se puede demostrar que $R = \frac{EI_x}{M}$, donde I_x es el momento de inercia de la sección transversal de la viga respecto al eje x. El "módulo elástico" o "módulo de Young" E tiene diferentes valores según los materiales. (Esta ecuación vale sólo si M es lo bastante pequeño para que la viga retome su forma original al eliminar los pares. La flexión de la figura 8.15b ha sido exagerada.) Así, la magnitud que la viga se flexiona para un valor dado de M depende del material y del momento de inercia de su sección transversal. Si I_x se incrementa, el valor de R aumenta, o sea que aumenta la resistencia de la viga a la flexión.

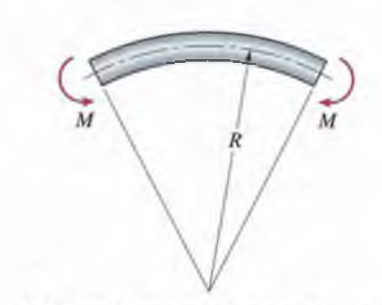
Esto explica la forma de las secciones transversales de las vigas reales, como en los pasos a desnivel carreteros o los marcos de edificios; están configuradas para tener grandes momentos de inercia. Todas las secciones transversales de la figura 8.16 tienen la misma área. Los números indican las razones del momento de inercia I_x al valor de I_x de la sección transversal sólida cuadrada.

Figura 8.15

Viga con sección transversal simétrica.



(a) Descargada.



(b) Sometida a pares en los extremos.

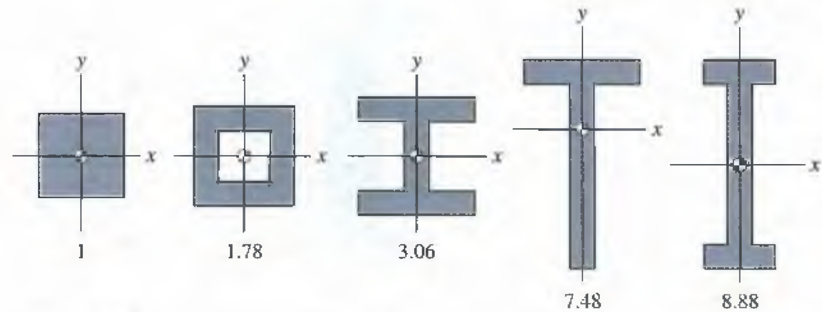
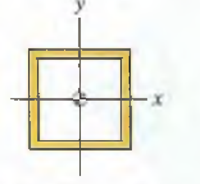


Figura 8.16

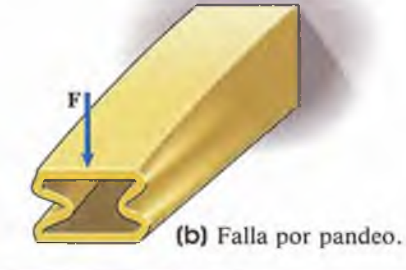
Secciones transversales de viga típicas y la razón de I_x al valor correspondiente de una viga cuadrada maciza de igual área en su sección transversal.

Configurar la sección transversal de una viga para aumentar su momento de inercia puede llevarnos demasiado lejos. La viga de la figura 8.17(a) tiene un valor de I_x que es cuatro veces mayor que el de la viga sólida cuadrada con la misma área en su sección transversal, pero sus paredes son tan delgadas que pueden "pandearse" (Fig. 8.17b). La rigidez que implica el gran momento de inercia de la viga no se puede realizar porque ésta se vuelve geométricamente inestable. Una solución común para lograr un gran momento de inercia en una viga relativamente ligera y evitar su falla por pandeo es estabilizar sus paredes rellenando la viga con un material ligero, como metal alveolado o espuma de plástico (Fig. 8.17c).

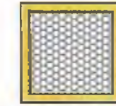
Figura 8.17



(a) Viga tubular cuadrada de paredes delgadas.



(b) Falla por pandeo.

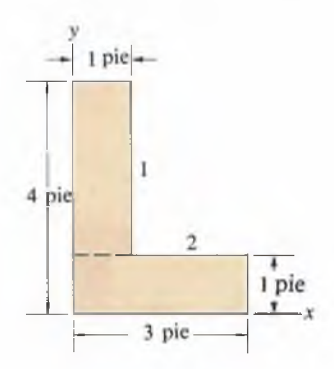


(c) Estabilización de las paredes con un relleno.

Problemas

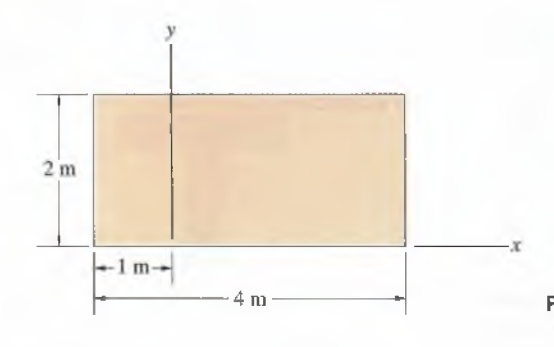
8.23 Determine I_y y k_y para el área compuesta del ejemplo 8.4.

8.24 Determine I_x, k_x e I_{xy} para el área compuesta dividiéndola en los rectángulos 1 y 2 mostrados, y compare sus resultados con los del ejemplo 8.4.



P8.24

Problemas 8.25-8.27



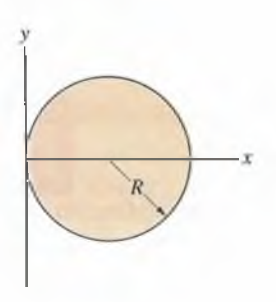
P8.25

8.25 Determine I_y y k_y.

8.26 Determine J_0 y k_0.

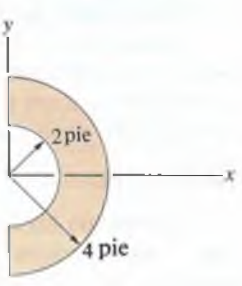
8.27 Determine I_{xy}.

8.28 Determine I_y, k_y, J_0 y k_0.



P8.28

Problemas 8.29-8.31



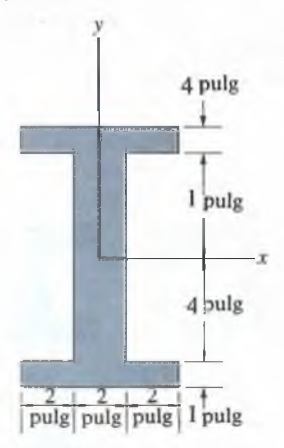
P8.29

8.29 Determine I_y y k_y.

8.30 Determine I_x y k_x.

8.31 Determine J_0 y k_0.

Problemas 8.32, 8.33

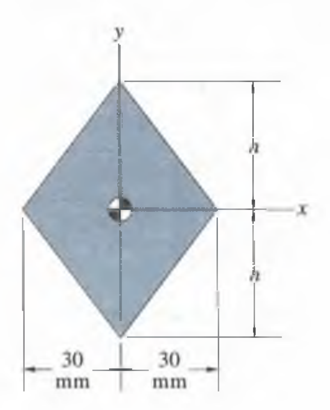


P8.32

8.32 Determine I_x y k_x.

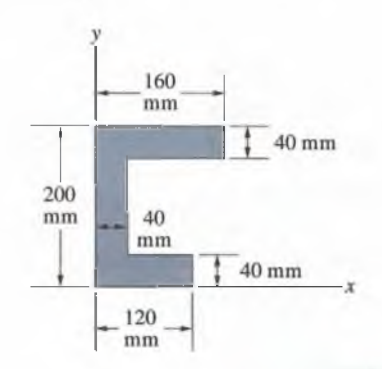
8.33 Determine J_0 y k_0.

8.34 Si se diseña la sección transversal de la viga de modo que $I_x = 6.4 \times 10^5 \text{ mm}^4$, ¿qué valor tienen I_y y J_0?



P8.34

Problemas 8.35-8.37



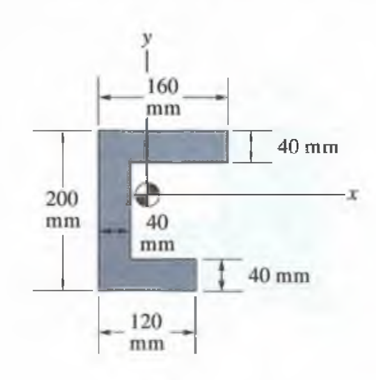
P8.35

8.35 Determine I_y y k_y.

8.36 Determine I_x y k_x.

8.37 Determine I_{xy}.

Problemas 8.38-8.40 (El origen del sistema coordenado está en el centroide del área compuesta.)



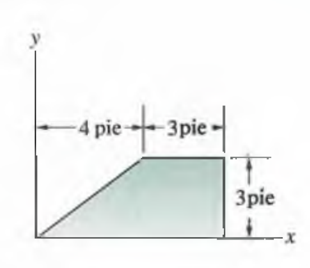
P8.38

8.38 Determine I_x y k_x.

8.39 Determine I_y y k_y.

8.40 Determine I_{xy}.

Problemas 8.41-8.43



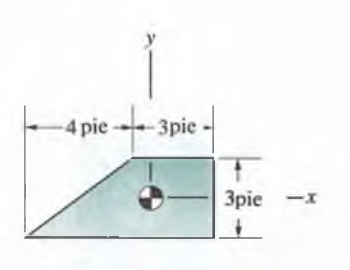
P8.41

8.41 Determine I_x y k_x.

8.42 Determine J_0 y k_0.

8.43 Determine I_{xy}.

Problemas 8.44-8.46 (El origen del sistema coordenado está en el centroide del área compuesta.)



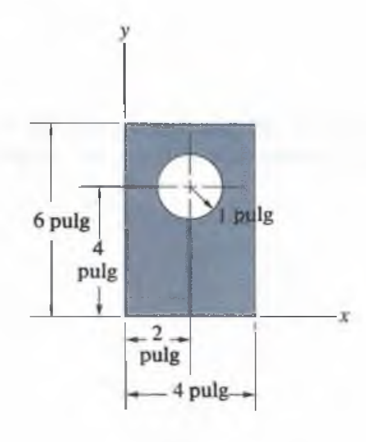
P8.44

8.44 Determine I_x y k_x.

8.45 Determine J_0 y k_0.

8.46 Determine I_{xy}.

Problemas 8.47-8.49



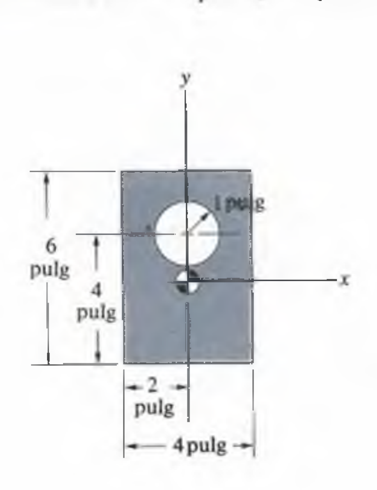
P8.47

8.47 Determine I_x y k_x.

8.48 Determine J_0 y k_0.

8.49 Determine I_{xy}.

Problemas 8.50-8.52 (El origen del sistema coordenado está en el centroide del área compuesta.)



P8.50

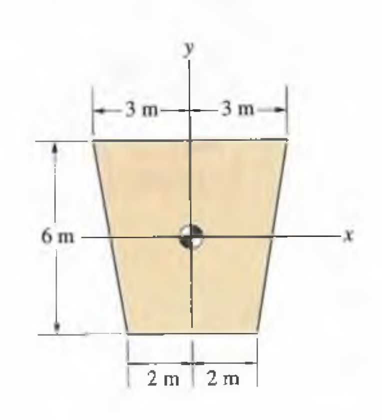


8.50 Determine I_x y k_x.

8.51 Determine J_0 y k_0.

8.52 Determine I_{xy}.

Problemas 8.53-8.55 (El origen del sistema coordenado está en el centroide del área compuesta.)



P8.53

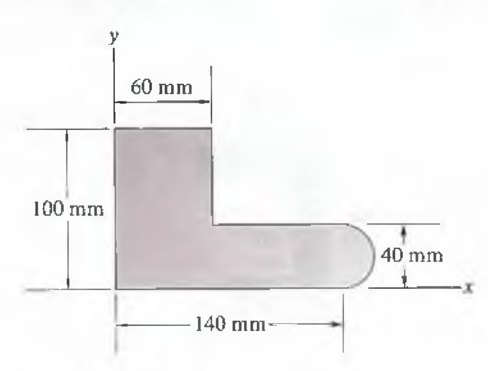


8.53 Determine I_x y k_x.

8.54 Determine I_y y k_y.

8.55 Suponga que se quiere reducir I_x en un 20% colocando un agujero circular con su centro en el centroide del área. ¿Qué valor debe tener el radio del agujero?

Problemas 8.56-8.58



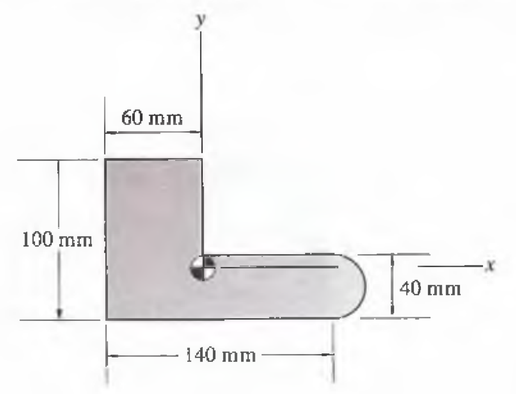
P8.56

8.56 Determine I_y y k_y.

8.57 Determine I_x y k_x.

8.58 Determine I_{xy}.

Problemas 8.59-8.61 (El origen del sistema coordenado está en el centroide del área compuesta.)



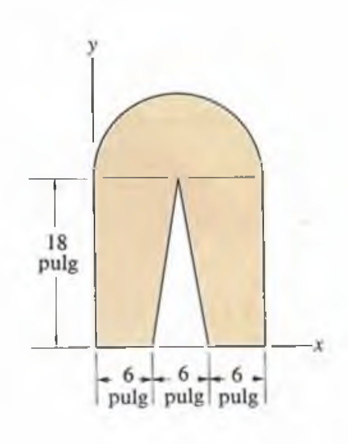
P8.59

8.59 Determine I_y y k_y.

8.60 Determine I_x y k_x.

8.61 Determine I_{xy}.

Problemas 8.62-8.64



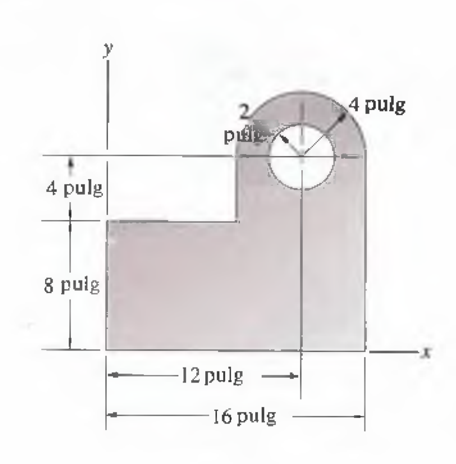
P8.62

8.62 Determine I_y y k_y.

8.63 Determine I_x y k_x.

8.64 Determine I_{xy}.

Problemas 8.65-8.67



P8.65

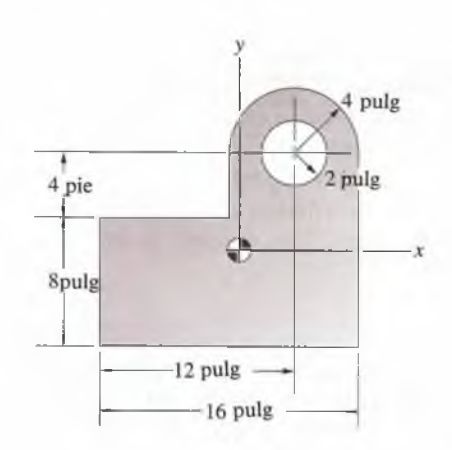
8.65 Determine I_y y k_y.

8.66 Determine I_x y k_x.

8.67 Determine I_{xy}.

Problemas 8.68-8.70 (El origen del sistema coordenado está en el centroide del área compuesta.)

8.68 Determine I_y y k_y.

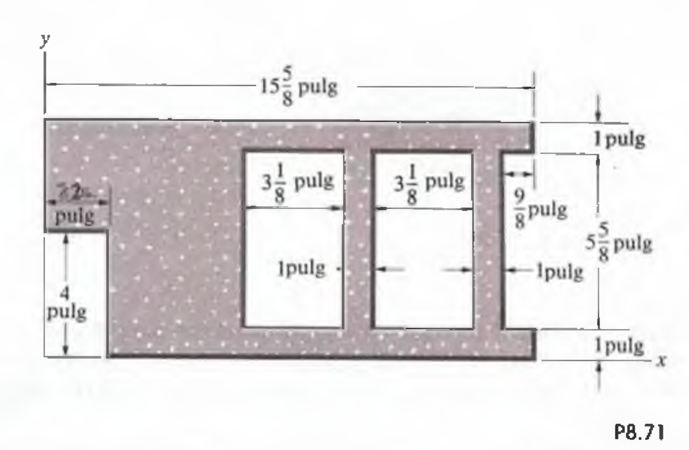


P8.68

8.69 Determine I_x y k_x.

8.70 Determine I_{xy}.

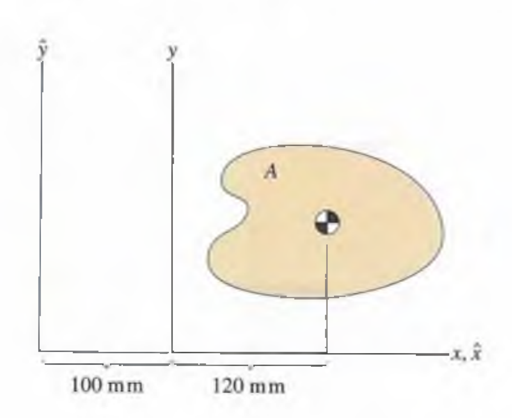
8.71 Determine I_y de la sección transversal de la unidad de mampostería mostrada.



P8.71

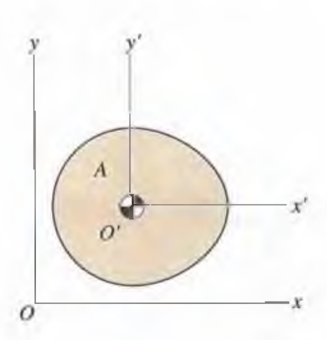
8.72 Determine I_x de la sección transversal del problema 8.71.

8.73 El área A mostrada $= 2 \times 10^4$ mm². Su momento de inercia respecto al eje y es $I_y = 3.2 \times 10^3$ mm⁴. Determine su momento de inercia respecto al eje $\hat{y}$.



P8.73

8.74 El área A mostrada = 100 pulg^2 y es *simétrica* respecto al eje x'. Los momentos de inercia $I_{x'}$ = 420 pulg^4, $I_{y'}$ = 580 pulg^4, J_0 = 11 000 pulg^4 e I_{xy} = 4800 pulg^4. ¿Qué valor tienen I_x e I_y?



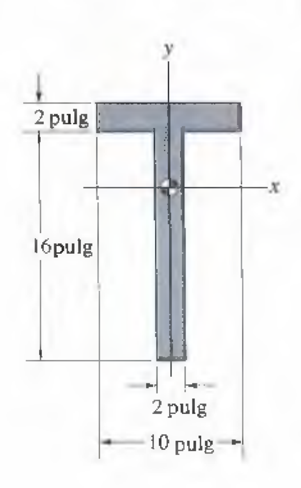
P8.74

8.75 Obtenga el teorema de los ejes paralelos para el producto de inercia, ecuación (8.12), usando el mismo procedimiento utilizado para obtener las ecuaciones (8.10) y (8.11).

8.76 Obtenga el teorema de los ejes paralelos para el momento polar de inercia, ecuación (8.13), (a) utilizando el mismo procedimiento que usamos para obtener las ecuaciones (8.10) y (8.11); (b) utilizando las ecuaciones (8.10) y (8.11).

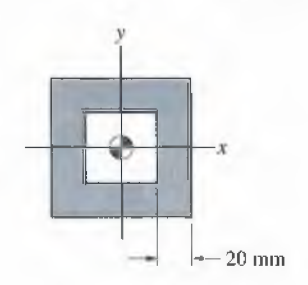
Los problemas 8.77-8.80 están relacionados con el ejemplo 8.6.

8.77 Determine el momento de inercia respecto al eje x de la sección transversal de la viga mostrada. Compare su resultado con el momento de inercia de una sección cuadrada sólida de igual área y verifique la razón mostrada en la figura 8.16.



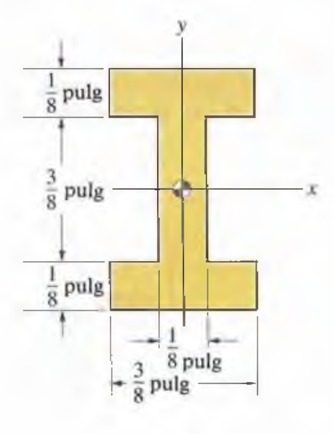
P8.77

8.78 El área de la sección transversal de la viga mostrada tiene 5200 mm^2. Determine el momento de inercia de la sección transversal de la viga respecto al eje x. Compare su resultado con el momento de inercia de una sección transversal cuadrada sólida de igual área y verifique la razón mostrada en la figura 8.16.



P8.78

8.79 (a) Si I_x se expresa en pulg^4, R en pulg y M en pulg-lb, ¿cuáles son las dimensiones del módulo de Young E?
(b) Una viga con la sección transversal mostrada, que está sometida a pares M = 1500 pulg-lb como se muestra en la figura 8.15(b), se flexiona adquiriendo la forma de un arco circular con radio R = 120 pulgadas. ¿Qué valor tiene el módulo de Young del material?



P8.79

8.80 Suponga que se quiere diseñar una viga hecha de un material cuya densidad es de 8000 kg/m^3. La viga tendrá 4 m de longitud y una masa de 320 kg. Diseñe una sección transversal para la viga tal que $I_x = 3 \times 10^{-5}$ m^4.

8.3 Ejes girados y ejes principales

Suponga que la figura 8.18(a) es la sección transversal de una viga en voladizo. Se aplica una fuerza vertical al extremo de la viga: se obtendrá una deflexión mayor si la sección transversal está orientada como en la figura (b) que si lo está como en la figura (c). La deflexión vertical *mínima* resulta cuando la sección transversal de la viga está orientada de manera que el momento de inercia I_x sea máximo (Fig. d).

En muchas aplicaciones de ingeniería se deben determinar los momentos de inercia de áreas con diversas orientaciones angulares relativas a un sistema coordenado, y la orientación para la cual el momento de inercia es máximo o mínimo. Aquí analizaremos tales procedimientos.

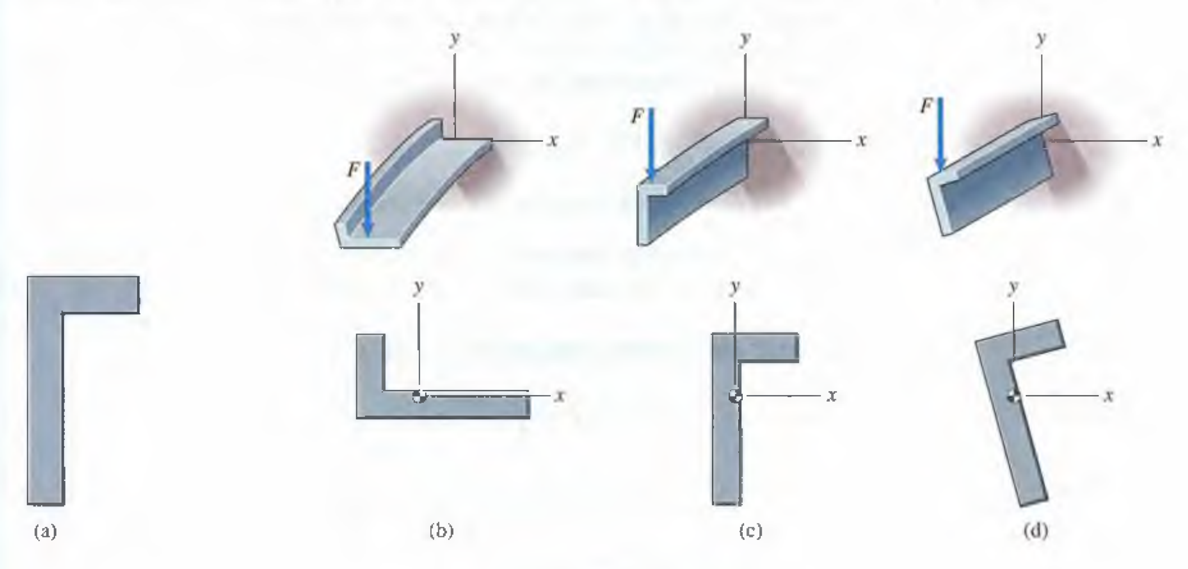


Figura 8.18
(a) Sección transversal de una viga.
(b)-(d) Aplicación de una carga lateral con diferentes orientaciones de la sección transversal.

Ejes girados

Sea un área A, un sistema coordenado xy y un segundo sistema coordenado $x'y'$ que está girado un ángulo θ con respecto al sistema coordenado xy (Fig. 8.19a). Supongamos que conocemos los momentos de inercia de A en términos del sistema coordenado xy. Nuestro objetivo es determinar los momentos de inercia con respecto al sistema coordenado $x'y'$.

En función de la distancia radial r a un elemento diferencial de área dA y al ángulo α de la figura 8.19(b), las coordenadas de dA en el siste-

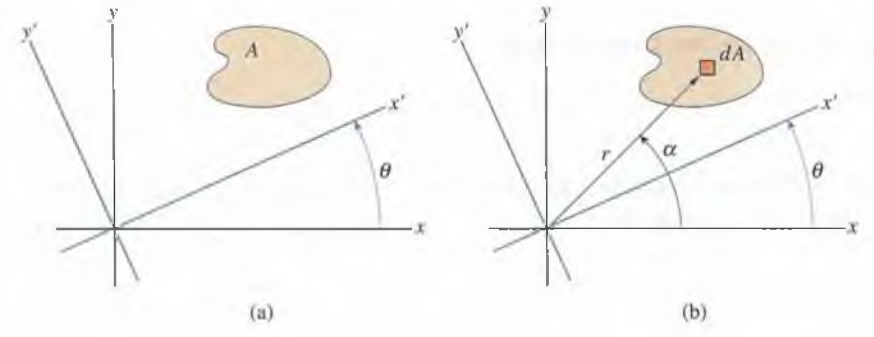


Figura 8.19
(a) El sistema coordenado $x'y'$ girado una ángulo α respecto al sistema coordenado xy.
(b) Elemento diferencial de área dA.

ma coordenado xy son

$$x = r\cos\alpha, \tag{8.14}$$

$$y = r\,\mathrm{sen}\,\alpha. \tag{8.15}$$

Las coordenadas de dA en el sistema coordenado $x'y'$ son

$$x' = r\cos(\alpha - \theta) = r(\cos\alpha\cos\theta + \mathrm{sen}\,\alpha\,\mathrm{sen}\,\theta), \tag{8.16}$$

$$y' = r\,\mathrm{sen}(\alpha - \theta) = r(\mathrm{sen}\,\alpha\cos\theta - \cos\alpha\,\mathrm{sen}\,\theta). \tag{8.17}$$

En las Ecs. (8.16) y (8.17) utilizamos identidades trigonométricas para el coseno y el seno de la diferencia de dos ángulos (Ap. A).

Sustituyendo las Ecs. (8.14) y (8.15) en las Ecs. (8.16) y (8.17), obtenemos otras que relacionan las coordenadas de dA en los dos sistemas:

$$x' = \quad x\cos\theta + y\,\mathrm{sen}\,\theta, \tag{8.18}$$

$$y' = -x\,\mathrm{sen}\,\theta + y\cos\theta. \tag{8.19}$$

Con estas expresiones podemos deducir relaciones entre los momentos de inercia de A en términos de los sistemas coordenados xy y $x'y'$:

Momento de inercia respecto al eje x'

$$I_{x'} = \int_A (y')^2 dA = \int_A (-x\,\mathrm{sen}\,\theta + y\cos\theta)^2 dA$$

$$= \cos^2\theta \int_A y^2 dA - 2\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta \int_A xy\,dA + \mathrm{sen}^2\theta \int_A x^2 dA.$$

De esta ecuación obtenemos

$$I_{x'} = I_x\cos^2\theta - 2I_{xy}\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta + I_y\,\mathrm{sen}^2\theta. \tag{8.20}$$

Momento de inercia respecto al eje y'

$$I_{y'} = \int_A (x')^2 dA = \int_A (x\cos\theta + y\,\mathrm{sen}\,\theta)^2 dA$$

$$= \mathrm{sen}^2\theta \int_A y^2 dA + 2\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta \int_A xy\,dA + \cos^2\theta \int_A x^2 dA.$$

Esta ecuación nos da el resultado

$$I_{y'} = I_x\,\mathrm{sen}^2\theta + 2I_{xy}\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta + I_y\cos^2\theta. \tag{8.21}$$

Producto de inercia Con respecto al sistema coordenado $x'y'$, el producto de inercia de A es

$$I_{x'y'} = (I_x - I_y)\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta + (\cos^2\theta - \mathrm{sen}^2\theta)I_{xy}. \tag{8.22}$$

Momento polar de inercia Por las ecuaciones (8.20) y (8.21), el momento polar de inercia con respecto al sistema coordenado $x'y'$ es

$$J_0' = I_{x'} + I_{y'} = I_x + I_y = J_0.$$

Así, el valor del momento polar de inercia no cambia al girar el sistema coordenado.

Ejes principales

Hemos visto que los momentos de inercia de A con respecto al sistema coordenado $x'y'$ dependen del ángulo θ mostrado en la figura 8.19(a). Consideremos la siguiente pregunta: ¿para qué valores de θ es el momento de inercia $I_{x'}$ máximo o mínimo?

Para contestar esta pregunta, es conveniente usar las identidades

$$\text{sen}\, 2\theta = 2\, \text{sen}\, \theta \cos\theta,$$

$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \text{sen}^2\theta = 1 - 2\,\text{sen}^2\theta = 2\cos^2\theta - 1.$$

Con estas expresiones podemos escribir las ecuaciones (8.20)-(8.22) en las formas

$$I_{x'} = \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{I_x - I_y}{2}\cos 2\theta - I_{xy}\,\text{sen}\, 2\theta, \qquad (8.23)$$

$$I_{y'} = \frac{I_x + I_y}{2} - \frac{I_x - I_y}{2}\cos 2\theta + I_{xy}\,\text{sen} 2\theta, \qquad (8.24)$$

$$I_{x'y'} = \frac{I_x - I_y}{2}\,\text{sen}\, 2\theta + I_{xy}\cos 2\theta. \qquad (8.25)$$

El valor de θ para el cual $I_{x'}$ es máximo o mínimo se denotará con θ_p. Para determinar θ_p evaluamos la derivada de la ecuación (8.23) con respecto a 2θ y la igualamos a cero, obteniendo

$$\tan 2\theta_p = \frac{2I_{xy}}{I_y - I_x}. \qquad (8.26)$$

Si hacemos la derivada de la ecuación (8.24) con respecto a 2θ igual a cero para determinar un valor de θ para el cual $I_{y'}$ es máximo o mínimo, obtenemos de nuevo la ecuación (8.26). Las segundas derivadas de $I_{x'}$ e $I_{y'}$ con respecto a 2θ son opuestas en signo,

$$\frac{d^2 I_{x'}}{d(2\theta)^2} = -\frac{d^2 I_{y'}}{d(2\theta)^2},$$

lo cual significa que para un ángulo θ_p para el cual $I_{x'}$ es máximo, $I_{y'}$ es mínimo, y que para un ángulo θ_p para el cual $I_{x'}$ es mínimo, $I_{y'}$ es máximo.

Un sistema coordenado girado $x'y'$ orientado de manera que $I_{x'}$ e $I_{y'}$ tengan valores máximo o mínimo se denomina conjunto de **ejes principales** del área A. Los correspondientes momentos de inercia $I_{x'}$ e $I_{y'}$ se llaman **momentos de inercia principales**. En la siguiente sección demos-

traremos que el producto de inercia $I_{x'y'}$ correspondiente a un conjunto de ejes principales es igual a cero.

Como la tangente es una función periódica, la ecuación (8.26) no genera una solución única para el ángulo θ_p. Sin embargo, podemos demostrar que determina la orientación de los ejes principales dentro de un múltiplo arbitrario de 90°. Observe en la figura 8.20 que si $2\theta_0$ es una solución de la ecuación (8.26), entonces $2\theta_0 + n(180°)$ es también una solución para cualquier entero n. Las orientaciones resultantes del sistema coordenado $x'y'$ se muestran en la figura 8.21.

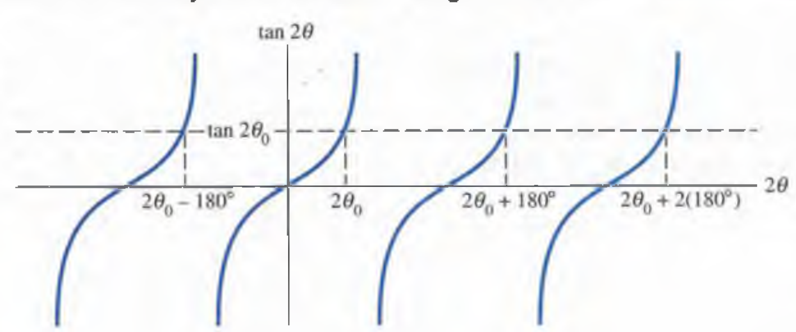
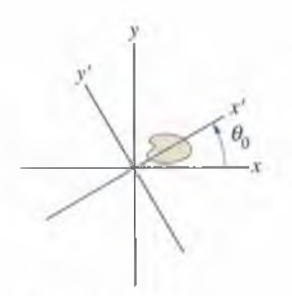
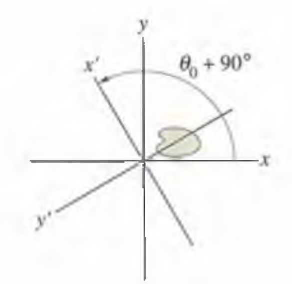
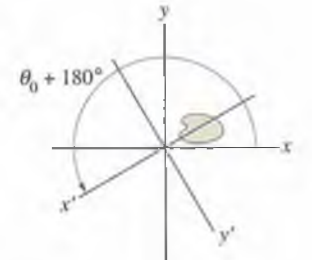


Figura 8.20
Para un valor dado de tan $2\theta_0$, existen múltiples raíces $2\theta_0 + n(180°)$.







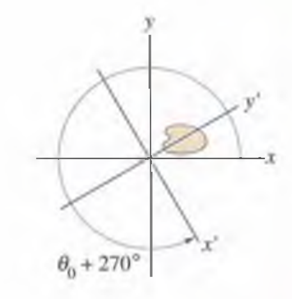


Figura 8.21
La orientación del sistema coordenado x', y' se determina en función de un múltiplo de 90°.

Volvamos al ejemplo con que iniciamos esta sección. La deflexión de la viga en la figura 8.18(d) será mínima si el eje x es el eje principal de la sección transversal de la viga respecto al cual el momento de inercia es máximo.

Los siguientes ejemplos muestran el procedimiento para determinar los ejes principales y los momentos principales de inercia:

1. Determinar I_x, I_y e I_{xy}. Se deben determinar los momentos de inercia del área con respecto al sistema coordenado xy.
2. Determinar θ_p. Resuelva la ecuación (8.26) para determinar la orientación de los ejes principales dentro de un múltiplo arbitrario de 90°.
3. Calcular $I_{x'}$ e $I_{y'}$. Una vez que se ha determinado la orientación de los ejes principales, se pueden usar las ecuaciones (8.20) y (8.21) o las ecuaciones (8.23) y (8.24) para determinar los momentos de inercia principales.

Ejemplo 8.7

Determine un conjunto de ejes principales y los correspondientes momentos de inercia principales del área triangular de la figura 8.22.

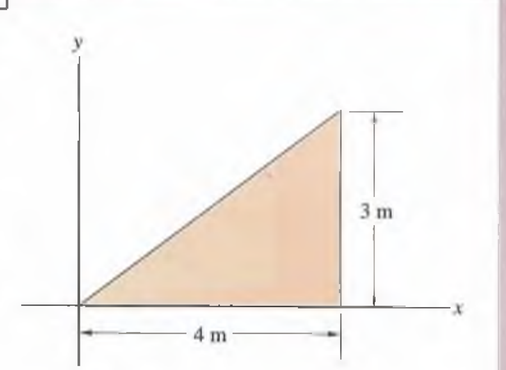


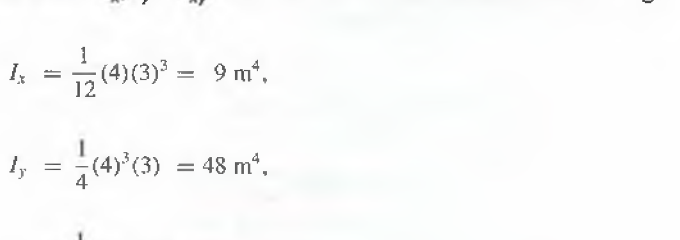
Figura 8.22

ESTRATEGIA

Del apéndice B podemos obtener los momentos de inercia del área triangular. Con la Ec. (8.26) se determina la orientación de los ejes principales y se evalúan los momentos de inercia principales con las Ecs. (8.23) y (8.24).

SOLUCIÓN

Determinación de I_x, I_y e I_{xy} Los momentos de inercia del área triangular son



$$I_x = \frac{1}{12}(4)(3)^3 = 9 \text{ m}^4,$$

$$I_y = \frac{1}{4}(4)^3(3) = 48 \text{ m}^4,$$

$$I_{xy} = \frac{1}{8}(4)^2(3)^2 = 18 \text{ m}^4.$$

Determinación de θ_p De la ecuación (8.26),

$$\tan 2\theta_p = \frac{2I_{xy}}{I_y - I_x} = \frac{2(18)}{48-9} = 0.923,$$

y obtenemos $\theta_p = 21.4°$. Los ejes principales correspondientes a este valor de θ_p se muestran en la figura (a).

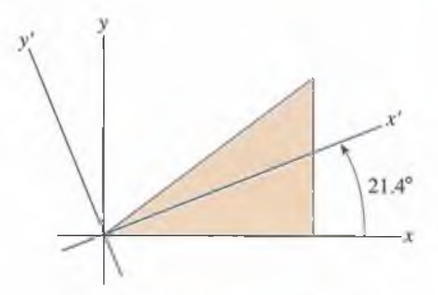
Cálculo de $I_{x'}$ e $I_{y'}$ Sustituyendo $\theta_p = 21.4°$ en Ecs. (8.23) y (8.24):

$$I_{x'} = \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{I_x - I_y}{2}\cos 2\theta - I_{xy}\,\text{sen}2\theta$$

$$= \left(\frac{9+48}{2}\right) + \left(\frac{9-48}{2}\right)\cos[2(21.4°)] - (18)\text{sen}[2(21.4°)] = 1.96 \text{ m}^4,$$

$$I_{y'} = \frac{I_x + I_y}{2} - \frac{I_x - I_y}{2}\cos 2\theta + I_{xy}\,\text{sen}2\theta$$

$$= \left(\frac{9+48}{2}\right) - \left(\frac{9-48}{2}\right)\cos[2(21.4°)] + (18)\text{sen}[2(21.4°)] = 55.0 \text{ m}^4.$$



(a) Ejes principales correspondientes a $\theta_p = 21.4$

COMENTARIO

El producto de inercia correspondiente a un conjunto de ejes principales es cero. En este ejemplo, sustituyendo $\theta_p = 21.4°$ en la ecuación (8.25) se confirma que $I_{x'y'} = 0$.

Ejemplo 8.8

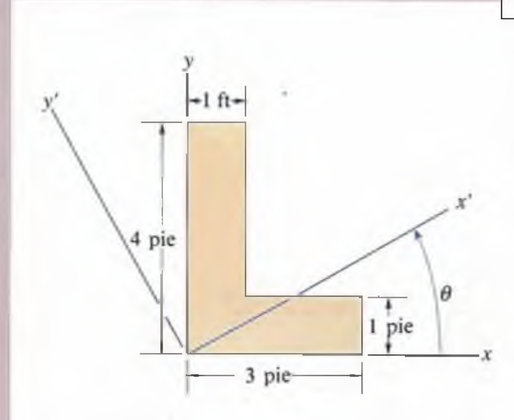


Figura 8.23

Los momentos de inercia del área de la figura 8.23 en términos del sistema coordenado xy que se muestra son $I_x = 22$ pie^4, $I_y = 10$ pie^4 e $I_{xy} = 6$ pie^4.
(a) Determine $I_{x'}$, $I_{y'}$ e $I_{x'y'}$ para $\theta = 30°$.
(b) Determine un conjunto de ejes principales y los correspondientes momentos de inercia principales.

SOLUCIÓN

(a) Haciendo $\theta = 30°$ en las ecuaciones (8.23)-(8.25) obtenemos los momentos de inercia:

$$I_{x'} = \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{I_x - I_y}{2}\cos 2\theta - I_{xy}\,\mathrm{sen}\,2\theta$$

$$= \left(\frac{22+10}{2}\right) + \left(\frac{22-10}{2}\right)\cos[2(30°)] - (6)\,\mathrm{sen}[2(30°)] = 13.8\ \text{pie}^4,$$

$$I_{y'} = \frac{I_x + I_y}{2} - \frac{I_x - I_y}{2}\cos 2\theta + I_{xy}\,\mathrm{sen}\,2\theta$$

$$= \left(\frac{22+10}{2}\right) - \left(\frac{22-10}{2}\right)\cos[2(30°)] + (6)\,\mathrm{sen}[2(30°)] = 18.2\ \text{pie}^4,$$

$$I_{x'y'} = \frac{I_x - I_y}{2}\,\mathrm{sen}\,2\theta + I_{xy}\cos 2\theta$$

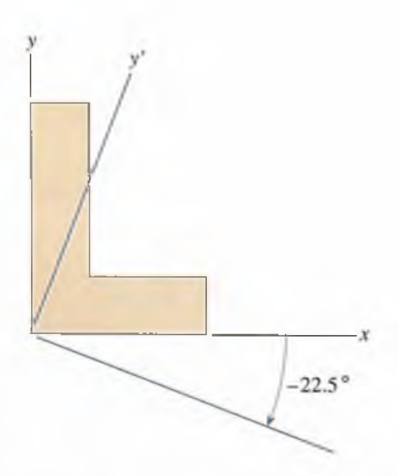
$$= \left(\frac{22-10}{2}\right)\mathrm{sen}[2(30°)] + (6)\cos[2(30°)] = 8.2\ \text{pie}^4.$$

(b) **Determinación de θ_p** Sustituyendo los momentos de inercia en términos del sistema coordenado xy en la ecuación (8.26),

$$\tan 2\theta_p = \frac{2I_{xy}}{I_y - I_x} = \frac{2(6)}{10-22} = -1,$$

obtenemos $\theta_p = -22.5°$. Los ejes principales correspondientes a este valor de θ_p se muestran en la figura (a).
Cálculo de $_{x'}$ e $I_{y'}$ Sustituimos $\theta_p = -22.5°$ en las ecuaciones (8.23) y (8.24) y obtenemos los momentos de inercia principales:

$$I_{x'} = 24.5\ \text{pie}^4, \qquad I_{y'} = 7.5\ \text{pie}^4.$$



(a) Ejes principales correspondientes a $\theta_p = -22.5°$.

Círculo de Mohr

Dados los momentos de inercia de un área en términos de un sistema coordenado particular, hemos presentado ecuaciones para determinar los momentos de inercia con respecto a un sistema coordenador girado, la orientación de los ejes principales y los momentos de inercia principales. También podemos usar un método gráfico llamado **círculo de Mohr**, muy útil para visualizar las soluciones de las ecuaciones (8.23)-(8.25).

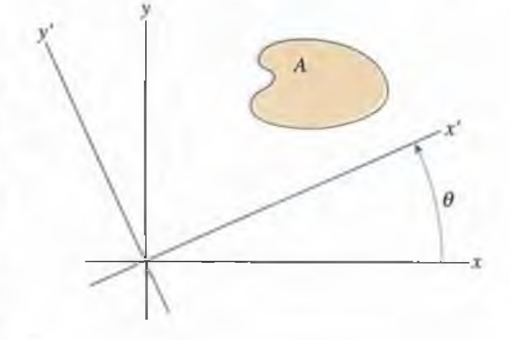
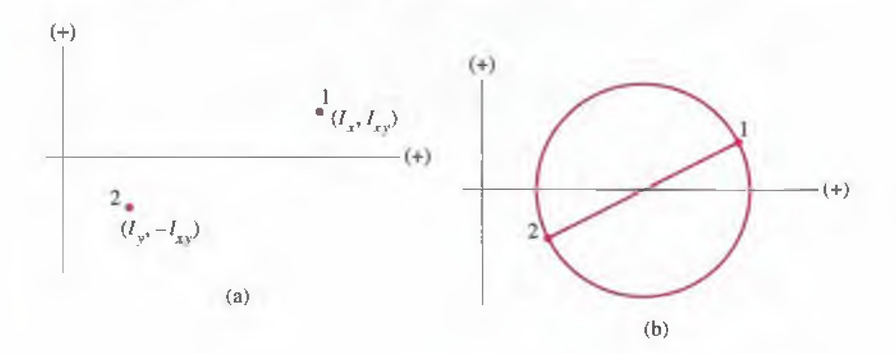


Figura 8.24
Sistema coordenado xy y sistema coordenado girado $x'y'$.

Determinación de $I_{x'}$, $I_{y'}$ e $I_{x'y'}$ Primero describimos cómo construir el círculo de Mohr y luego explicamos cómo funciona. Supongamos que conocemos los momentos de inercia I_x, I_y e I_{xy} de un área con respecto a un sistema coordenado xy, y que queremos determinar los momentos de inercia respecto a un sistema coordenado girado $x'y'$ (Fig. 8.24). La construcción del círculo de Mohr consta de tres pasos:

1. Establecer un conjunto de ejes horizontal y vertical, y graficar dos puntos: el punto 1 con coordenadas (I_x, I_{xy}) y el punto 2 con coordenadas $(I_y, -I_{xy})$, como se muestra en la figura 8.25(a).
2. Dibujar una línea recta que conecte los puntos 1 y 2. Usando la intersección de esta línea recta con el eje horizontal como centro, se dibuja un círculo que pase por los dos puntos (Fig. 8.25b).
3. Dibujar una línea recta que pase por el centro del círculo a un ángulo 2θ medido en sentido antihorario desde el punto 1. Esta línea interseca el círculo en el punto 1′ con coordenadas $(I_{x'}, I_{x'y'})$ y en el punto 2′ con coordenadas $(I_{y'}, -I_{x'y'})$ (Fig. 8.25c).



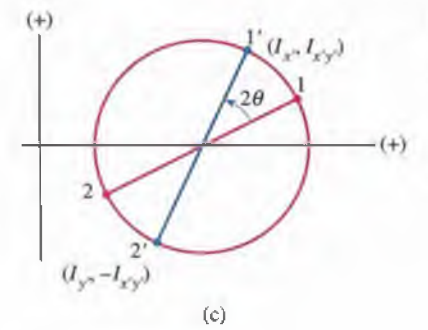
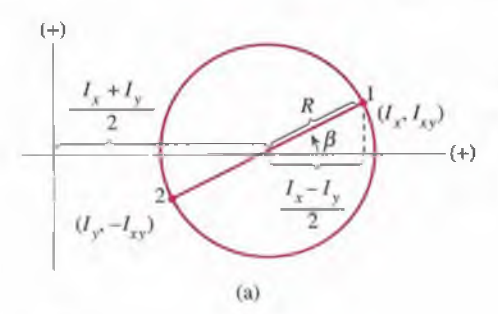


Figura 8.25
(a) Graficación de los puntos 1 y 2.
(b) Dibujo del círculo de Mohr. El centro del círculo está en la intersección de la línea que va de 1 a 2 con el eje horizontal.
(c) Localización de los puntos 1′ y 2′.



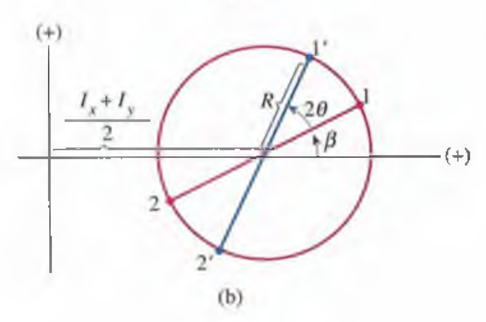


Figura 8.26

(a) Puntos 1 y 2 y círculo de Mohr.
(b) Puntos 1′ y 2′.

De esta manera, para un ángulo θ dado, las coordenadas de los puntos 1′ y 2′ determinan los momentos de inercia en términos del sistema coordenado girado. ¿Por qué funciona esta construcción gráfica? En la figura 8.26(a) mostramos los puntos 1 y 2 y el círculo de Mohr. Observe que la coordenada horizontal del centro del círculo es $(I_x + I_y)/2$. El seno y el coseno del ángulo β son

$$\text{sen}\,\beta = \frac{I_{xy}}{R}, \qquad \cos\beta = \frac{I_x - I_y}{2R},$$

donde R, el radio del círculo, está dado por

$$R = \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + (I_{xy})^2}.$$

De la figura 8.26(b), la coordenada horizontal del punto 1′ es

$$\frac{I_x + I_y}{2} + R\cos(\beta + 2\theta) = \frac{I_x + I_y}{2} + R(\cos\beta\cos 2\theta - \text{sen}\,\beta\,\text{sen}\,2\theta)$$

$$= \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{I_x - I_y}{2}\cos 2\theta - I_{xy}\,\text{sen}\,2\theta = I_{x'},$$

y la coordenada horizontal del punto 2′ es

$$\frac{I_x + I_y}{2} - R\cos(\beta + 2\theta) = \frac{I_x + I_y}{2} - R(\cos\beta\cos 2\theta - \text{sen}\,\beta\,\text{sen}\,2\theta)$$

$$= \frac{I_x + I_y}{2} - \frac{I_x - I_y}{2}\cos 2\theta + I_{xy}\,\text{sen}\,2\theta = I_{y'}.$$

La coordenada vertical del punto 1′ es

$$R\,\text{sen}(\beta + 2\theta) = R(\text{sen}\,\beta\cos 2\theta + \cos\beta\,\text{sen}\,2\theta)$$

$$= I_{xy}\cos 2\theta + \frac{I_x - I_y}{2}\,\text{sen}2\theta = I_{x'y'},$$

y la coordenada vertical del punto 2′ es

$$-R\,\text{sen}\,(\beta + 2\theta) = -I_{x'y'}.$$

Hemos mostrado que las coordenadas del punto 1′ son $(I_{x'}, I_{x'y'})$ y las del punto 2′ son $(I_{y'}, -I_{x'y'})$.

Determinación de los ejes principales y de los momentos de inercia principales Puesto que los momentos de inercia $I_{x'}$ e $I_{y'}$ son las coordenadas horizontales de los puntos 1′ y 2′ del círculo de Mohr, sus valores máximo y mínimo se presentan cuando los puntos 1′ y 2′ coinciden con las intersecciones del círculo con el eje horizontal (Fig. 8.27). (La intersección que se designa como 1′ es arbitraria. En la figura 8.27 designamos el momento de inercia mínimo como punto 1′.) La orientación de los ejes principales se puede determinar midiendo el ángulo $2\theta_p$ del punto 1 al punto 1′, y las coordenadas de los puntos 1′ y 2′ como los momentos de inercia principales.

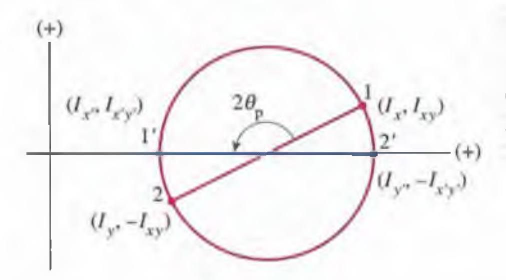


Figura 8.27
Para determinar la orientación del conjunto de ejes principales, sean 1′ y 2′ los puntos en que el círculo corta el eje horizontal.

Observe que el círculo de Mohr demuestra que el producto de inercia $I_{x'y'}$ correspondiente a un conjunto de ejes pricipales (la coordenada vertical del punto 1′ en la figura 8.27) es siempre cero. Además, podemos utilizar la figura 8.26(a) a fin de obtener una expresión analítica para las coordenadas horizontales de los puntos en que el círculo corta el eje horizontal, que son los momentos de inercia principales:

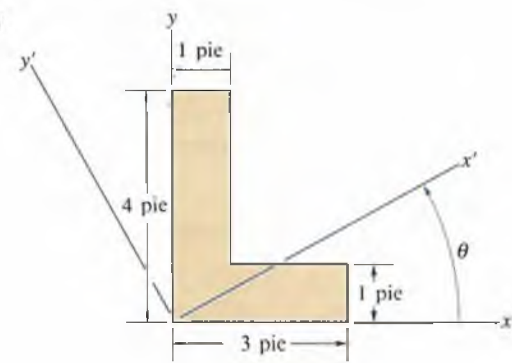
$$\text{Momentos principales de inercia} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm R = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + (I_{xy})^2}.$$

El siguiente ejemplo muestra el empleo del círculo de Mohr para determinar los momentos de inercia en un sistema coordenado girado, los ejes principales y los momentos de inercia principales.

Ejemplo 8.9

Los momentos de inercia del área de la figura 8.28 con respecto al sistema coordenado xy son $I_x = 22$ pie^4, $I_y = 10$ pie^4 e $I_{xy} = 6$ pie^4. Utilice el círculo de Mohr para determinar (a) los momentos de inercia $I_{x'}$, $I_{y'}$ e $I_{x'y'}$ para $\theta = 30°$; (b) el conjunto de los ejes principales y los correspondientes momentos de inercia principales.

Figura 8.28

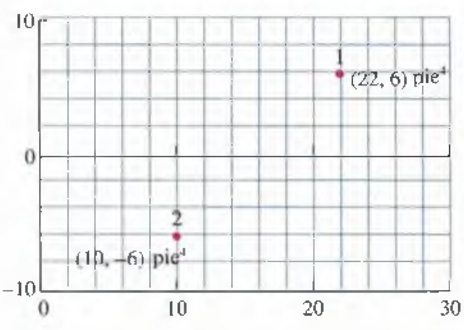


SOLUCIÓN

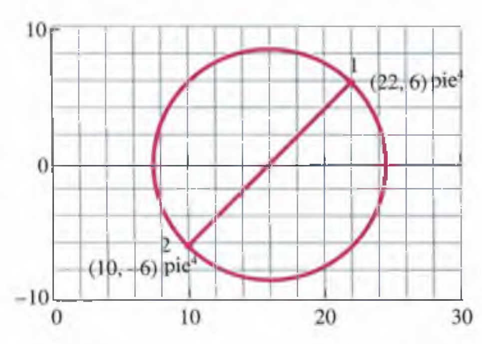
(a) Primero graficamos el punto 1 con coordenadas $(I_x, I_{xy}) = (22, 6)$ pie^4 y el punto 2 con coordenadas $(I_y, -I_{xy}) = (10, -6)$ pie^4 (Fig. a). Luego trazamos una línea recta entre los puntos 1 y 2 y, utilizando como centro la intersección de la línea con el eje horizontal, dibujamos un círculo que pase por los puntos (Fig. b).

Para determinar los momentos de inercia para $\theta = 30°$, medimos un ángulo $2\theta = 60°$ antihorario desde el punto 1 (Fig. c). De las coordenadas de los puntos 1′ y 2′ obtenemos

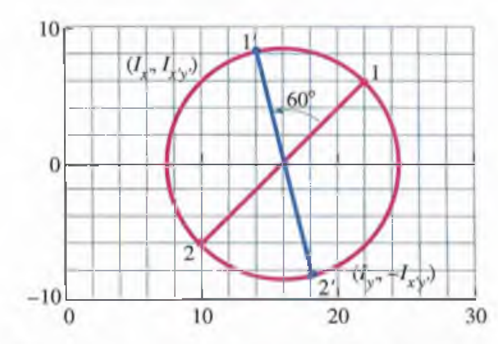
$$I_{x'} = 14 \text{ pie}^4, \quad I_{x'y'} = 8 \text{ pie}^4, \quad I_{y'} = 18 \text{ pie}^4.$$



(a) Grafique el punto 1 con coordenadas (I_x, I_{xy}) y el punto 2 con coordenadas $(I_y, -I_{xy})$.



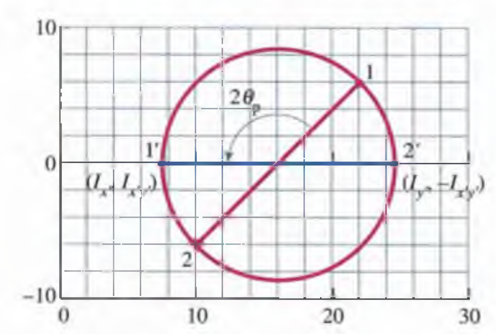
(b) Dibuje una recta del punto 1 al punto 2 y construya el círculo.



(c) Mida el ángulo $2\theta = 60°$ en sentido antihorario desde el punto 1 para determinar los puntos 1′ y 2′.

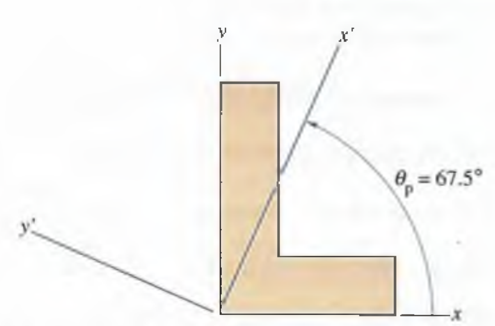
(b) Para determinar los ejes principales, consideramos que en los puntos 1′ y 2′ el círculo interseca al eje horizontal (Fig. d). Medimos el ángulo entre los puntos 1 y 1′ y determinamos que $2\theta_p = 135°$. De las coordenadas de los puntos 1′ y 2′ obtenemos los momentos de inercia principales:

$$I_{x'} = 7.5 \text{ pie}^4, \; I_{y'} = 24.5 \text{ pie}^4.$$



(d) Determine los ejes principales haciendo que los puntos 1′ y 2′ correspondan a los puntos en que el círculo corta el eje horizontal.

Los ejes principales se muestran en la figura (e).



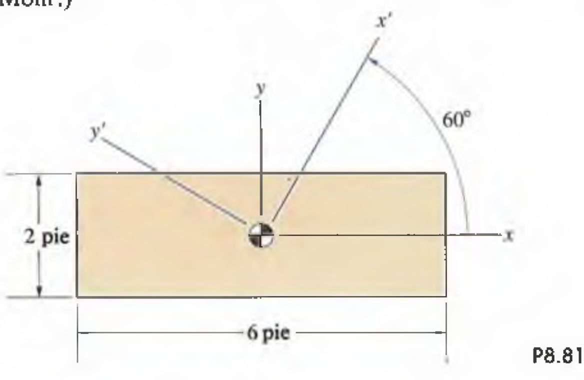
(e) Ejes principales correspondientes a $\theta_p = 67.5°$.

COMENTARIO

En el ejemplo 8.8 resolvimos este problema mediante las ecuaciones (8.23)-(8.26). Para $\theta = 30°$ obtuvimos $I_{x'} = 13.8$ pie^4, $I_{x'y'} = 8.2$ pie^4 e $I_{y'} = 18.2$ pie^4. Las diferencias entre estos resultados y los obtenidos usando el círculo de Mohr se deben a los errores inherentes a medir gráficamente la respuesta. Utilizando la ecuación (8.26) para determinar la orientación de los ejes principales, obtuvimos los ejes principales de la figura (a) del ejemplo 8.8 y los momentos de inercia principales $I_{x'} = 24.5$ pie^4 e $I_{y'} = 7.5$ pie^4. La diferencia entre estos resultados y los obtenidos por medio del círculo de Mohr simplemente reflejan el hecho de que la orientación de los ejes principales sólo se puede determinar en función de un múltiplo de 90°.

Problemas

8.81 Determine $I_{x'}$, $I_{y'}$ e $I_{x'y'}$ en la figura. (No utilice el círculo de Mohr.)

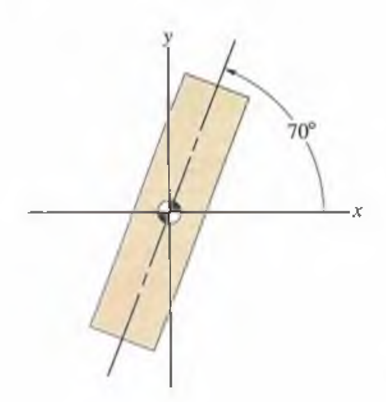


P8.81

8.82 Determine $I_{x'}$, $I_{y'}$ e $I_{x'y'}$. (No utilice el círculo de Mohr.)

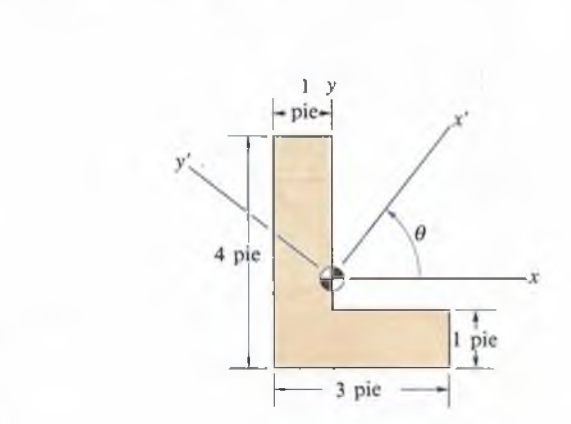
P8.82

8.83 Los momentos de inercia del área rectangular mostrada son $I_x = 76.0 \text{ m}^4$, $I_y = 14.7 \text{ m}^4$, e $I_{xy} = 25.7 \text{ m}^4$. Determine un conjunto de ejes principales y los correspondientes momentos de inercia principales. (No utilice el círculo de Mohr.)



P8.83

8.84 Determine los momentos de inercia $I_{x'}$, $I_{y'}$ e $I_{x'y'}$ en la figura para $\theta = 15°$. (No utilice el círculo de Mohr.)



P8.84

8.85 Para el área del problema 8.84, determine el conjunto de ejes principales y los correspondientes momentos de inercia. (No utilice el círculo de Mohr.)

8.86 Resuelva el problema 8.81 utilizando el círculo de Mohr.

8.87 Resuelva el problema 8.82 utilizando el círculo de Mohr.

8.88 Resuelva el problema 8.83 utilizando el círculo de Mohr.

8.89 Resuelva el problema 8.84 utilizando el círculo de Mohr.

8.90 Resuelva el problema 8.85 utilizando el círculo de Mohr.

8.91 Obtenga la ecuación (8.22) para el producto de inercia usando el mismo procedimiento que para obtener las ecuaciones (8.20) y (8.21).

Masas

En dinámica, la aceleración de un cuerpo, que resulta de las fuerzas que actúan sobre él, depende de su masa. La aceleración angular (o rotatoria) provocada por las fuerzas y pares que actúan sobre un cuerpo, depende de cantidades llamadas momentos de inercia de masa del cuerpo. Analizaremos métodos para determinar tales momentos. Mostraremos que para clases especiales de cuerpos, sus momentos de inercia de masa se pueden expresar en términos de momentos de inercia de áreas, lo que explica cómo se originaron los nombres de esas integrales de área.

En la figura 8.29(a) se muestran un cuerpo y una línea o "eje" L_0. El **momento de inercia de masa** del cuerpo respecto al eje L_0 se define como

$$I_0 = \int_m r^2 dm, \tag{8.27}$$

r es la distancia *perpendicular* del eje al elemento diferencial de masa dm (Fig. b). A menudo L_0 es un eje alrededor del que gira el cuerpo, y se precisa el valor de I_0 para hallar la aceleración angular, o la razón de cambio de la velocidad angular, causada por un par respecto a L_0.

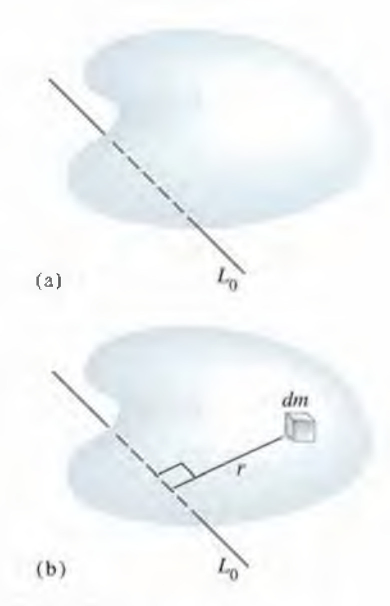


Figura 8.29
(a) Un cuerpo y el eje L_0.
(b) Elemento diferencial de masa dm.

8.4 Cuerpos simples

Los momentos de inercia de masa de cuerpos complejos se pueden hallar sumando los momentos de inercia de masa de sus partes. Así, empezamos determinando los momentos de inercia de masa de algunos cuerpos simples. En la siguiente sección describimos el teorema de los ejes paralelos, que permite determinar los momentos de inercia de masa de cuerpos compuestos o de combinaciones de partes simples.

Barras esbeltas

Determinemos el momento de inercia de masa de una barra recta y esbelta respecto a un eje perpendicular L que pase por el centro de masa de la barra (Fig. 8.30a). "Esbelta" significa que la longitud de la barra es mucho mayor que su ancho. Sea l la longitud de la barra, A el área de su sección transversal y m su masa. Suponemos que A es uniforme a lo largo de la longitud de la barra y que el material es homogéneo.

Sea un elemento diferencial de la barra de longitud dr a una distancia r del centro de masa (Fig. 8.30b). La masa del elemento es igual al producto de su volumen y su densidad: $dm = \rho A dr$. Sustituyendo esto en la ecuación (8.27), obtenemos el momento de inercia de masa de la barra respecto a un eje perpendicular que pasa por su centro de masa:

$$I = \int_m r^2 dm = \int_{-l/2}^{l/2} \rho A r^2 \, dr = \frac{1}{12} \rho A l^3.$$

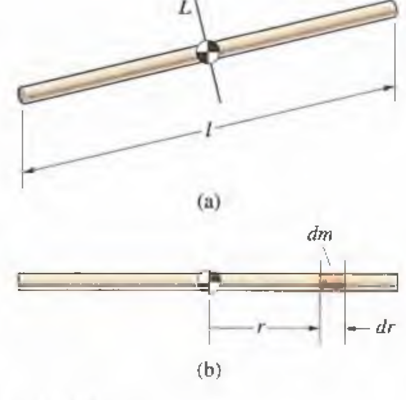


Figura 8.30
(a) Barra esbelta.
(b) Elemento diferencial de longitud dr.

La masa de la barra es igual al producto de la densidad y el volumen de la barra, $m = \rho A l$, por lo que el momento de inercia de masa es

$$I = \frac{1}{12} m l^2. \tag{8.28}$$

Pero hemos ignorado las dimensiones laterales de la barra, como si el elemento diferencial de masa dm estuviera concentrado sobre el eje de la barra. En consecuencia, la ecuación (8.28) es sólo una aproximación. Más adelante en esta sección determinaremos los momentos de inercia de masa para una barra de dimensiones laterales finitas, y mostraremos que la ecuación (8.28) es una buena aproximación cuando el ancho de la barra es pequeño en comparación con su longitud.

Placas delgadas

Sea una placa plana homogénea con masa m y espesor uniforme T. No especificamos la forma del área de la sección transversal de la placa. Elegimos un sistema coordenado cartesiano orientado de modo que la placa quede sobre el plano x-y (Fig. 8.31a). El objetivo es hallar los momentos de inercia de masa de la placa respecto a los ejes x, y y z.

Podemos obtener un elemento diferencial de volumen de la placa proyectando un elemento de área dA a través del espesor T de la placa (Fig. 8.31b). El volumen resultante es $T dA$. La masa de este elemento de volumen es igual al producto de la densidad y el volumen: $dm = \rho T dA$. Sustituyendo esta expresión en la ecuación (8.27), obtenemos el momento de inercia de masa de la placa respecto al eje z en la forma

$$I_{(\text{eje } z)} = \int_m r^2\, dm = \rho T \int_A r^2\, dA,$$

donde r es la distancia del eje z a dA. Como la masa de la placa es $m = \rho T A$, donde A es el área de la sección transversal de la placa, $\rho T = m/A$. La integral a la derecha es el momento polar de inercia J_0 del área

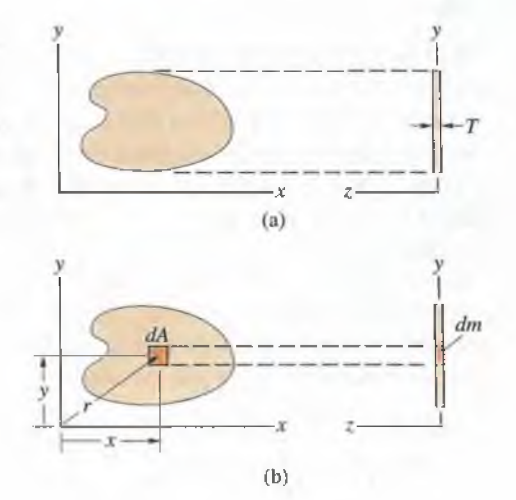


Figura 8.31
(a) Placa de forma arbitraria y espesor uniforme T.
(b) Elemento de volumen obtenido proyectando un elemento de área dA a través de la placa.

de la sección transversal de la placa. Por tanto, podemos escribir el momento de inercia de masa de la placa respecto al eje z como

$$I_{(\text{eje } z)} = \frac{m}{A} J_0. \tag{8.29}$$

En la figura 8.31(b) vemos que la distancia perpendicular del eje x al elemento de área dA es la ordenada de dA. Por tanto, el momento de inercia de masa de la placa respecto al eje x es

$$I_{(\text{eje } x)} = \int_m y^2 \, dm = \rho T \int_A y^2 \, dA = \frac{m}{A} I_x, \tag{8.30}$$

donde I_x es el momento de inercia del área de la sección transversal de la placa respecto al eje x. El momento de inercia de masa de la placa respecto al eje y es

$$I_{(\text{eje } y)} = \int_m x^2 dm = \rho T \int_A x^2 \, dA = \frac{m}{A} I_y, \tag{8.31}$$

donde I_y es el momento de inercia del área de la sección transversal de la placa respecto al eje y.

Hemos expresado así los momentos de inercia de masa de una placa delgada homogénea de espesor uniforme, en términos de los momentos de inercia del área de la sección transversal de la placa. De hecho, estos resultados explican por qué las integrales de área I_x, I_y y J_0 se llaman momentos de inercia.

Como la suma de los momentos de inercia de área I_x e I_y es igual al momento polar de inercia J_0, el momento de inercia de masa de la placa delgada respecto al eje z es igual a la suma de sus momentos de inercia respecto a los ejes x y y:

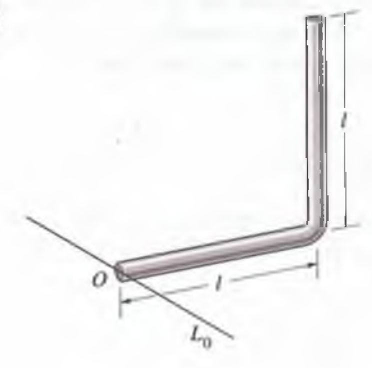
$$I_{(\text{eje } z)} = I_{(\text{eje } x)} + I_{(\text{eje } y)}. \tag{8.32}$$

En el ejemplo siguiente utilizamos integración para determinar el momento de inercia de masa de un cuerpo que consiste en dos barras esbeltas soldadas entre sí. Luego presentamos un ejemplo que muestra la aplicación de las ecuaciones (8.29)-(8.31) para determinar los momentos de inercia de masa de una placa delgada homogénea con un área de sección transversal específica. Recuerde que el momento de inercia de masa de un cuerpo respecto a un eje depende de la posición del eje relativa al cuerpo.

Ejemplo 8.10

Dos barras homogéneas esbeltas, cada una de longitud l, masa m y sección transversal A, están soldadas entre sí para formar el cuerpo en L (Fig. 8.32). Determine el momento de inercia de masa del cuerpo respecto al eje L_0 que pasa por el punto O (El eje L_0 es perpendicular a las dos barras.)

Figura 8.32



ESTRATEGIA

Con el mismo procedimiento usado para una sola barra, determinamos el momento de inercia de masa de cada barra respecto a L_0 y sumamos los resultados.

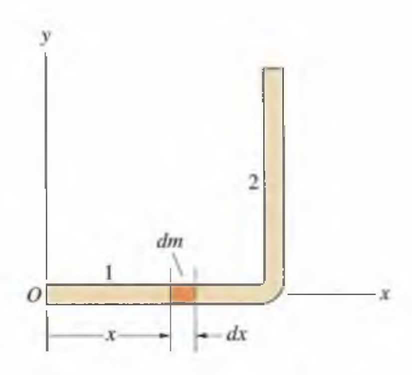
SOLUCIÓN

Primero se establece un sistema coordenado con el eje z a lo largo de L_0 y el eje x colineal con la barra 1 (Fig. a). La masa del elemento diferencial dx es $dm = \rho A dx$. El momento de inercia de masa de la barra 1 respecto a L_0 es

$$(I_0)_1 = \int_m r^2\, dm = \int_0^l \rho A x^2\, dx = \frac{1}{3}\rho A l^3.$$

En función de la masa de la barra, $m = \rho A l$, podemos escribir esto como

$$(I_0)_1 = \frac{1}{3} m l^2.$$



(a) Elemento diferencial de la barra 1.

La masa de un elemento de la barra 2 de longitud dy (Fig. b) es $dm = \rho A dy$. Vemos que la distancia perpendicular de L_0 al elemento es $r = \sqrt{l^2 + y^2}$. Por tanto, el momento de inercia de masa de la barra 2 respecto a L_0 es

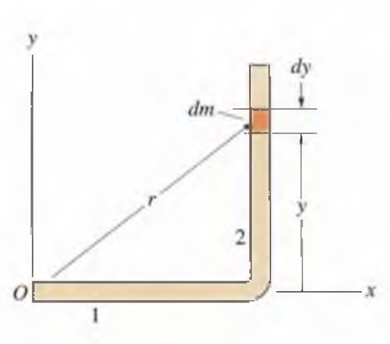
$$(I_0)_2 = \int_m r^2\, dm = \int_0^l \rho A(l^2 + y^2)\, dy = \frac{4}{3}\rho A l^3.$$

En función de la masa de la barra, obtenemos

$$(I_0)_2 = \frac{4}{3} m l^2.$$

El momento de inercia de masa del cuerpo en L respecto a L_0 es

$$I_0 = (I_0)_1 + (I_0)_2 = \frac{1}{3} m l^2 + \frac{4}{3} m l^2 = \frac{5}{3} m l^2.$$



(b) Elemento diferencial de la barra 2.

Ejemplo 8.11

La placa homogénea delgada de la figura 8.33 tiene espesor uniforme y masa m. Determine sus momentos de inercia de masa respecto a los ejes x, y y z.

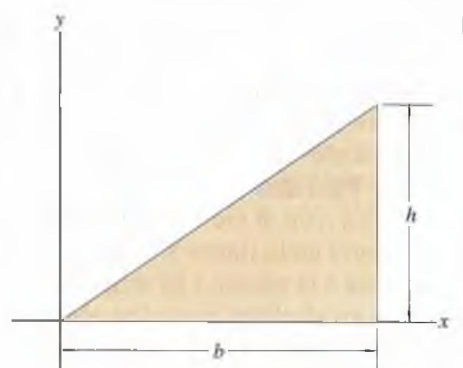


Figura 8.33

ESTRATEGIA

Los momentos de inercia de masa respecto a los ejes x y y están dados por las ecuaciones (8.30) y (8.31) en función de los momentos de inercia del área de la sección transversal de la placa. Con la ecuación (8.32) podemos determinar el momento de inercia de masa de la placa respecto al eje z.

SOLUCIÓN

De acuerdo con el apéndice B, los momentos de inercia del área triangular respecto a los ejes x y y son $I_x = \frac{1}{12}bh^3$ e $I_y = \frac{1}{4}hb^3$. Por tanto, los momentos de inercia de masa de la placa respecto a los ejes x y y son

$$I_{(\text{eje } x)} = \frac{m}{A}I_x = \frac{m}{(\frac{1}{2}bh)}\left(\frac{1}{12}bh^3\right) = \frac{1}{6}mh^2,$$

$$I_{(\text{eje } y)} = \frac{m}{A}I_y = \frac{m}{(\frac{1}{2}bh)}\left(\frac{1}{4}hb^3\right) = \frac{1}{2}mb^2.$$

El momento de inercia de masa respecto al eje z es

$$I_{(\text{eje } z)} = I_{(\text{eje } x)} + I_{(\text{eje } y)} = m\left(\frac{1}{6}h^2 + \frac{1}{2}b^2\right).$$

8.5 *Teorema de los ejes paralelos*

El teorema de los ejes paralelos permite determinar el momento de inercia de masa de un cuerpo respecto a cualquier eje si se tiene el momento de inercia de masa respecto a un eje paralelo que pasa por el centro de masa. Sirve para calcular el momento de inercia de masa de un cuerpo compuesto alrededor de un eje, si se tiene el momento de inercia de masa de sus partes respecto a ejes paralelos al eje dado.

Supongamos que conocemos el momento de inercia de masa I respecto a un eje L que pasa por el centro de masa de un cuerpo, y que deseamos determinar su momento de inercia de masa I_0 respecto a un eje paralelo L_0 (Fig. 8.34a). Para determinar I_0 incluimos sistemas coordenados paralelos xyz y $x'y'z'$ con el eje z a lo largo de L_0 y el eje z' a lo largo de L, como se muestra en la figura 8.34(b). (En esta figura los ejes L_0 y L son perpendiculares a la página.) El origen O del sistema coordenado xyz está contenido en el plano x'-y'. Los términos d_x y d_y son las coordenadas del centro de masa relativas al sistema coordenado xyz.

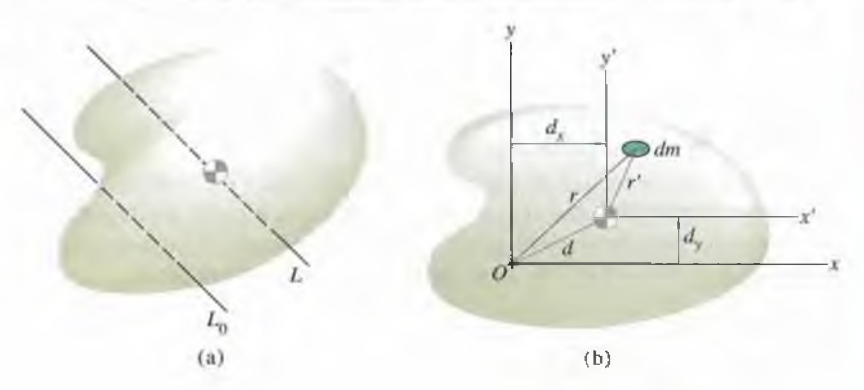


Figura 8.34
(a) Eje L a través del centro de masa de un cuerpo y eje paralelo L_0.
(b) Sistemas coordenados xyz y $x'y'z'$.

El momento de inercia de masa del cuerpo respecto a L_0 es

$$I_0 = \int_m r^2 dm = \int_m (x^2 + y^2) dm, \qquad (8.33)$$

donde r es la distancia perpendicular de L_0 al elemento diferencial de masa dm, mientras que x, y son las coordenadas de dm en el plano x-y. Las coordenadas xy de dm están relacionadas con las coordenadas $x'y'$ por

$$x = x' + d_x, \qquad y = y' + d_y.$$

Sustituyendo estas expresiones en la ecuación (8.33), podemos escribir

$$I_0 = \int_m [(x')^2 + (y')^2] dm + 2d_x \int_m x' dm + 2d_y \int_m y' dm + \int_m (d_x^2 + d_y^2) dm. \qquad (8.34)$$

Como $(x')^2 + (y')^2 = (r')^2$, donde r' es la distancia perpendicular de L a dm, la primera integral a la derecha de esta ecuación es el momento de inercia de masa I del cuerpo respecto a L. Recuerde que las coordenadas

x' y y' del centro de masa del cuerpo relativas al sistema coordenado $x'y'z'$ están definidas por

$$\bar{x}' = \frac{\int_m x' dm}{\int_m dm}, \qquad \bar{y}' = \frac{\int_m y' dm}{\int_m dm}.$$

Como el centro de masa del cuerpo está en el origen del sistema $x'y'z'$, $\bar{x}' = 0$ y $\bar{y}' = 0$. Por tanto, las integrales en el segundo y el tercer términos del segundo miembro de la ecuación (8.34) son iguales a cero. En la figura 8.34(b) vemos que $d_x^2 + d_y^2 = d^2$, donde d es la distancia perpendicular entre los ejes L y L_0. Por tanto, obtenemos

$$\boxed{I_0 = I + d^2 m,} \qquad (8.35)$$

donde m es la masa del cuerpo. Éste es el **teorema de los ejes paralelos**. Si se conoce el momento de inercia de masa de un cuerpo respecto a un eje dado, se puede usar este teorema para determinar su momento de inercia de masa respecto a cualquier eje paralelo.

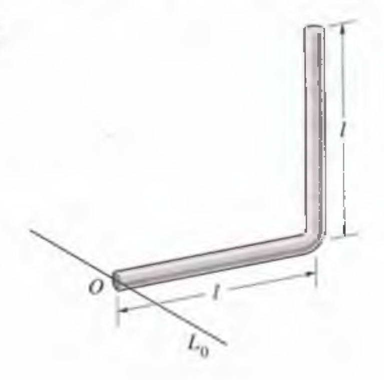
En los siguientes dos ejemplos usaremos el teorema de los ejes paralelos para determinar momentos de inercia de masa de cuerpos compuestos. La determinación del momento de inercia de masa respecto a un eje dado L_0 requiere de tres pasos:

1. Selección de las partes. *Trate de dividir el cuerpo en partes cuyos momentos de inercia de masa se conozcan o se puedan determinar fácilmente.*
2. Determinación de los momentos de inercia de masa de las partes. *Primero se debe determinar el momento de inercia de masa de cada parte respecto al eje que pasa por su centro de masa y es paralelo a L_0. Luego se puede usar el teorema de los ejes paralelos para determinar su momento de inercia de masa respecto a L_0.*
3. Suma de los resultados. *Se suman los momentos de inercia de masa de las partes (o se restan en el caso de un agujero o recorte) para obtener el momento de inercia de masa del cuerpo compuesto.*

Ejemplo 8.12

Dos barras homogéneas esbeltas, cada una de longitud l y masa m, están soldadas entre sí para formar el cuerpo en L de la figura 8.35. Determine el momento de inercia de masa del cuerpo respecto al eje L_0 que pasa por el punto O. (El eje L_0 es perpendicular a las dos barras.)

Figura 8.35

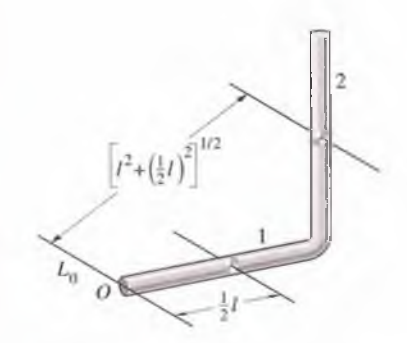


SOLUCIÓN

Selección de las partes Las partes son las dos barras, que llamaremos barra 1 y barra 2 (Fig. a).

Determinación de los momentos de inercia de masa de las partes
Según la Ec. (8.28), el momento de inercia de masa de cada barra respecto a un eje perpendicular que pase por su centro de masa es $I = \frac{1}{12}ml^2$. La distancia de L_0 al eje paralelo que pasa por el centro de masa de la barra 1 es $\frac{1}{2}l$ (Fig. a). Por tanto, el momento de inercia de masa de la barra 1 respecto a L_0 es

$$(I_0)_1 = I + d^2m = \frac{1}{12}ml^2 + \left(\frac{1}{2}l\right)^2 m = \frac{1}{3}ml^2.$$



(a) Distancias de L_0 a ejes paralelos que pasan por los centros de masa de las barras 1 y 2.

La distancia de L_0 al eje paralelo que pasa por el centro de masa de la barra 2 es $[l^2 + (\frac{1}{2}l)^2]^{1/2}$. El momento de inercia de masa de la barra 2 respecto a L_0 es

$$(I_0)_2 = I + d^2m = \frac{1}{12}ml^2 + \left[l^2 + \left(\frac{1}{2}l\right)^2\right] m = \frac{4}{3}ml^2.$$

Suma de los resultados El momento de inercia de masa del cuerpo en L respecto a L_0 es

$$I_0 = (I_0)_1 + (I_0)_2 = \frac{1}{3}ml^2 + \frac{4}{3}ml^2 = \frac{5}{3}ml^2.$$

COMENTARIO

Compare esta solución con la del ejemplo 8.10, en el cual por medio de integrales se determina el momento de inercia de masa de este cuerpo respecto a L_0. Fue más fácil aplicando el teorema de los ejes paralelos, pero por supuesto necesitamos conocer previamente los momentos de inercia de masa de las barras respecto a los ejes que pasan por sus centros de masa.

Ejemplo 8.13

El cuerpo de la figura 8.36 consiste en una barra de 3 kg soldada a un disco delgado circular de 2 kg. Determine su momento de inercia de masa respecto al eje L que pasa por su centro de masa (El eje L es perpendicular a la barra y al discos).

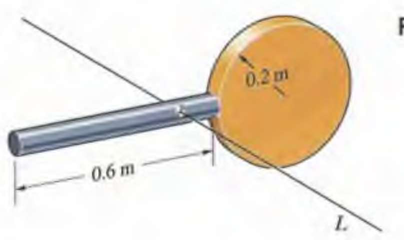


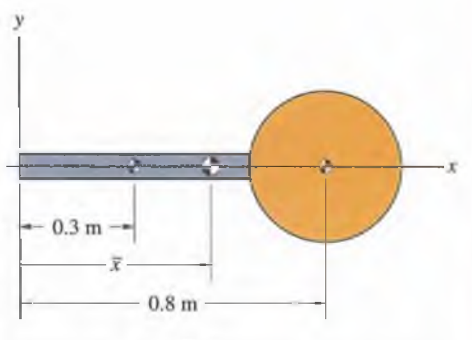
Figura 8.36

ESTRATEGIA

Primero debemos localizar el centro de masa del cuerpo compuesto, para luego aplicar el teorema de los ejes paralelos a las partes por separado y sumar los resultados.

SOLUCIÓN

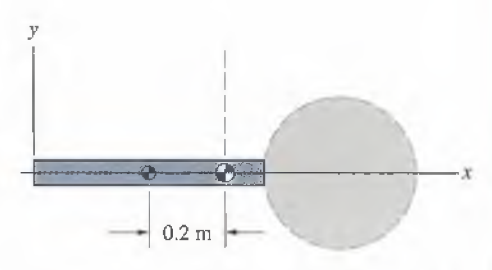
Selección de las partes Las partes son la barra y el disco. Estableciendo el sistema coordenado de la figura (a), la coordenada x del centro de masa del cuerpo compuesto es



(a) Coordenada $\bar{x}$ del centro de masa del cuerpo.

$$\bar{x} = \frac{\bar{x}_{(\text{barra})}m_{(\text{barra})} + \bar{x}_{(\text{disco})}m_{(\text{disco})}}{m_{(\text{barra})} + m_{(\text{disco})}} = \frac{(0.3)(3) + (0.6 + 0.2)(2)}{3 + 2} = 0.5 \text{ m}.$$

Determinación de los momentos de inercia de masa de las partes La distancia del centro de masa de la barra al centro de masa del cuerpo compuesto es 0.2 m (Fig. b). Por tanto, el momento de inercia de masa de la barra respecto a L es

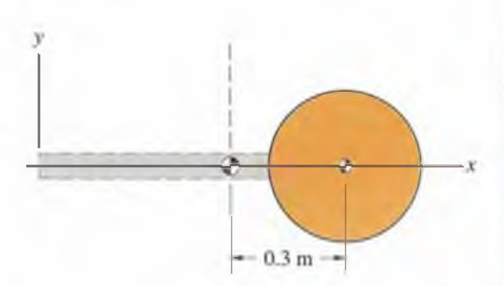


(b) Distancia de L al centro de masa de la barra.

$$I_{(\text{barra})} = \frac{1}{12}(3)(0.6)^2 + (0.2)^2(3) = 0.210 \text{ kg-m}^2.$$

La distancia del centro de masa del disco al centro de masa del cuerpo compuesto es 0.3 m (Fig. c). El momento de inercia de masa del disco respecto a L es

$$I_{(\text{disco})} = \frac{1}{2}(2)(0.2)^2 + (0.3)^2(2) = 0.220 \text{ kg-m}^2.$$



(c) Distancia de L al centro de masa del disco.

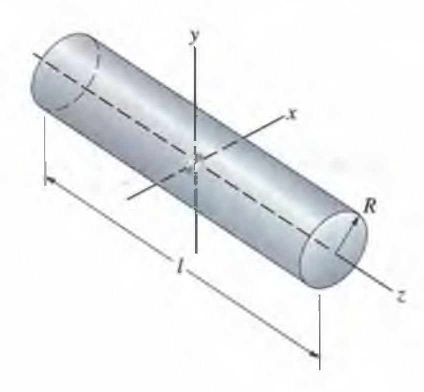
Suma de los resultados El momento de inercia de masa del cuerpo compuesto respecto a L es

$$I = I_{(\text{barra})} + I_{(\text{disco})} = 0.430 \text{ kg-m}^2.$$

Ejemplo 8.14

El cilindro homogéneo de la figura 8.37 tiene masa m, longitud l y radio R. Determine sus momentos de inercia de masa respecto a los ejes x, y y z.

Figura 8.37



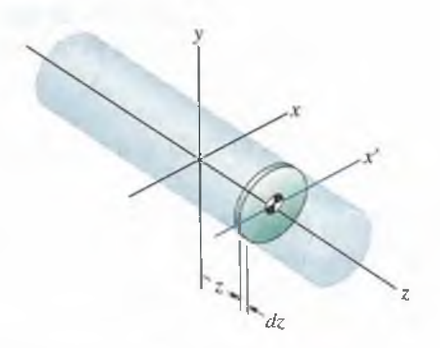
ESTRATEGIA

Hallamos los momentos de inercia de masa respecto a los ejes x, y y z de un elemento infinitesimal del cilindro, que es un disco de espesor dz. Integramos los resultados con respecto a z para obtener los momentos de inercia de masa del cilindro. Aplicamos el teorema de los ejes paralelos para determinar los momentos de inercia de masa del disco respecto a los ejes x y y.

SOLUCIÓN

Consideremos un elemento del cilindro de espesor dz a una distancia z del centro del cilindro (Fig. a). (Podemos imaginar que obtenemos este elemento "rebanando" el cilindro perpendicularmente a su eje.) La masa del elemento es igual al producto de la densidad y el volumen del elemento, $dm = \rho(\pi R^2 dz)$. Obtenemos los momentos de inercia de masa del elemento usando los valores para una placa circular delgada dados en el apéndice C. El momento de inercia de masa respecto al eje z es

$$dI_{(\text{eje } z)} = \frac{1}{2} dm\, R^2 = \frac{1}{2}(\rho \pi R^2 dz) R^2.$$



(a) Elemento diferencial en forma de disco del cilindro.

Integrando este resultado con respecto a z de $-l/2$ a $l/2$, sumamos los momentos de inercia de masa de los elementos infinitesimales de disco que forman el cilindro. El resultado es el momento de inercia de masa del cilindro respecto al eje z:

$$I_{(\text{eje } z)} = \int_{-l/2}^{l/2} \frac{1}{2}\rho\pi R^4\, dz = \frac{1}{2}\rho\pi R^4 l.$$

Podemos escribir este resultado en términos de la masa del cilindro, $m = \rho(\pi R^2 l)$, como

$$I_{(\text{eje } z)} = \frac{1}{2} m R^2.$$

El momento de inercia de masa del elemento de disco respecto al eje x' es

$$dI_{(\text{eje } x')} = \frac{1}{4}\, dm\, R^2 = \frac{1}{4}(\rho\pi R^2\, dz) R^2.$$

Podemos usar este resultado y el teorema de los ejes paralelos para determinar el momento de inercia de masa del elemento respecto al eje x:

$$dI_{(\text{eje } x)} = dI_{(\text{eje } x')} + z^2 dm = \frac{1}{4}(\rho\pi R^2\, dz) R^2 + z^2(\rho\pi R^2\, dz).$$

Integrando esta expresión con respecto a z de $-l/2$ a $l/2$, obtenemos el momento de inercia de masa del cilindro respecto al eje x.

$$I_{(\text{eje } x)} = \int_{-l/2}^{l/2} \left(\frac{1}{4}\rho\pi R^4 + \rho\pi R^2 z^2\right) dz = \frac{1}{4}\rho\pi R^4 l + \frac{1}{12}\rho\pi R^2 l^3.$$

En términos de la masa del cilindro,

$$I_{(\text{eje } x)} = \frac{1}{4} m R^2 + \frac{1}{12} m l^2.$$

Debido a la simetría del cilindro,

$$I_{(\text{eje } y)} = I_{(\text{eje } x)}.$$

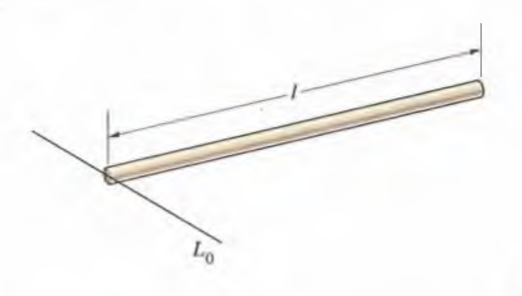
COMENTARIO

Cuando el cilindro es muy largo en comparación con su ancho, $l > R$, el primer término en la ecuación para $I_{(\text{eje } x)}$ se puede ignorar y se obtiene el momento de inercia de masa de una barra esbelta respecto a un eje perpendicular, dado por la ecuación (8.28). Por otra parte, cuando el radio del cilindro es mucho mayor que su longitud, $R > l$, el segundo término de la ecuación para $I_{(\text{eje } x)}$ se puede ignorar y se obtiene el momento de inercia de masa para un disco circular delgado respecto a un eje paralelo al disco. Esto indica las magnitudes de los términos que se ignoran cuando se usan las expresiones aproximadas para los momentos de inercia de masa de una barra "esbelta" y de un disco "delgado".

Problemas

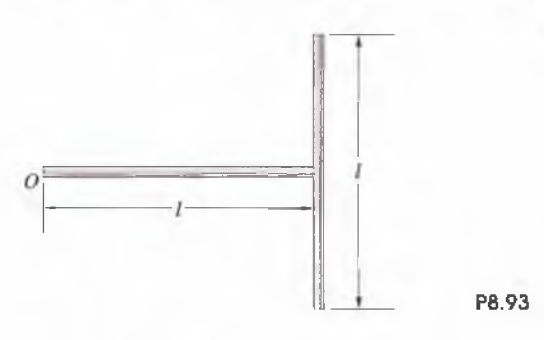
8.92 La barra homogénea esbelta mostrada tiene masa m y longitud l. Mediante integración, determine el momento de inercia de masa respecto al eje perpendicular L_0.

Estrategia: Utilice el mismo método que el empleado para obtener la ecuación (8.28). Sólo se requiere cambiar los límites de integración.



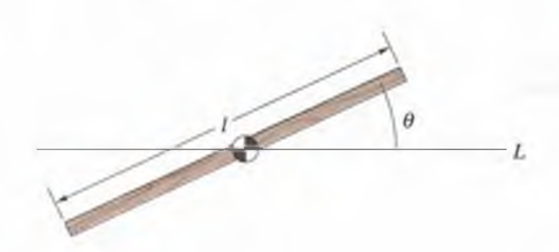
P8.92

8.93 Dos barras homogéneas esbeltas, cada una de masa m y longitud l, están soldadas entre sí para formar un cuerpo en forma de T. Mediante integración, determine el momento de inercia de masa del cuerpo mostrado respecto al eje a través del punto O, que es perpendicular a las barras.



P8.93

8.94 La barra homogénea esbelta mostrada tiene masa m y longitud l. Mediante integración, determine el momento de inercia de masa de la barra respecto al eje L.



P8.94

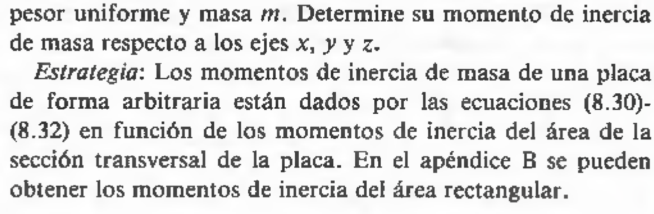
8.95 Un anillo circular formado al doblar una barra homogénea esbelta tiene masa m y radio R. Determine el momento de inercia de masa del anillo mostrado (a) respecto al eje a través de su centro de masa, que es perpendicular al anillo; (b) respecto al eje L.

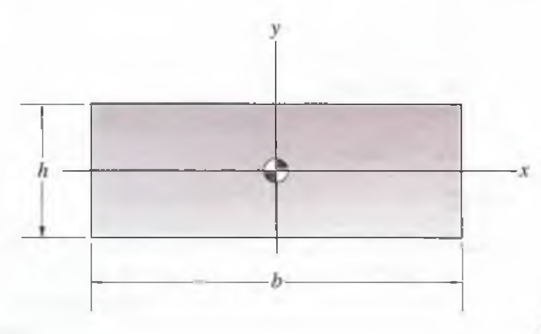


P8.95

8.96 La placa homogénea delgada que se muestra tiene espesor uniforme y masa m. Determine su momento de inercia de masa respecto a los ejes x, y y z.

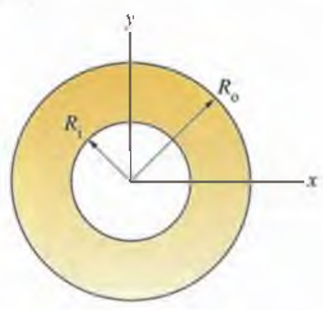
Estrategia: Los momentos de inercia de masa de una placa de forma arbitraria están dados por las ecuaciones (8.30)-(8.32) en función de los momentos de inercia del área de la sección transversal de la placa. En el apéndice B se pueden obtener los momentos de inercia del área rectangular.





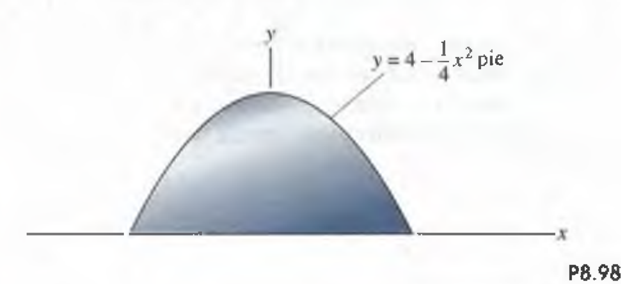
P8.96

8.97 La placa homogénea delgada que se muestra tiene espesor uniforme y masa m.
(a) Determine su momento de inercia de masa respecto a los ejes x y z.
(b) Sea $R_i = 0$ y compare sus resultados con los valores dados en el apéndice C para una placa circular delgada.
(c) Sea $R_i \to R_o$ y compare sus resultados con las soluciones del problema 8.95.



P8.97

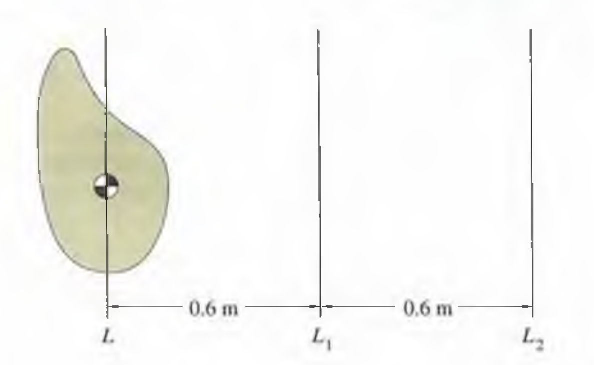
8.98 La placa homogénea delgada que se muestra tiene espesor uniforme y pesa 20 lb. Determine su momento de inercia de masa respecto al eje y.



P8.98

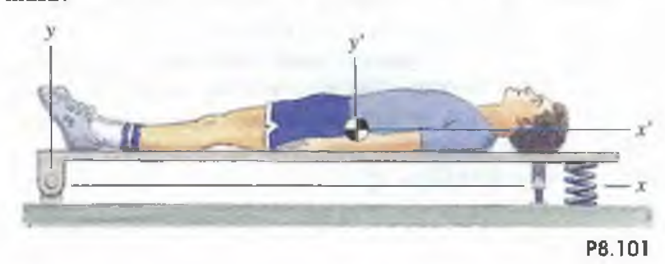
8.99 Determine el momento de inercia de la placa del problema 8.98 respecto al eje x.

8.100 La masa del objeto mostrado es de 10 kg. Su momento de inercia de masa respecto a L_1 es de 10 kg-m². ¿Qué valor tiene su momento de inercia de masa respecto al eje L_2? (Los tres ejes se encuentran en el mismo plano.)



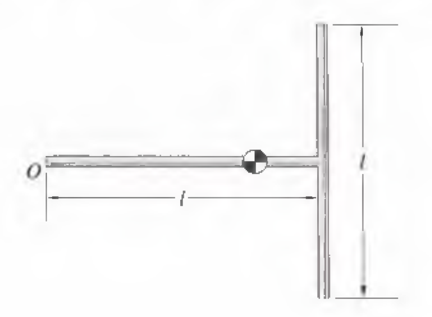
P8.100

8.101 Un ingeniero recaba datos para el diseño de una unidad de maniobras y determina que el centro de masa del astronauta de la figura está en $x = 1.01$ m, $y = 0.16$ m, y que su momento de inercia de masa respecto al eje z es de 105.6 kg-m². Su masa es de 81.6 kg. ¿Qué valor tiene su momento de inercia de masa respecto al eje z' a través de su centro de masa?



P8.101

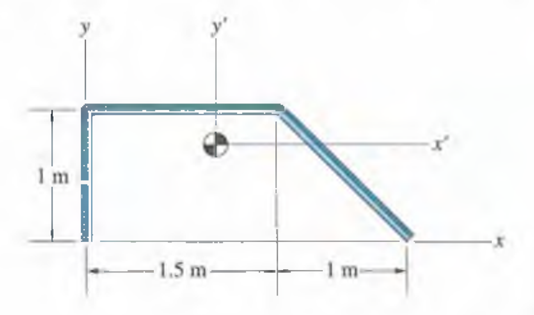
8.102 Dos barras homogéneas esbeltas, cada una con masa m y longitud l, están soldadas entre sí para formar un cuerpo en forma de T. Use el teorema de los ejes paralelos para determinar el momento de inercia de masa del cuerpo respecto al eje a través del punto O y perpendicular a las barras.



P8.102

8.103 Use el teorema de los ejes paralelos para determinar el momento de inercia de masa del cuerpo en forma de T del problema 8.102 respecto al eje a través del centro de masa del cuerpo que es perpendicular a las dos barras.

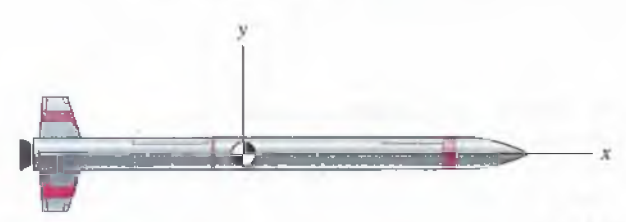
8.104 La masa de la barra homogénea esbelta mostrada es de 20 kg. Determine su momento de inercia de masa respecto al eje z.



P8.104

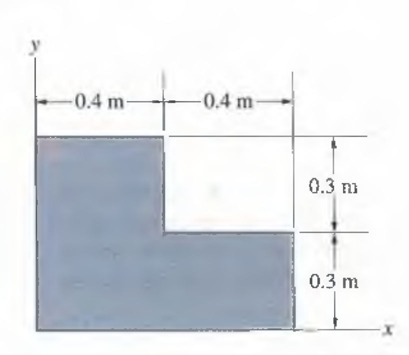
8.105 Halle el momento de inercia de masa de la barra (Prob. 8.104) respecto al eje z' a través de su centro de masa.

8.106 El cohete sirve para investigaciones atmosféricas. Su peso y su momento de inercia de masa respecto al eje z a través de su centro de masa (incluido su combustible) son 10 klb y 10 200 slug-pie^2 respectivamente. El combustible pesa 6000 lb, su centro de masa está en $x = -3$ pies, $y = 0$, $z = 0$, y el momento de inercia de masa del combustible respecto al eje a través del centro de masa y paralelo al eje z es de 2200 slug-pie^2. Si el combustible se agota, ¿qué valor tiene el momento de inercia de masa del cohete respecto al eje a través del nuevo centro de masa paralelo al eje z?



P8.106

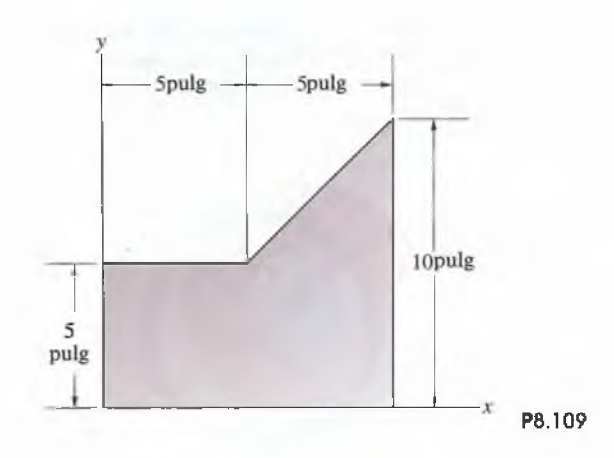
8.107 La masa de la placa delgada homogénea de la figura es de 36 kg. Determine su momento de inercia de masa respecto al eje x.



P8.107

8.108 Determine el momento de inercia de masa de la placa del problema 8.107 respecto al eje z.

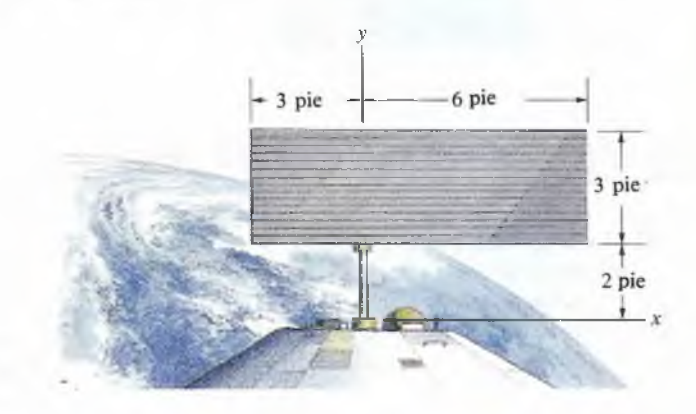
8.109 La placa delgada homogénea pesa 10 lb. Determine su momento de inercia de masa respecto al eje x.



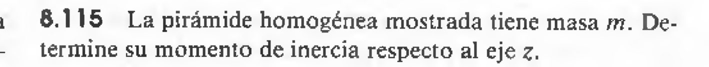
P8.109

8.110 Determine el momento de inercia de masa de la placa del problema 8.109 respecto al eje y.

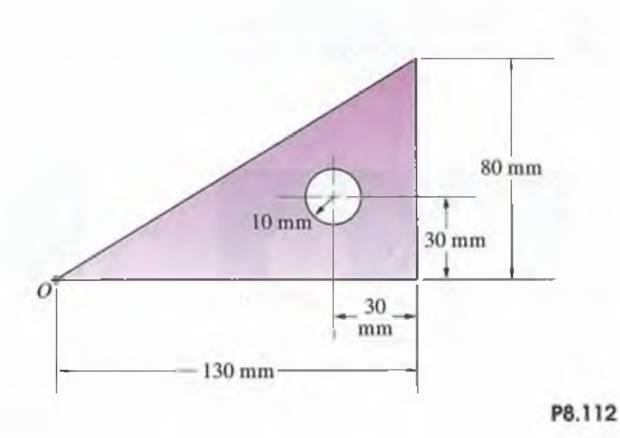
8.111 El radiador termal de la figura (usado para eliminar el exceso de calor en un satélite) se puede representar como una placa homogénea rectangular delgada. Su masa es de 5 slugs. Determine su momento de inercia de masa respecto a los ejes x, y y z.



P8.111



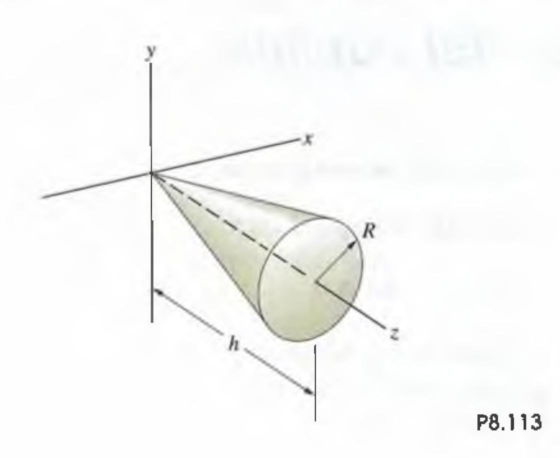
8.12 La masa de la placa homogénea delgada de la figura es de 2 kg. Determine su momento de inercia de masa respecto al eje L_0 a través del punto O perpendicular a la placa.



P8.112

8.113 El cono homogéneo mostrado tiene masa m. Determine su momento de inercia de masa respecto al eje z y compare su resultado con el valor dado en el apéndice C.

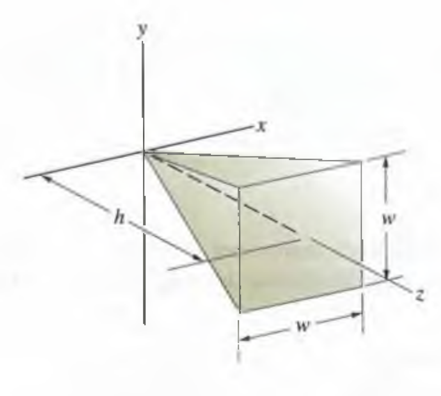
Estrategia: Utilice el mismo método que usamos en el ejemplo 8.14 para obtener los momentos de inercia de un cilindro homogéneo.



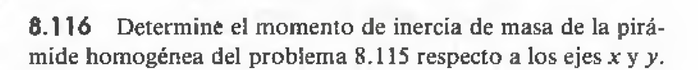
P8.113

8.114 Determine el momento de inercia de masa del cono homogéneo del problema 8.113 respecto a los ejes x y y, y compare sus resultados con los valores dados en el apéndice C.

8.115 La pirámide homogénea mostrada tiene masa m. Determine su momento de inercia respecto al eje z.

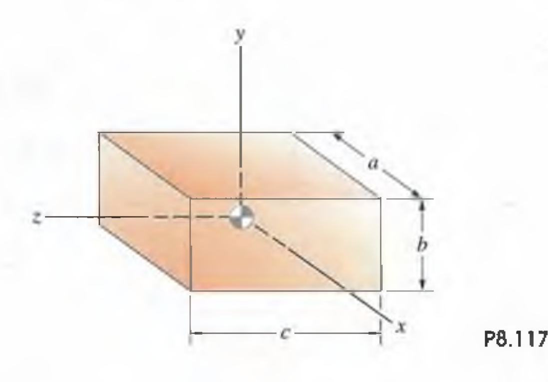


P8.115



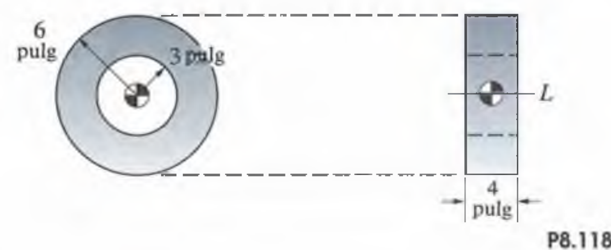
8.116 Determine el momento de inercia de masa de la pirámide homogénea del problema 8.115 respecto a los ejes x y y.

8.117 El paralelepípedo rectangular homogéneo mostrado tiene masa m. Determine sus momentos de inercia de masa respecto a los ejes x, y y z, y compare sus resultados con los valores dados en el apéndice C.



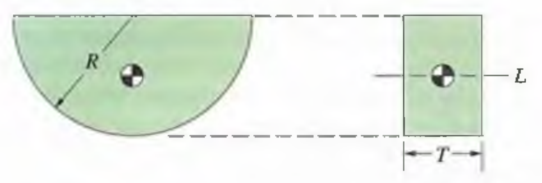
P8.117

8.118 El anillo homogéneo mostrado está hecho de acero con densidad $\rho = 15$ slug/pie^3. Determine su momento de inercia de masa respecto al eje L a través de su centro de masa.



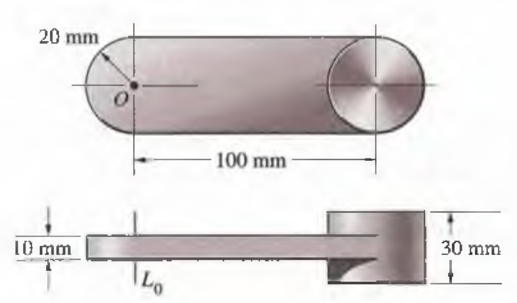
P8.118

8.119 La mitad del cilindro homogéneo mostrado tiene masa m. Determine su momento de inercia de masa respecto al eje L a través de su centro de masa.



P8.119

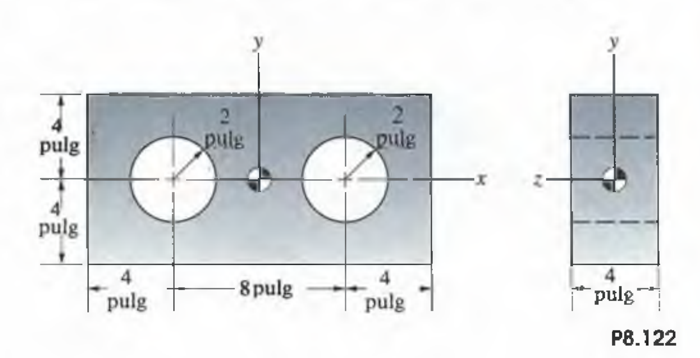
8.120 El cuerpo de acero tiene densidad $\rho = 7800$ kg/m^3. Halle su momento de inercia de masa respecto al eje L_0.



P8.120

8.121 Determine el momento de inercia de masa del cuerpo del problema 8.120 respecto al eje a través de su centro de masa y paralelo al eje L_0.

8.122 La placa de acero tiene densidad $\rho = 15$ slug/pie^3. Halle su momento de inercia de masa respecto al eje z.



P8.122

8.123 Determine el momento de inercia de masa del cuerpo del problema 8.122 respecto al eje x.

Resumen del capítulo

Áreas

Se definen cuatro **momentos de inercia de área**:

1. El momento de inercia respecto al eje x:

$$I_x = \int_A y^2 \, dA. \qquad \textbf{Ec. (8.1)}$$

2. El momento de inercia respecto al eje y:

$$I_y = \int_A x^2 \, dA. \qquad \textbf{Ec. (8.3)}$$

3. El producto de inercia:

$$I_{xy} = \int_A xy \, dA. \qquad \textbf{Ec. (8.5)}$$

4. El momento polar de inercia:

$$J_0 = \int_A r^2 \, dA. \qquad \textbf{Ec. (8.6)}$$

Los radios de giro respecto a los ejes x y y se definen como $k_x = \sqrt{I_x/A}$ y $k_y = \sqrt{I_y/A}$ respectivamente, y el radio de giro respecto al origen O se define como $k_0 = \sqrt{J_0/A}$.

El momento polar de inercia es igual a la suma de los momentos de inercia respecto a los ejes x y y: $J_0 = I_y + I_x$. Si un área es simétrica respecto al eje x o y, su producto de inercia es igual a cero.

Sea $x'y'$ un sistema coordenado con su origen en el centroide de un área A, y sea xy un sistema coordenado paralelo. Los momentos de inercia de A en los dos sistemas están relacionados por los **teoremas de los ejes paralelos** (Ecs. 8.10-8.13):

$$I_x = I_{x'} + d_y^2 A,$$

$$I_y = I_{y'} + d_x^2 A,$$

$$I_{xy} = I_{x'y'} + d_x d_y A,$$

$$J_0 = J_0' + (d_x^2 + d_y^2)A = J_0' + d^2 A,$$

donde d_x y d_y son las coordenadas del centroide de A en el sistema coordenado xy.

Masas

El momento de inercia de masa de un cuerpo respecto a un eje L_0 es

$$I_0 = \int_m r^2\, dm, \qquad \textbf{Ec. (8.27)}$$

donde r es la distancia perpendicular de L_0 al elemento diferencial de masa dm.

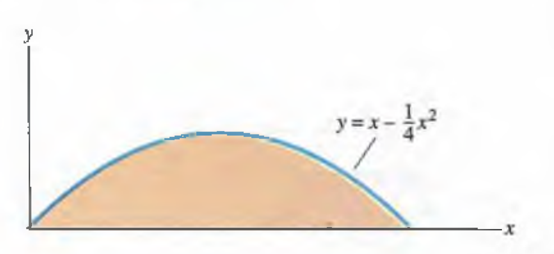
Sea L un eje que pase por el centro de masa de un cuerpo y sea L_0 un eje paralelo. El momento de inercia I_0 respecto a L_0 está dado en función del momento de inercia I respecto a L por el **teorema de los ejes paralelos,**

$$I_0 = I + d^2 m, \qquad \textbf{Ec. (8.35)}$$

donde m es la masa del cuerpo y d es la distancia entre L y L_0.

Problemas de repaso

Problemas 8.124-8.126



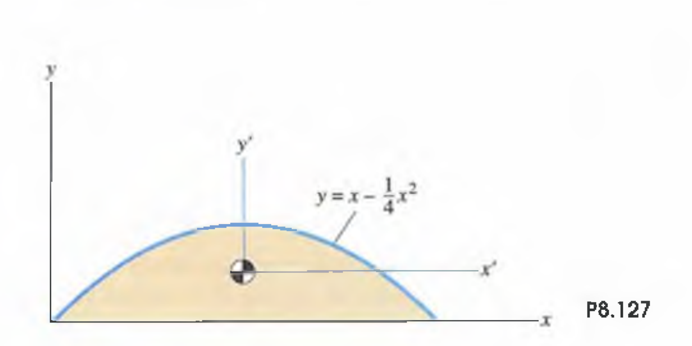
P8.124

8.124 Determine I_y y k_y.

8.125 Determine I_x y k_x.

8.126 Determine I_{xy}.

Problemas 8.127-8.129 (El origen del sistema coordenado $x'y'$ está en el centroide del área.)



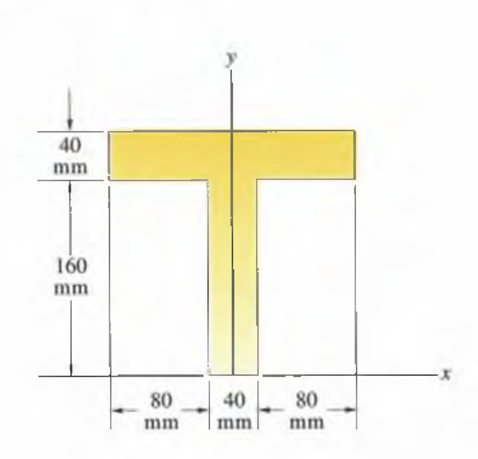
P8.127

8.127 Determine $I_{y'}$ y $k_{y'}$.

8.128 Determine $I_{x'}$ y $k_{x'}$.

8.129 Determine $I_{x'y'}$.

Problemas 8.130, 8.131

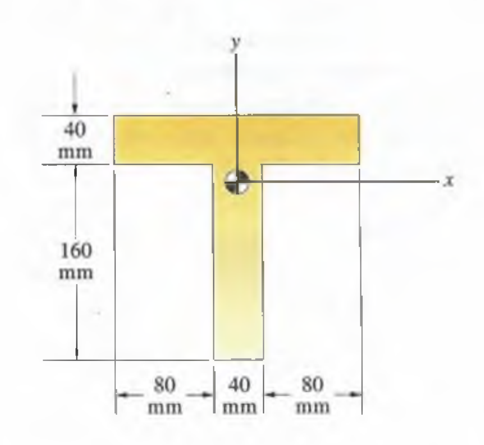


P8.130

8.130 Determine I_y y k_y.

8.131 Determine I_x y k_x.

Problemas 8.132, 8.133

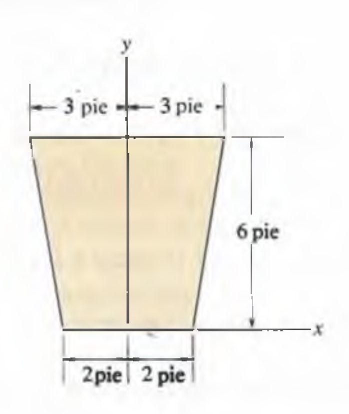


P8.132

8.132 Determine I_x y k_x.

8.133 Determine J_0 y k_0.

Problemas 8.134, 8.135

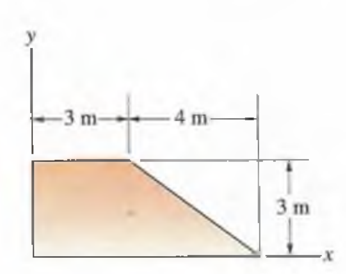


P8.134

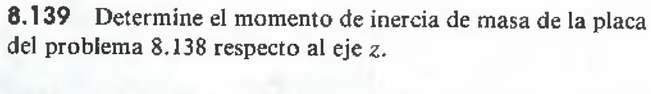
8.134 Determine I_x y k_x.

8.135 Determine I_y y k_y.

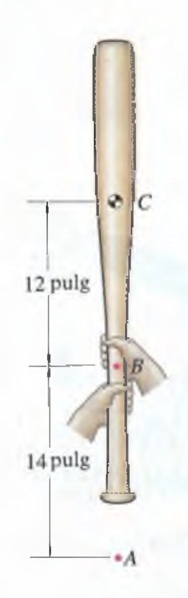
8.136 Los momentos de inercia del área son $I_x = 36\ \text{m}^4$, $I_y = 145\ \text{m}^4$ e $I_{xy} = 44.25\ \text{m}^4$. Determine el conjunto de los ejes principales y los momentos de inercia principales.



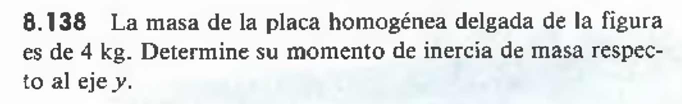
P8.136



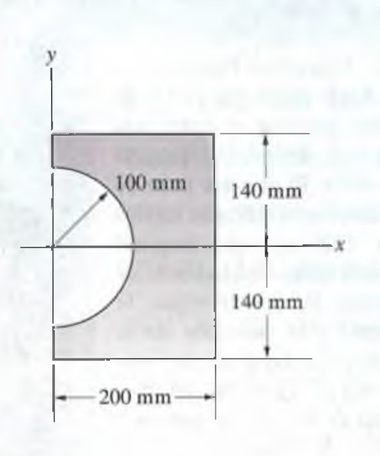
8.137 El momento de inercia del bate de 31 onzas mostrado respecto a un eje perpendicular a través del punto B es de 0.093 slug-pie^2. ¿Qué valor tiene el momento de inercia de masa del bate respecto a un eje perpendicular a través del punto A? (El punto A es el "centro instantáneo" del bate, o centro de rotación, en el instante mostrado.)



P8.137



8.138 La masa de la placa homogénea delgada de la figura es de 4 kg. Determine su momento de inercia de masa respecto al eje y.



P8.138

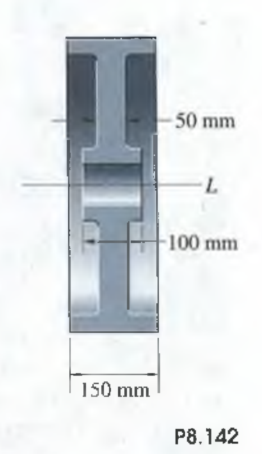
8.139 Determine el momento de inercia de masa de la placa del problema 8.138 respecto al eje z.

8.140 El objeto homogéneo mostrado pesa 400 lb. Determine su momento de inercia de masa respecto al eje x.

P8.140

8.141 Determine el momento de inercia de masa del cuerpo del problema 8.140 respecto a los ejes y y z.

8.142 Determine el momento de inercia de masa del volante de 14 kg mostrado respecto al eje L.



P8.142



El puente Verrazano-Narrows de Nueva York tiene un claro de 4260 pies, que era el claro colgante más grande del mundo cuando se terminó (1965). El enorme peso de su cubierta está soportado por cables de acero de 7200 pies de longitud construidos con miles de alambres de acero trenzados. Para determinar la forma del cable y la variación de la tensión a lo largo de él, podemos representar las fuerzas ejercidas sobre el cable principal de un puente colgante como una carga distribuida.

Capítulo 9

Fuerzas distribuidas

LA fuerza ejercida sobre un cuerpo por su peso está distribuida sobre el volumen del cuerpo. La fuerza ejercida sobre la cimentación de un edificio por el suelo subyacente está distribuida sobre la superficie de la cimentación. El peso de un puente colgante está distribuido a lo largo de los cables principales del puente.

Como muestran estos ejemplos, muchas de las fuerzas que se deben considerar en el análisis y diseño de ingeniería están distribuidas a lo largo de líneas o sobre superficies o volúmenes. En el capítulo 7 mostramos que cuando sólo nos interesan la fuerza total y el momento ejercido por el peso de un cuerpo, éste se puede representar con una fuerza que actúa en su centro de masa. En este capítulo analizamos otros ejemplos importantes de fuerzas distribuidas y momentos, y explicamos cómo se describen y usan en el análisis de los cuerpos en equilibrio.

9.1 Cargas distribuidas en una línea

La carga ejercida sobre una viga que soporta el piso de un edificio está distribuida sobre la longitud de la viga (Fig. 9.1a). La carga ejercida por el viento sobre una torre de televisión está distribuida a lo largo de la altura de la torre (Fig. 9.1b). En muchas aplicaciones de ingeniería las cargas están distribuidas en forma continua a lo largo de líneas.

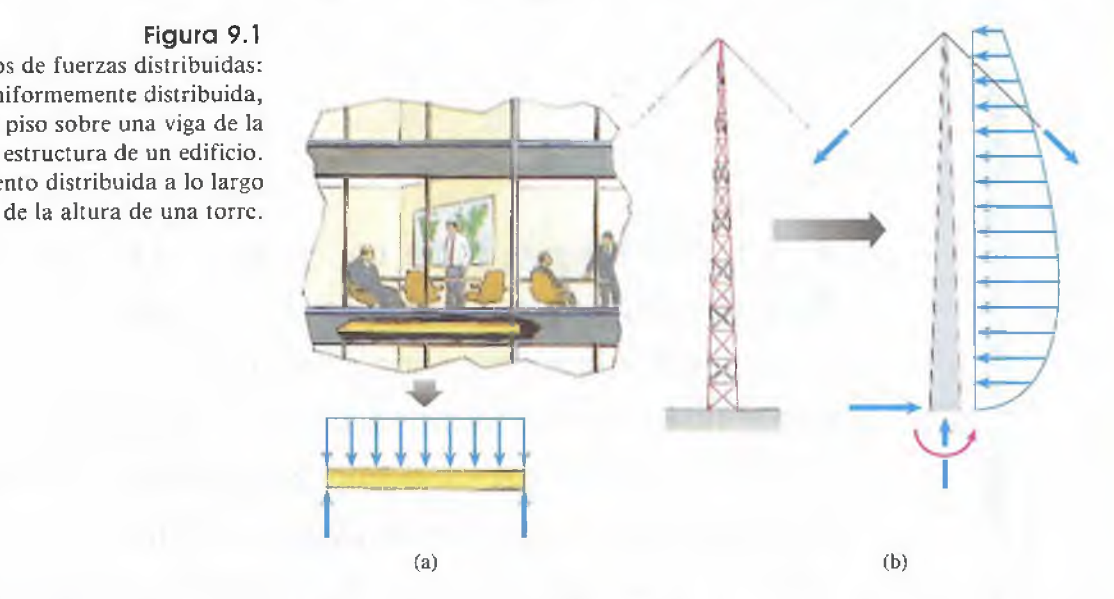


Figura 9.1
Ejemplos de fuerzas distribuidas:
(a) Carga uniformemente distribuida, ejercida por el piso sobre una viga de la estructura de un edificio.
(b) Carga de viento distribuida a lo largo de la altura de una torre.

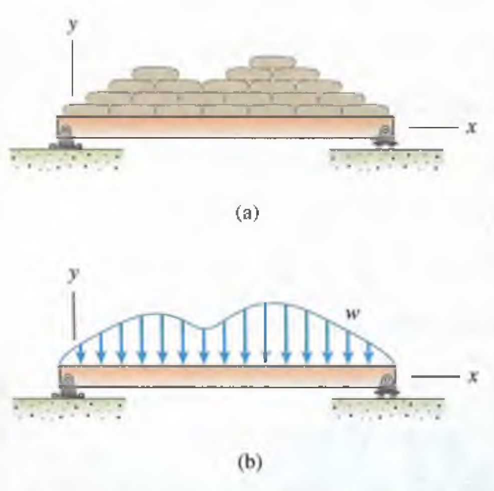


Figura 9.2
(a) Carga de una viga con sacos de arena.
(b) La carga distribuida w representa la carga ejercida por los sacos.

Con un ejemplo sencillo podemos demostrar cómo se expresan analíticamente tales cargas. Si apilamos sacos de arena sobre una viga, como en la figura 9.2(a), la carga se distribuye sobre la viga, y su magnitud en una posición x dada depende de lo alto que estén apilados los sacos ahí. Para describir la carga, definimos una función w tal que la fuerza *hacia abajo* sobre un elemento infinitesimal dx de la viga es $w\,dx$. Con esto podemos representar la magnitud variable de la carga ejercida por los sacos (Fig. 9.2b). Las flechas indican que la carga actúa hacia abajo. Las cargas distribuidas en líneas, desde los casos más simples como el del peso propio de una viga hasta los más complicados como la fuerza de sustentación distribuida a lo largo del ala de un avión, se representan con w. Como el producto de w y dx es una fuerza, las dimensiones de w son (fuerza)/(longitud), y w se puede expresar en N/m en unidades SI o en lb/pie en el sistema inglés.

Supongamos que se conoce la función w que describe una carga distribuida particular (Fig. 9.3a). La gráfica de w se llama **curva de carga**. Como la fuerza actúa sobre un elemento dx de la línea es wdx, podemos determinar la fuerza F ejercida por la carga distribuida integrando la curva de carga con respecto a x:

$$F = \int_L w\,dx. \tag{9.1}$$

Podemos también integrar para determinar el momento respecto a un punto ejercido por la carga distribuida. Por ejemplo, el momento respecto al origen debido a la fuerza ejercida sobre el elemento dx es $xwdx$, y el momento total respecto al origen debido a la carga distribuida es

$$M = \int_L xw\,dx. \tag{9.2}$$

Cuando sólo nos interesan la fuerza total y el momento total ejercidos por una carga distribuida, ésta se puede representar con una sola fuerza equivalente F (Fig. 9.3b). Para que sea equivalente, la fuerza debe actuar en una posición $\bar{x}$ sobre el eje x tal que el momento de F respecto al origen sea igual al momento de la carga distribuida respecto al origen:

$$\bar{x}F = \int_L xw\,dx.$$

Por consiguiente, la fuerza F equivale a la carga distribuida si la colocamos en la posición

$$\bar{x} = \frac{\displaystyle\int_L xw\,dx}{\displaystyle\int_L w\,dx}. \tag{9.3}$$

Observe que el término wdx es igual a un elemento de "área" dA entre la curva de carga y el eje x (Fig. 9.3c). (Ponemos comillas porque wdx es en realidad una fuerza y no un área.) Interpretada de esta manera, la ecuación (9.1) establece que la fuerza total ejercida por la carga distribuida es igual al "área" A entre la curva de carga y el eje x:

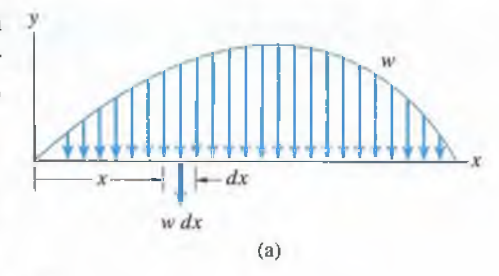
$$F = \int_A dA = A. \tag{9.4}$$

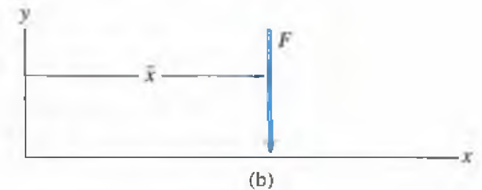
Sustituyendo $wdx = dA$ en la ecuación (9.3), obtenemos

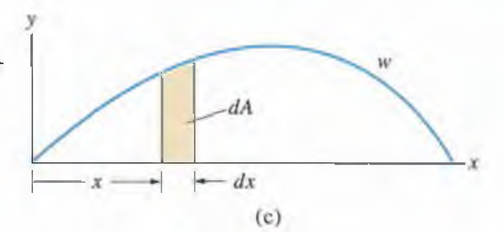
$$\bar{x} = \frac{\displaystyle\int_A x\,dA}{\displaystyle\int_A dA}. \tag{9.5}$$

La fuerza única equivalente a la carga distribuida actúa en el centroide, o posición de peso ponderado, del "área" entre la curva de carga y el eje x (Fig. 9.3d). Se verá que esta analogía entre la carga distribuida y el área es de utilidad cuando se quiere reemplazar una carga distribuida con una fuerza equivalente.

Los siguientes ejemplos muestran cómo se determinan las reacciones en los soportes de vigas sometidas a cargas distribuidas. Si una carga distribuida tiene una forma geométrica sencilla, la fuerza equivalente se puede determinar calculando el "área" entre la curva de carga y el eje x y localizando su centroide. Para curvas de carga más complejas, se pueden usar las ecuaciones (9.1) y (9.2) para calcular la fuerza total y el momento.







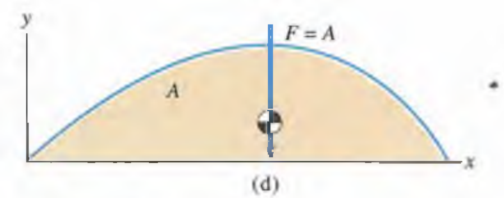
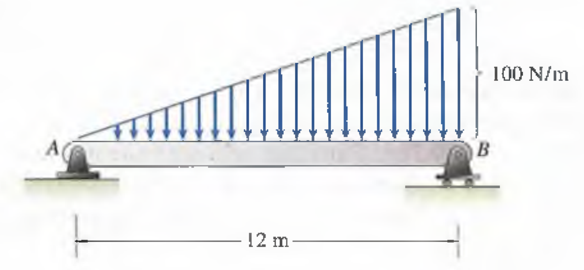


Figura 9.3
(a) Una carga distribuida y la fuerza ejercida sobre un elemento diferencial dx.
(b) La fuerza equivalente.
(c) Determinación del "área" entre la función w y el eje x.
(d) La fuerza equivalente es igual al "área".

Ejemplo 9.1

La viga de la figura 9.4 está sometida a una carga distribuida "triangular" cuyo valor en B es de 100 N/m. Determine las reacciones en A y B.

Figura 9.4



ESTRATEGIA

Podemos determinar las reacciones de dos maneras:

Primer método Deduciendo una ecuación para w, podemos usar (9.1) y (9.2) para determinar la fuerza total y el momento de la carga distribuida.

Segundo método Podemos representar la carga distribuida con una fuerza equivalente que actúa en el centroide de la curva de carga.

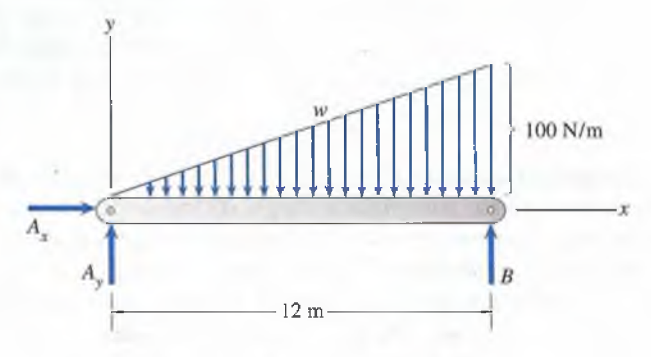
SOLUCIÓN

Primer método Dibujamos el diagrama de cuerpo libre de la viga con un sistema coordenado en la figura (a). Como w varía linealmente a lo largo de la viga y su valor en $x = 12$ m es de 100 N/m, podemos expresarla como

$$w = \frac{100}{12}x \text{ N/m}.$$

La fuerza total hacia abajo ejercida sobre la viga por la carga distribuida es

$$F = \int_L w\,dx = \int_0^{12} \frac{100}{12}x\,dx = 600 \text{ N},$$



(a) Diagrama de cuerpo libre de la viga.

y el momento *horario* respecto a A debido a la carga distribuida es

$$\int_L xw\,dx = \int_0^{12} \frac{100}{12}x^2\,dx = 4800 \text{ N-m}.$$

De las ecuaciones de equilibrio

$$\Sigma F_x = A_x = 0,$$

$$\Sigma F_y = A_y + B - 600 = 0,$$

$$\Sigma M_{(\text{punto } A)} = 12B - 4800 = 0,$$

obtenemos las reacciones $A_x = 0$, $A_y = 200$ N y $B = 400$ N.

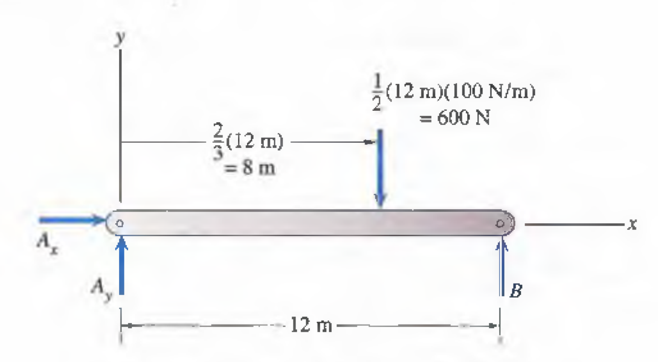
Segundo método El "área" de la carga distribuida triangular es igual a un medio de su base por su "altura", o $\frac{1}{2}(12 \text{ m}) \times (100 \text{ N/m}) = 600$ N. El centroide del "área" triangular está en $\bar{x} = \frac{2}{3}(12 \text{ m}) = 8$ m. Por lo tanto la carga distribuida se puede representar con una fuerza equivalente hacia abajo de magnitud 600 N que actúa en $x = 8$ m (Fig. b). De las ecuaciones de equilibrio

$$\Sigma F_x = A_x = 0,$$

$$\Sigma F_y = A_y + B - 600 = 0,$$

$$\Sigma M_{(\text{punto } A)} = 12B - (8)(600) = 0,$$

obtenemos de nuevo $A_x = 0$, $A_y = 200$ N y $B = 400$ N.



(b) Representación de la carga distribuida por una fuerza equivalente.

COMENTARIO

Como en este ejemplo pudimos determinar con facilidad el "área" y la posición del centroide de la carga distribuida triangular, reemplazar ésta por una fuerza equivalente fue la manera más sencilla para determinar las reacciones en los soportes.

Ejemplo 9.2

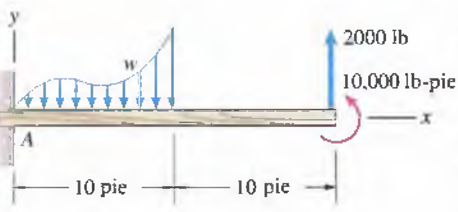


Figura 9.5

La viga de la figura 9.5 está sometida a una carga distribuida, a una fuerza y a un par. La carga distribuida es $w = 300x - 50x^2 + 0.3x^4$ lb/pie. Determine las reacciones en A.

ESTRATEGIA

Para determinar el "área" y el centroide de la curva de carga es preciso integrar, por lo que no nos sirve la analogía del área. Para determinar la fuerza y el momento de la carga distribuida usamos las ecuaciones (9.1) y (9.2).

SOLUCIÓN

La fuerza total hacia abajo ejercida por la carga distribuida es

$$F = \int_L w\,dx = \int_0^{10} (300x - 50x^2 + 0.3x^4)\,dx = 4333.3 \text{ lb.}$$

El momento *horario* respecto al punto A debido a la carga distribuida es

$$\int_L xw\,dx = \int_0^{10} x(300x - 50x^2 + 0.3x^4)\,dx = 25\,000 \text{ lb-pie.}$$

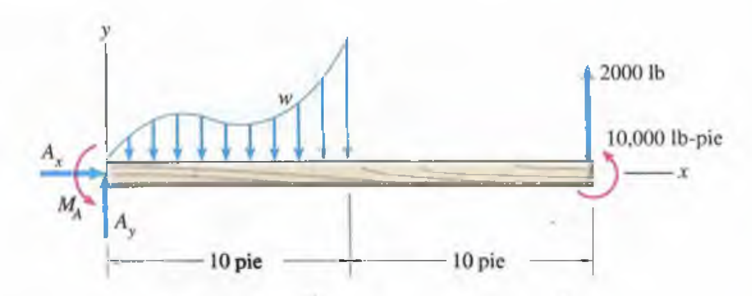
En la figura (a) dibujamos el diagrama de cuerpo libre de la viga. De las ecuaciones de equilibrio

$$\Sigma F_x = A_x = 0,$$

$$\Sigma F_y = A_y + 2000 - 4333.3 = 0,$$

$$\Sigma M_{(\text{punto } A)} = (20)(2000) + 10\,000 - 25\,000 + M_A = 0,$$

obtenemos $A_x = 0$, $A_y = 2333.3$ lb y $M_A = -25\,000$ lb-pie.



(a) Diagrama de cuerpo libre de la viga.

COMENTARIO

Observe que una vez calculados la fuerza y el momento totales debidos a la carga distribuida, podemos representarlos por medio de una fuerza equivalente. El momento de la fuerza F hacia abajo respecto al origen es igual al momento de la fuerza distribuida respecto al origen si colocamos F en

$$\bar{x} = \frac{25\,000 \text{ lb-pie}}{4333.3 \text{ lb}} = 5.77 \text{ pie.}$$

Ejemplo 9.3

La viga de la figura 9.6 está sometida a dos cargas distribuidas. Determine las reacciones en A y B.

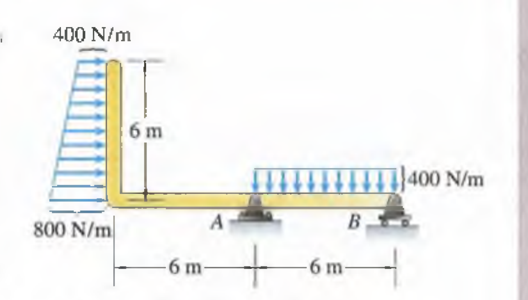


Figura 9.6

ESTRATEGIA

Es fácil representar la carga uniforme a la derecha con una fuerza equivalente. La carga a la izquierda se puede considerar como la suma de cargas uniforme y triangular; cada una se representa con una fuerza equivalente.

SOLUCIÓN

En (a) dibujamos el diagrama de cuerpo libre de la viga, expresando la carga distribuida a la izquierda como la suma de cargas uniforme y triangular. En (b) representamos las tres cargas con fuerzas equivalentes. El "área" de la carga distribuida uniforme a la derecha es (6 m) × (400 N/m) = 2400 N, y su centroide se halla a 3 m de B. El área de la carga distribuida uniforme sobre la parte vertical de la viga es (6 m) × (400 N/m) = 2400 N y su centroide está en $y = 3$ m. El área de la carga triangular es $\frac{1}{2}$ × (6 m) × (400 N/m) = 1200 N y su centroide está en $y = \frac{1}{3}(6 \text{ m}) = 2$ m.

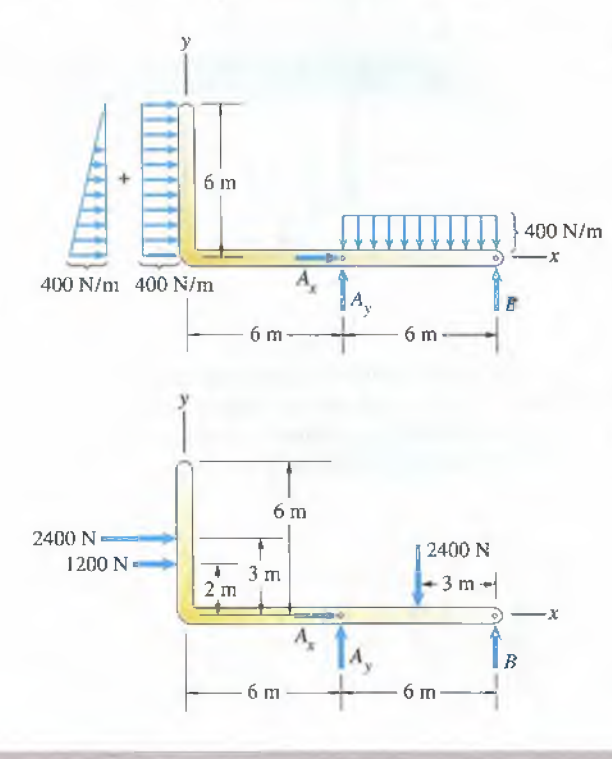
De las ecuaciones de equilibrio

$$\Sigma F_x = A_x + 1200 + 2400 = 0,$$

$$\Sigma F_y = A_y + B - 2400 = 0,$$

$$\Sigma M_{(\text{punto } A)} = 6B - (3)(2400) - (2)(1200) - (3)(2400) = 0,$$

obtenemos $A_x = -3600$ N, $A_y = -400$ N y $B = 2800$ N.

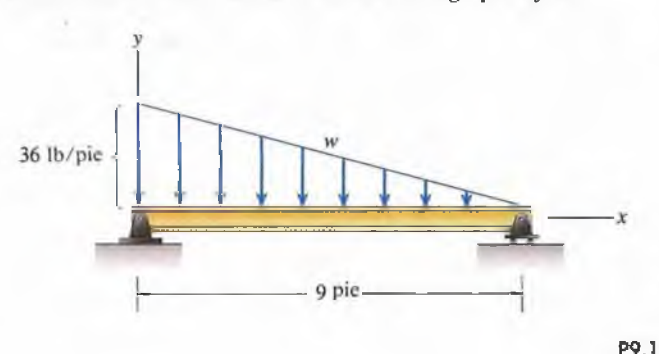


(a) Diagrama de cuerpo libre de la viga.

(b) Representación de las cargas distribuidas por fuerzas equivalentes.

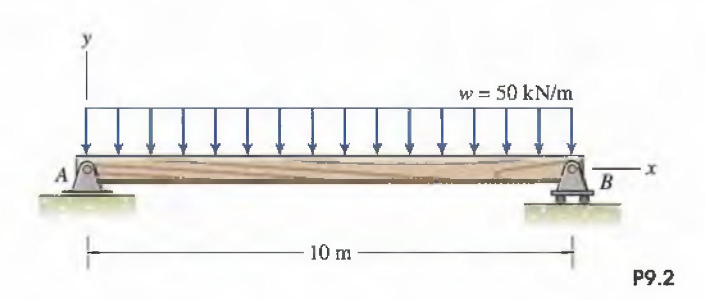
Problemas

9.1 En la figura P9.1, el valor de la carga distribuida w en $x = 0$ es 36 lb/pie.
(a) Determine la función w.
(b) Use la ecuación (9.1) para determinar la fuerza total ejercida por la carga distribuida.
(c) Determine la fuerza total ejercida por la carga distribuida calculando el "área" entre la curva de carga y el eje x.



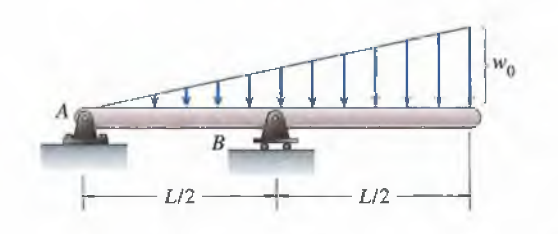
P9.1

9.2 En el estudio del prediseño de un puente peatonal, un ingeniero representa el peso del puente y su máxima carga esperada por medio de la carga distriubida que se muestra. ¿Qué reacciones se ejercen sobre los soportes del puente en A y B?



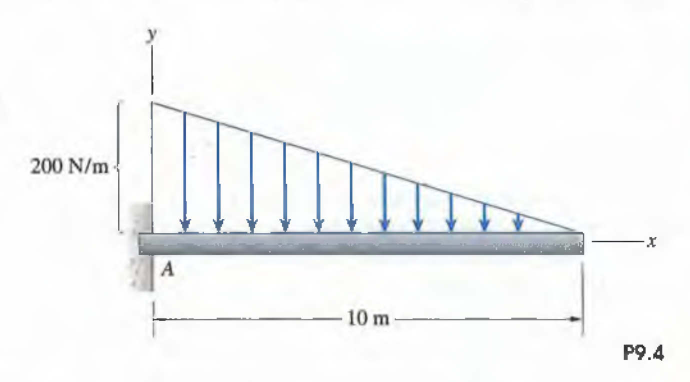
P9.2

9.3 Determine las reacciones en A y B de la figura P9.3.



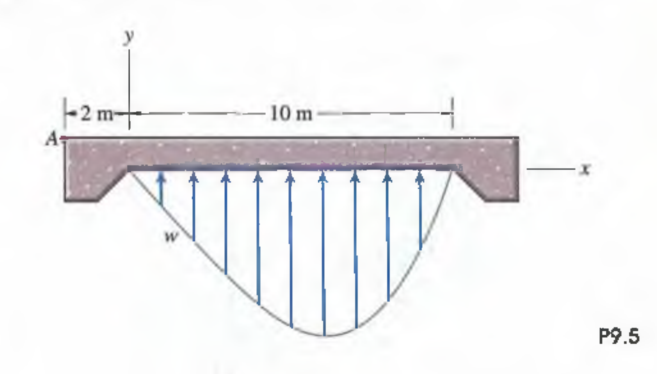
P9.3

9.4 La viga en voladizo que se muestra está sometida a una carga distribuida triangular. ¿Qué reacciones se presentan en A?



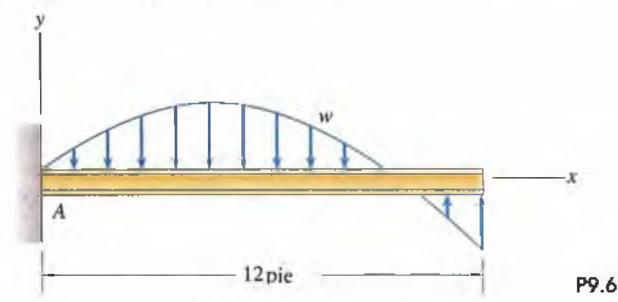
P9.4

9.5 Se miden las fuerzas ejercidas por el suelo sobre una sección de 10 m de la cimentación de un edificio; están descritas por la carga distribuida $w = -10x - x^2 + 0.2\,x^3$ kN/m.
(a) Determine la magnitud de la fuerza total ejercida sobre la cimentación por la carga distribuida.
(b) Determine la magnitud del momento respecto a A debido a la carga distribuida.



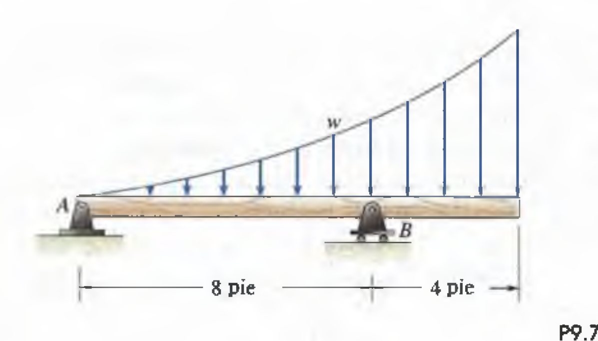
P9.5

9.6 La viga que se muestra está sometida a una carga distribuida $w = 100x - cx^2$ lb/pie, donde c es una constante. El momento respecto a A debido a la carga distribuida es cero. ¿Qué valor tienen las reacciones en A?



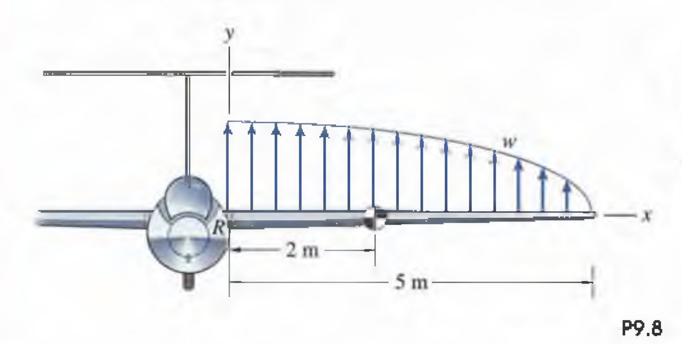
P9.6

9.7 La carga distribuida que se muestra está dada por $w = 10x^2$ lb/pie. Determine las reacciones en A y B.



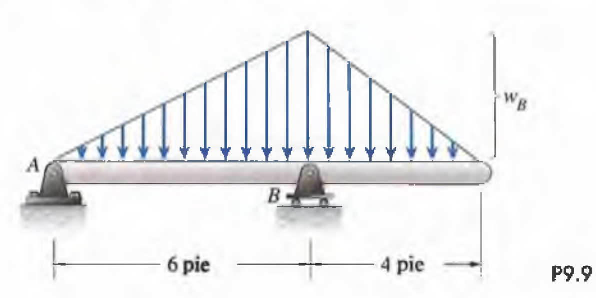
P9.7

9.8 La fuerza de sustentación aerodinámica del ala de la figura está descrita por la carga distribuida $w = -300\sqrt{1 - 0.04x^2}$ N/m. La masa del ala es de 27 kg y su centro de masa está situado a 2 m del punto R de unión con el fuselaje.
(a) Determine las magnitud de la fuerza y el momento respecto a R ejercidos por la fuerza de sustentación.
(b) Determine las reacciones sobre el ala en R.



P9.8

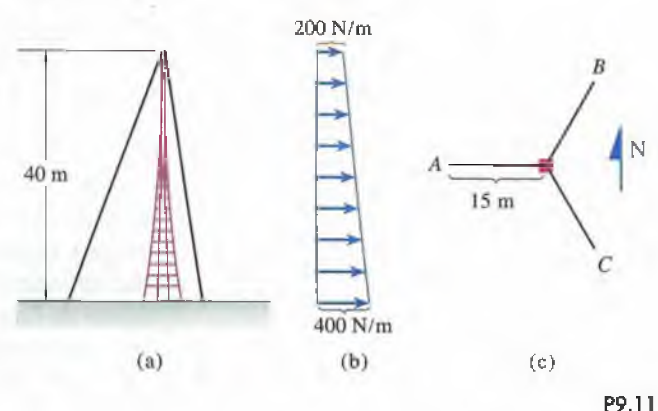
9.9 Si $w_B = 100$ lb/pie, ¿qué valor tienen las reacciones en A y B de la figura P9.9?



P9.9

9.10 Cada soporte de la viga (P9.9) resiste una carga vertical de 1000 lb, ¿cuál es el valor máximo seguro de w_B?

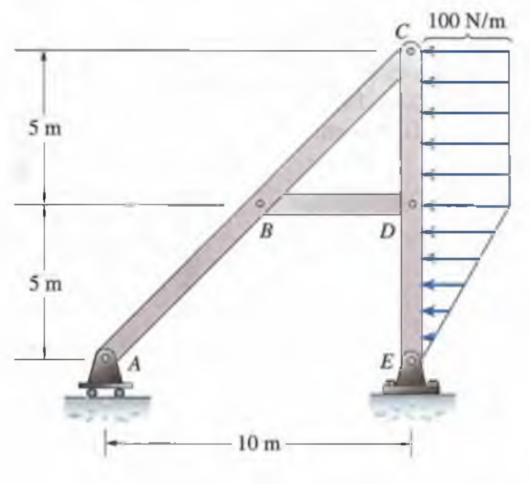
9.11 Se calcula que la carga máxima de viento sobre la torre de 40 m de altura de la figura (a) está descrita por la carga distribuida en la figura (b). La torre está soportada por tres cables, A, B y C, que van de la parte superior de la torre a puntos igualmente espaciados a 15 m de la base de la torre (Fig. c). Si el viento sopla del oeste y los cables B y C están flojos, ¿cuál es la tensión en el cable A? (Represente la base de la torre como un soporte de bola y cuenca.)



P9.11

9.12 Si en el problema 9.11 el viento sopla del este y el cable A está flojo, ¿cuáles son las tensiones en los cables B y C?

9.13 ¿Qué valor tiene la carga axial en el elemento BD del bastidor?



P9.13

9.2 Fuerzas y momentos internos en vigas

Para que un elemento estructural no falle (se rompa o desplome) debido a las fuerzas y los momentos que actúan sobre él, el ingeniero proyectista debe conocer no sólo las cargas y reacciones externas, sino también las fuerzas y los momentos que actúan *dentro* del elemento.

Consideremos una viga sometida a una carga externa y a reacciones (Fig. 9.7a). ¿Cómo podemos determinar las fuerzas y los momentos dentro de la viga? En la figura 9.7(b) "cortamos" la viga con un plano en una sección transversal arbitraria y aislamos parte de ella. La parte aislada no puede estar en equilibrio a menos que esté sometida a cierto sistema de fuerzas y momentos en el plano en que se une a la otra parte de la viga. Éstas son las fuerzas y momentos internos que buscamos.

En el capítulo 4 demostramos que *cualquier* sistema de fuerzas y momentos se puede representar por un sistema equivalente que consiste en una fuerza y un par. Si el sistema de cargas externas y reacciones sobre una viga es bidimensional, podemos representar las fuerzas y el momento internos con un sistema equivalente que consiste en dos componentes de fuerza y un par (Fig. 9.7c). La componente P paralela al eje de la viga se llama **fuerza axial**. La componente V normal al eje de la viga se llama **fuerza cortante**, y el par M se llama **momento flector**. En la figura 9.7(d) se muestran la fuerza axial, la fuerza cortante y el momento flector en el diagrama de cuerpo libre de la otra parte de la viga.

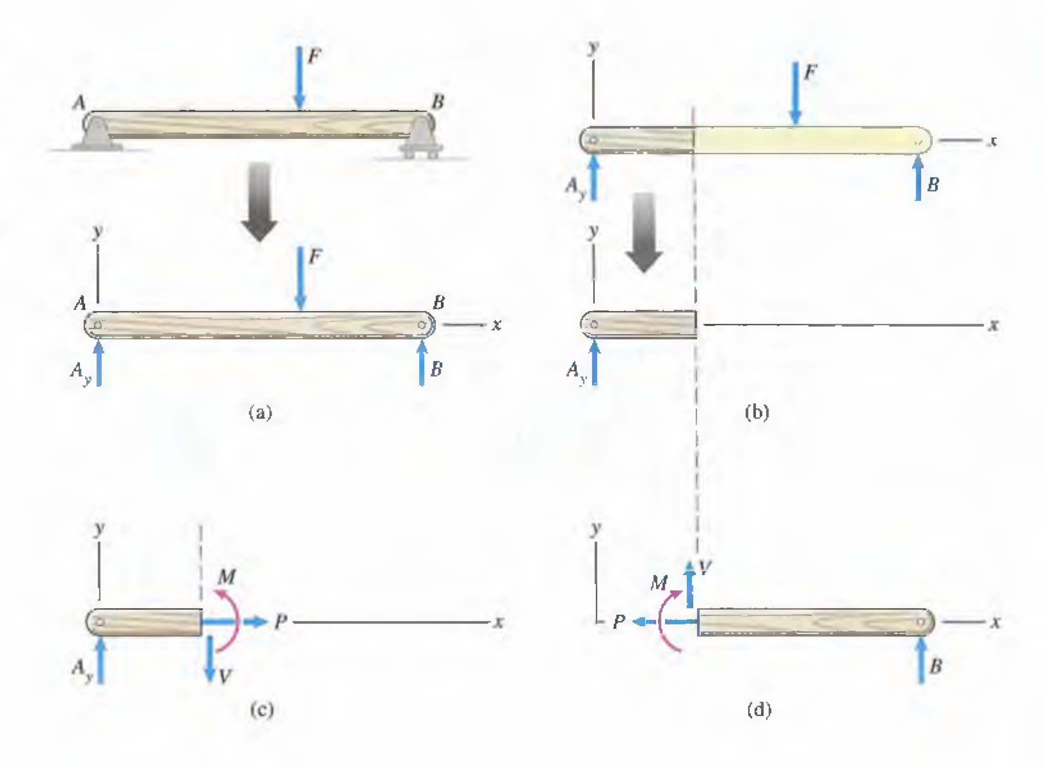


Figura 9.7
(a) Viga sometida a una carga y reacciones.
(b) Parte aislada de la viga.
(c), (d) Fuerza axial, fuerza cortante y (c),(d) momento flector.

En las figuras 9.7(c) y (d) las direcciones de la fuerza axial, de la fuerza cortante y del momento flector son las definiciones preestablecidas de las direcciones positivas de esas cantidades. Una fuerza axial positiva P somete la viga a tensión; una fuerza cortante positiva V tiende a hacer girar el eje de la viga en sentido horario (Fig. 9.8a). Los momentos flectores se definen como positivos cuando tienden a flexionar el eje de la viga hacia arriba (Fig. 9.8b). En función del sistema coordenado que utilizamos, "hacia arriba" significa la dirección positiva del eje y.

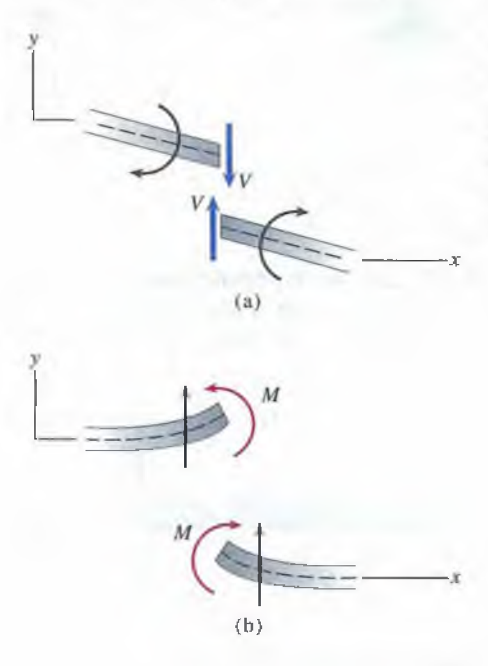


Figura 9.8
(a) Las fuerzas cortantes positivas tienden a hacer girar el eje de la viga en sentido horario.
(b) Los momentos flectores positivos tienden a flexionar el eje de la viga hacia arriba.

Los dos siguientes ejemplos muestran cómo se determinan las fuerzas y el momento internos en una sección transversal particular de una viga. Esto implica tres pasos:

1. Determinar las fuerzas y los momentos externos. *Dibuje el diagrama de cuerpo libre de la viga y determine las reacciones en los soportes. Si la viga forma parte de una estructura, se debe analizar la estructura.*

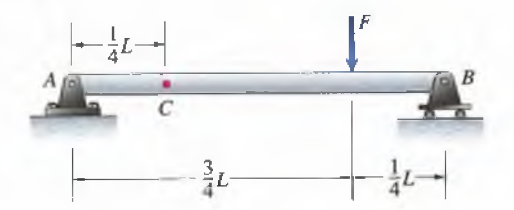
2. Dibujar el diagrama de cuerpo libre de una parte de la viga. *Corte la viga en el punto en que desee determinar las fuerzas internas y el momento, y dibuje el diagrama de cuerpo libre de una de las partes resultantes. Se puede escoger la parte con el diagrama de cuerpo libre más sencillo. Si el corte divide una carga distribuida, no represente la carga distribuida por medio de una fuerza equivalente hasta haber obtenido el diagrama de cuerpo libre.*

3. Aplicar las ecuaciones de equilibrio. *Use las ecuaciones de equilibrio para determinar P, V y M.*

Ejemplo 9.4

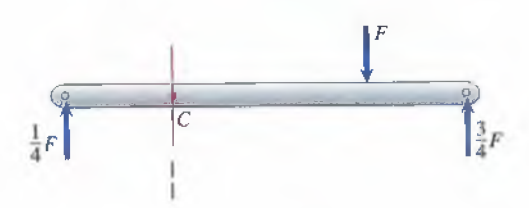
Determine las fuerzas y el momento internos en el punto C de la viga (Fig. 9.9).

Figura 9.9



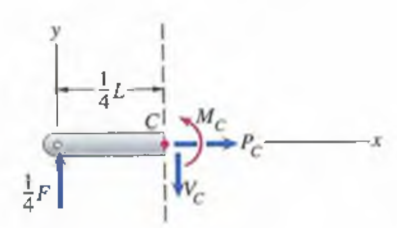
SOLUCIÓN

Determinar las fuerzas y el momento internos Comenzamos dibujando el diagrama de cuerpo libre de la viga y determinando las reacciones en sus soportes; los resultados se muestran en la figura (a).



(a) Diagrama de cuerpo libre de la viga y un plano por el punto C.

Dibujar el diagrama de cuerpo libre de una parte de la viga Cortamos la viga en C (Fig. a) y dibujamos el diagrama de cuerpo libre de la parte izquierda, incluyendo las fuerzas y el momento internos P, V y M en sus direcciones definidas como positivas (Fig. b).



(b) Diagrama de cuerpo libre de la parte de la viga a la izquierda del plano por el punto C.

Aplicar las ecuaciones de equilibrio De las ecuaciones de equilibrio

$$\Sigma F_x = P_C = 0,$$

$$\Sigma F_y = \frac{1}{4}F - V_C = 0,$$

$$\Sigma M_{(\text{punto } C)} = M_C - \left(\frac{1}{4}L\right)\left(\frac{1}{4}F\right) = 0,$$

obtenemos $P_C = 0$, $V_C = \frac{1}{4}F$ y $M_C = \frac{1}{16}LF$.

COMENTARIO

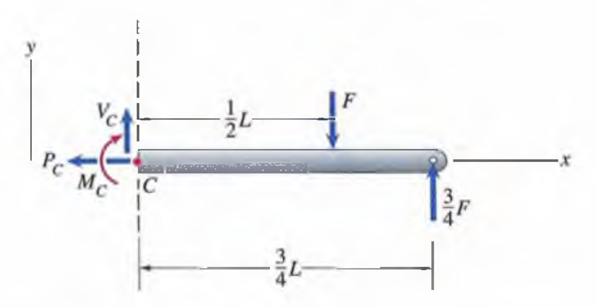
Los resultados se deben verificar con el diagrama de cuerpo libre de la otra parte de la viga (Fig. c). Las ecuaciones de equilibrio son

$$\Sigma F_x = -P_C = 0,$$

$$\Sigma F_y = V_C - F + \frac{3}{4}F = 0,$$

$$\Sigma M_{(\text{punto } C)} = -M_C - \left(\frac{1}{2}L\right)F + \left(\frac{3}{4}L\right)\left(\frac{3}{4}F\right) = 0,$$

confirmándose que $P_C = 0$, $V_C = \frac{1}{4}F$ y $M_C = \frac{1}{16}LF$.

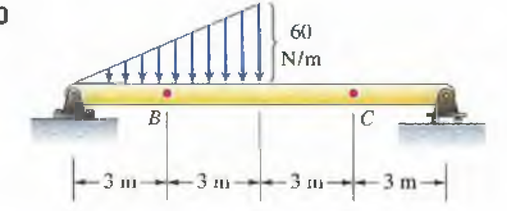


(c) Diagrama de cuerpo libre de la parte de la viga a la derecha del plano por el punto C.

Ejemplo 9.5

En la viga de la figura 9.10, determine las fuerzas y el momento internos (a) en B y (b) en C.

Figura 9.10



SOLUCIÓN

Determinar las fuerzas y los momentos internos Dibujamos el diagrama de cuerpo libre de la viga y representamos la carga distribuida con una fuerza equivalente en la figura (a). Las ecuaciones de equilibrio son

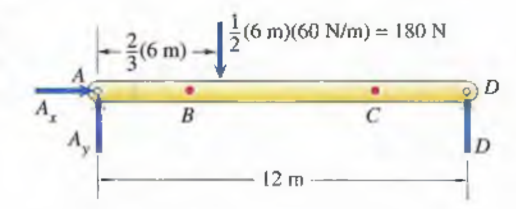
$$\Sigma F_x = A_x = 0,$$

$$\Sigma F_y = A_y + D - 180 = 0,$$

$$\Sigma M_{(\text{punto } A)} = 12D - (4)(180) = 0.$$

Resolviéndolas se obtiene: $A_x = 0$, $A_y = 120$ N y $D = 60$ N.

(a) Diagrama de cuerpo libre de toda la viga con la carga distribuida representada por una fuerza equivalente.



Dibujar el diagrama de cuerpo libre de parte de la viga Cortamos la viga en B y obtenemos el diagrama de cuerpo libre de la figura (b). Como B se halla en el punto medio de la carga triangular distribuida, el valor de la carga distribuida en B es de 30 N/m. Representando la carga distribuida con una carga equivalente de la figura (b), obtenemos el diagrama de cuerpo libre de la figura (c). De las ecuaciones de equilibrio

$$\Sigma F_x = P_B = 0,$$

$$\Sigma F_y = 120 - 45 - V_B = 0,$$

$$\Sigma M_{(\text{punto } B)} = M_B + (1)(45) - (3)(120) = 0,$$

obtenemos $P_B = 0$, $V_B = 75$ N y $M_B = 315$ N-m.

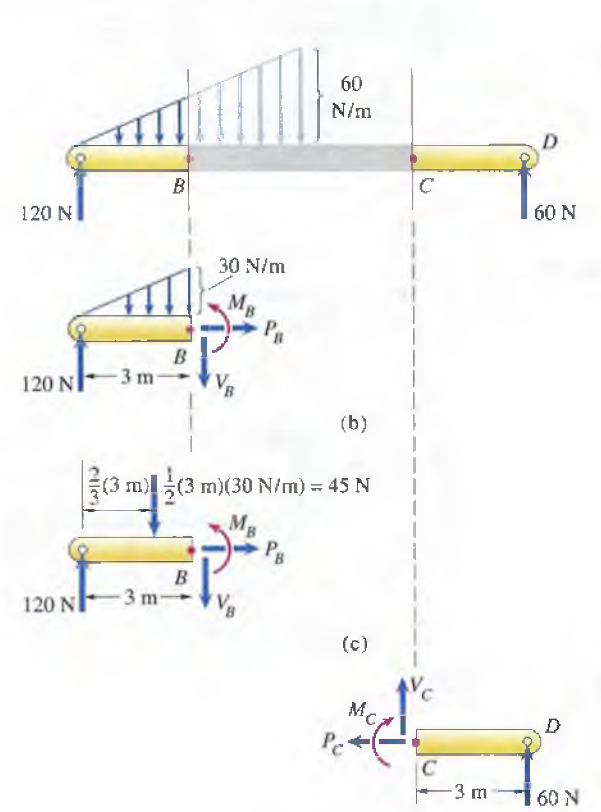
Para determinar las fuerzas y el momento internos en C, obtenemos el diagrama de cuerpo libre más sencillo aislando la parte de la viga a la derecha de C (Fig. d). De las ecuaciones de equilibrio

$$\Sigma F_x = -P_C = 0,$$

$$\Sigma F_y = V_C + 60 = 0,$$

$$\Sigma M_{(\text{punto } C)} = -M_C + (3)(60) = 0,$$

obtenemos $P_C = 0$, $V_C = -60$ N y $M_C = 180$ N-m.



(b), (c) Diagrama de cuerpo libre de la parte de la viga a la izquierda de B.

(d) Diagrama de cuerpo libre de la parte de la viga a la derecha de B.

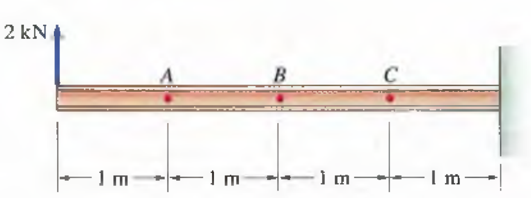
COMENTARIO

Si se intenta determinar las fuerzas y el momento internos en B cortando el diagrama de cuerpo libre de la figura (a) en B, *no* se obtendrán resultados correctos (puede confirmarse que el diagrama de cuerpo libre resultante de la parte de la viga a la izquierda de B da: $P_B = 0$, $V_B = 120$ N y $M_B = 360$ N-m). La razón es que no se está considerando en forma correcta el efecto de la carga distribuida en el diagrama de cuerpo libre. Se debe esperar hasta *después* de haber obtenido el diagrama de cuerpo libre de una parte de la viga, antes de representar las cargas distribuidas con fuerzas equivalentes.

Problemas

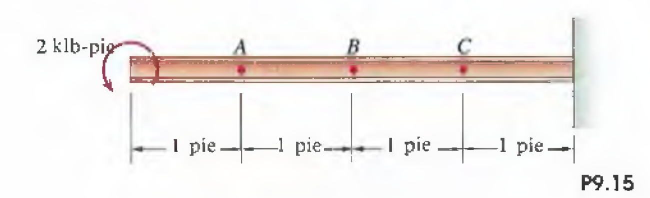
9.14 Calcule las fuerzas y el momento internos en A, B y C.

Estrategia: No necesita determinar las reacciones en el empotramiento. Corte la viga en el punto donde quiera determinar las fuerzas y el momento internos, y dibuje el diagrama de cuerpo libre de la parte de la viga a la izquierda del corte. (En los diagramas de cuerpo libre, P, V y M deben estar indicadas en sus direcciones definidas como positivas.)



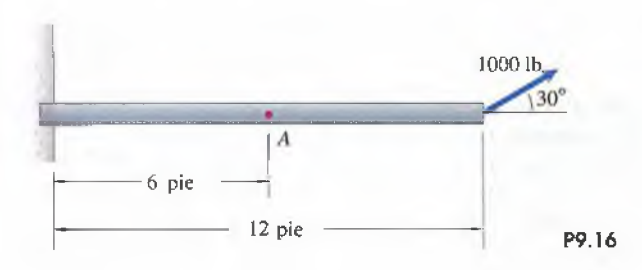
P9.14

9.15 Determine las fuerzas y el momento internos en A, B y C de la figura P9.15.



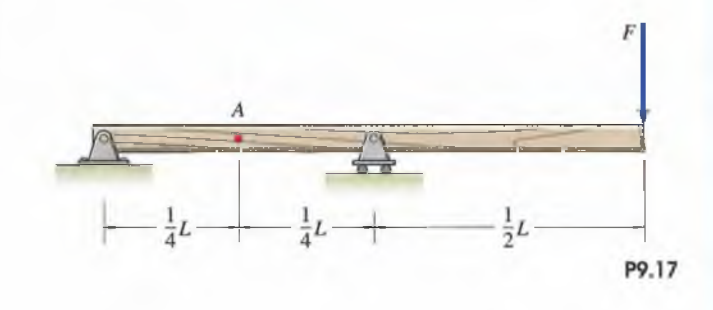
P9.15

9.16 Determine las fuerzas y el momento internos en A de la figura P9.16.



P9.16

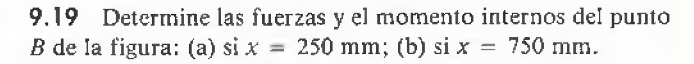
9.17 Determine las fuerzas y el momento internos en A de la figura P9.17.



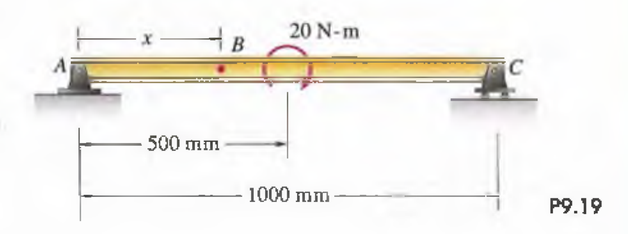
P9.17

9.18 Determine las fuerzas y el momento internos: (a) en B; (b) en C, de la figura P9.18.

P9.18

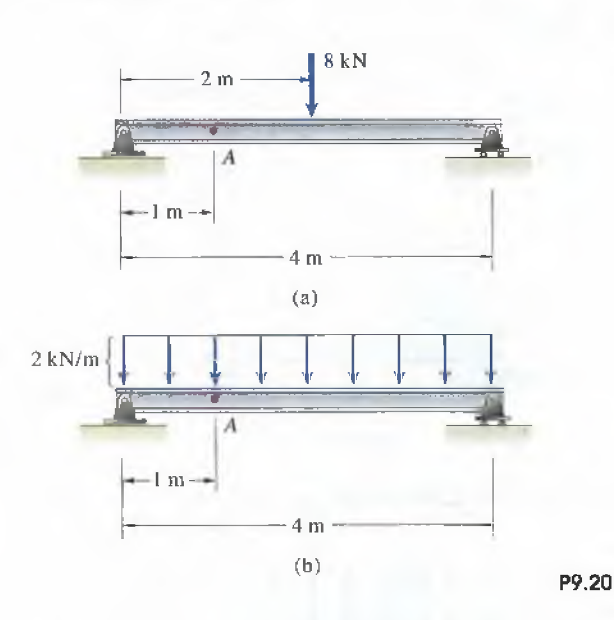


9.19 Determine las fuerzas y el momento internos del punto B de la figura: (a) si $x = 250$ mm; (b) si $x = 750$ mm.



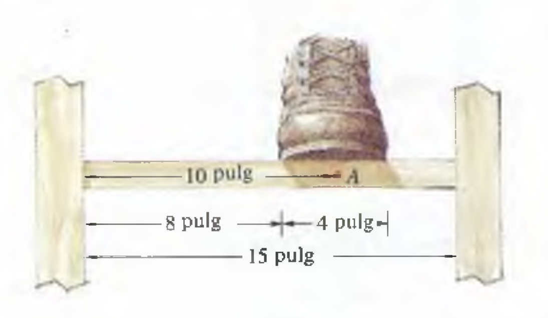
P9.19

9.20 Determine las fuerzas y el momento internos del punto A mostrado, para cada carga.



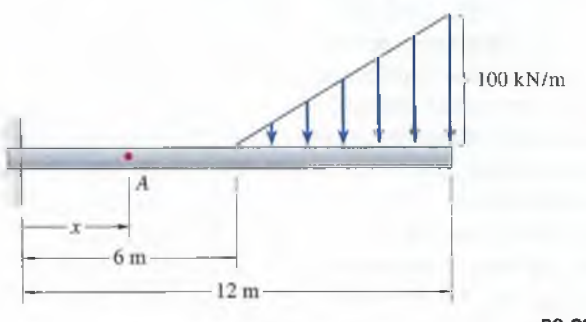
P9.20

9.21 Represente el travesaño de escalera como una viga simplemente apoyada (soporte de pasador), y suponga que la carga de 200 lb ejercida por la persona está uniformemente distribuida. Calcule las fuerzas y el momento internos en A.



P9.21

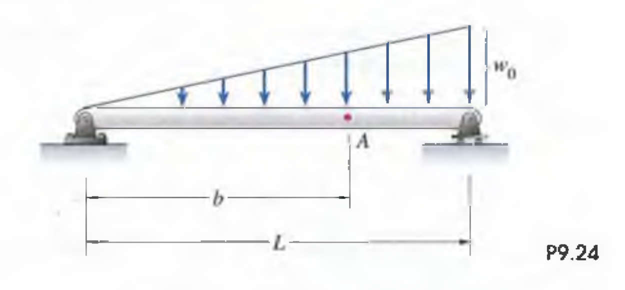
9.22 Si $x = 3$ m en la figura P9.22, ¿qué valor tienen las fuerzas y el momento internos en A?



P9.22

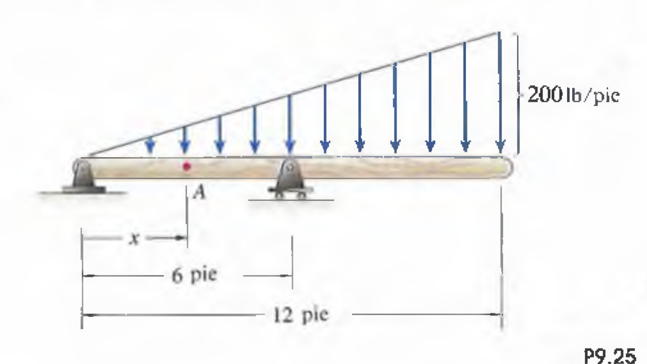
9.23 Si $x = 9$ m en el problema 9.22, ¿qué valor tienen las fuerzas y el momento internos en A?

9.24 Determine las fuerzas y el momento internos en el punto A de la figura P9.24.



P9.24

9.25 Si $x = 3$ pies en la figura P9.25, ¿qué valor tienen las fuerzas y el momento internos en A?



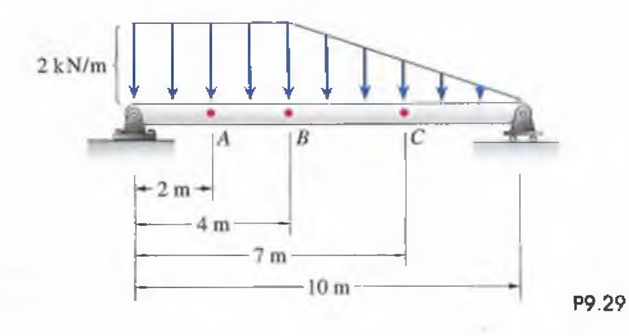
P9.25

9.26 Si $x = 9$ pies en el problema 9.25, ¿qué valor tienen las fuerzas y el momento internos en A?

9.27 Determine las fuerzas y el momento internos en el punto medio de la viga del problema 9.6.

9.28 Determine las fuerzas y el momento internos en el punto medio entre los puntos A y B de la viga del problema 9.7.

9.29 Determine las fuerzas y el momento internos en el punto A de la figura P9.29.



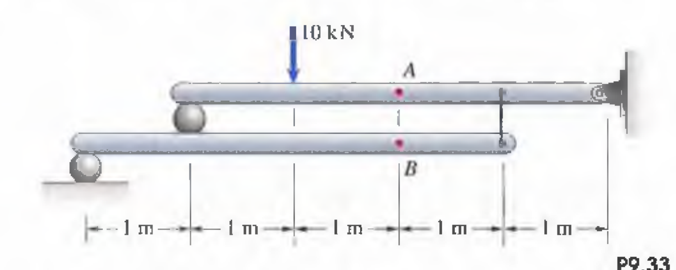
P9.29

9.30 Determine las fuerzas y el momento internos en el punto B de la viga del problema 9.29.

9.31 Determine las fuerzas y el momento internos en el punto C de la viga del problema 9.29.

9.32 Ignorando el peso del ala (P. 9.8), determine las fuerzas y el momento internos en el centro de masa del ala.

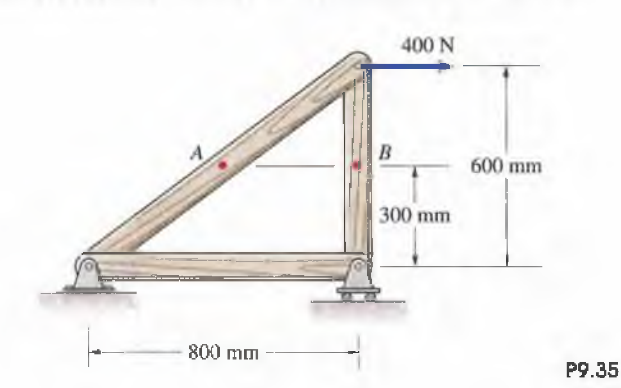
9.33 Halle las fuerzas y el momento internos en A.



P9.33

9.34 Determine las fuerzas y el momento internos en el punto B del problema 9.33.

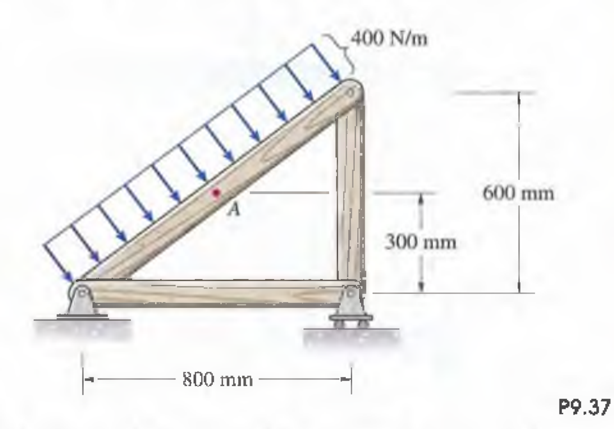
9.35 Calcule las fuerzas y el momento internos en A.



P9.35

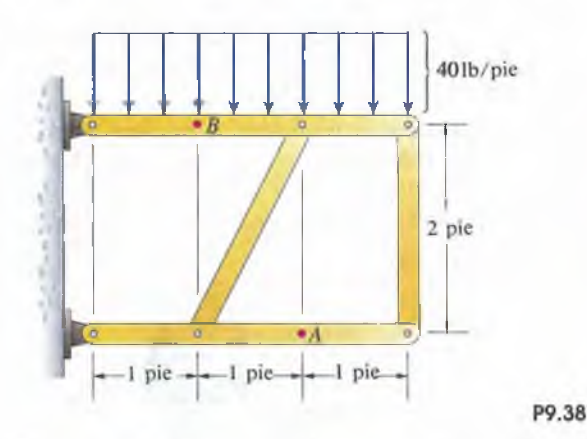
9.36 Determine las fuerzas y el momento internos en el punto B de la armadura del problema 9.35.

9.37 Calcule las fuerzas y el momento internos en A.



P9.37

9.38 Obtenga las fuerzas y el momento internos en A.



P9.38

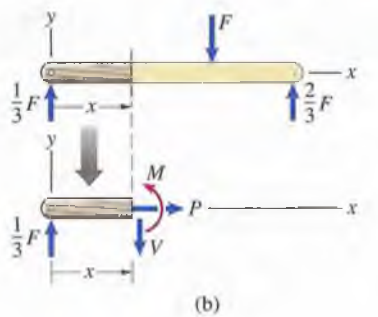
9.39 Determine las fuerzas y el momento internos en el punto B del bastidor del problema 9.38.

9.3 Diagramas de fuerza cortante y de momento flector

Para diseñar una viga debemos conocer las fuerzas y los momentos internos en ella. Son muy importantes los valores máximo y mínimo de la fuerza cortante y del momento flector, y las posiciones en que se presentan. Veremos cómo determinar los valores de P, V y M en función de x y presentaremos los diagramas de fuerza cortante y momento flector.

Sea una viga simplemente soportada y cargada con una fuerza (Fig. 9.11a). En vez de cortarla en una sección específica para hallar las fuerzas y el momento internos, la cortamos en una posición arbitraria x entre el extremo izquierdo y la carga F (Fig. 9.11b). Aplicando las ecuaciones de equilibrio a este diagrama de cuerpo libre, obtenemos

(a)



(c)

Figura 9.11

(a) Viga cargada con una fuerza F y su diagrama de cuerpo libre.
(b) Seccionamiento de la viga en una posición x arbitraria a la izquierda de F.
(c) Seccionamiento de la viga en una posición x arbitraria a la derecha de F.

$$\left.\begin{aligned} P &= 0 \\ V &= \frac{1}{3}F \\ M &= \frac{1}{3}Fx \end{aligned}\right\} \quad 0 < x < \frac{2}{3}L.$$

Para determinar las fuerzas y el momento internos para valores de x mayores que $\frac{2}{3}L$, obtenemos un diagrama de cuerpo libre cortando la viga en una posición arbitraria x entre la carga F y el extremo derecho de la viga (Fig. 9.11c). Los resultados son

$$\left.\begin{aligned} P &= 0 \\ V &= -\frac{2}{3}F \\ M &= \frac{2}{3}F(L-x) \end{aligned}\right\} \quad \frac{2}{3}L < x < L.$$

Los **diagramas de fuerza cortante y de momento flector** son simplemente las gráficas de V y M, respectivamente, en función de x (Fig. 9.12), y nos permiten ver los cambios en la fuerza cortante y en el momento flector a lo largo de la viga, así como sus valores máximo (menor cota de la fuerza o el momento) y mínimo (mayor cota inferior).

Se puede determinar las distribuciones de las fuerzas y del momento internos en una viga considerando un plano a una distancia arbitraria x del extremo y estableciendo P, V y M como funciones de x. Según la complejidad de la carga, deberán dibujarse varios diagramas de cuerpo libre para determinar las distribuciones sobre la longitud total.

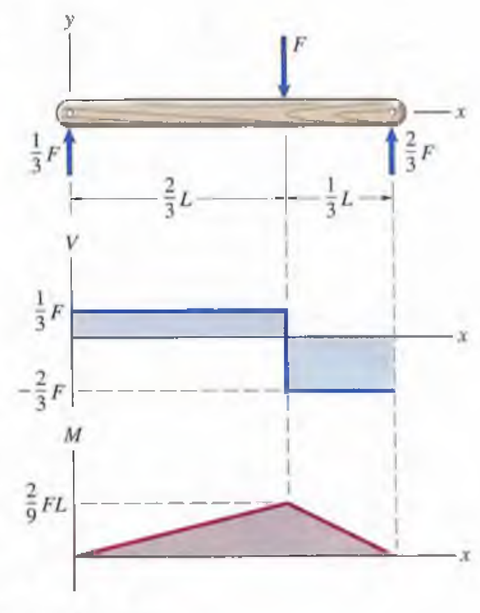


Figura 9.12

Los diagramas de fuerza cortante y de momento flector indican los valores máximo y mínimo de V y M.

El siguiente ejemplo muestra cómo obtener los diagramas de fuerza cortante y de momento flector en una viga. Una vez determinadas las reacciones externas sobre la viga, se corta ésta en una posición x arbitraria, se dibuja el diagrama de cuerpo libre de la parte de la viga en cualquier lado del corte (escoja la parte más sencilla), y determine las fuerzas y el momento internos. Quizá sea necesario repetir este proceso varias veces para obtener resultados válidos sobre la longitud total de la viga.

Ejemplo 9.6

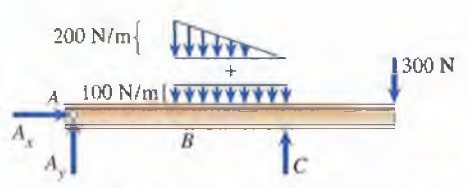


Figura 9.13

Para la viga de la figura 9.13: (a) dibuje los diagramas de fuerza cortante y de momento flector; (b) determine las posiciones y los valores máximo y mínimo de las fuerzas cortantes y los momentos flectores.

ESTRATEGIA

Para determinar las fuerzas y el momento internos como funciones de x para toda la viga, debemos usar tres diagramas de cuerpo libre: uno para el intervalo $0 < x < 6$ m, uno para $6 < x < 12$ m y otro para $12 < x < 18$ m.

SOLUCIÓN

(a) Comenzamos dibujando el diagrama de cuerpo libre de la viga, tratando la carga distribuida como la suma de cargas distribuidas uniforme y triangular (Fig. a). Luego representamos esas cargas distribuidas con fuerzas equivalentes (Fig. b). De las ecuaciones de equilibrio

$$\Sigma F_x = A_x = 0,$$

$$\Sigma F_y = A_y + C - 600 - 600 - 300 = 0,$$

$$\Sigma M_{(\text{punto } A)} = 12C - (8)(600) - (9)(600) - (18)(300) = 0,$$

obtenemos las reacciones $A_x = 0$, $A_y = 200$ N y $C = 1300$ N.

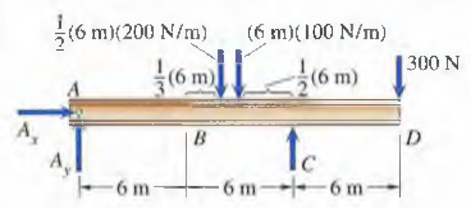
En la figura (c) dibujamos el diagrama de cuerpo libre para el intervalo $0 < x < 6$ m. De las ecuaciones de equilibrio

$$\Sigma F_x = P = 0, \qquad \Sigma F_y = 200 - V = 0,$$

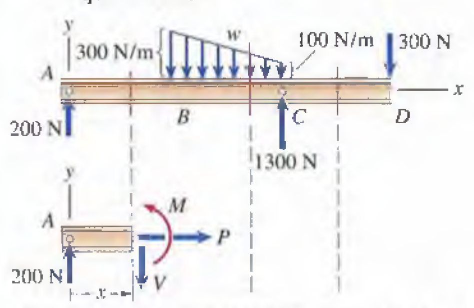
$$\Sigma M_{(\text{extremo derecho})} = M - 200x = 0,$$

obtenemos

$$\left.\begin{aligned} P &= 0 \\ V &= 200 \text{ N} \\ M &= 200x \text{ N-m} \end{aligned}\right\} \quad 0 < x < 6 \text{ m}.$$

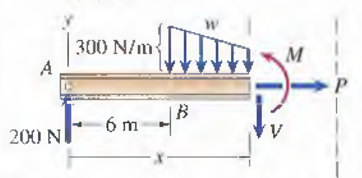


(a) Diagrama de cuerpo libre de la viga.

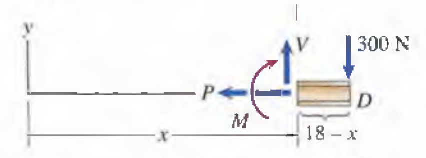


(b) Representación de las cargas distribuidas por medio de cargas equivalentes.

(c) Diagrama de cuerpo libre para $0 < x < 6$ m.



(d) Diagrama de cuerpo libre para $6 < x < 12$ m.



(e) Diagrama de cuerpo libre para $12 < x < 18$ m.

Dibujamos el diagrama de cuerpo libre (Fig. d) para el intervalo $6 < x < 12$ m. Para obtener las ecuaciones de equilibrio, determinamos w en función de x e integramos para hallar la fuerza y el momento ejercidos por la carga distribuida. Expresamos w en la forma $w = cx + d$, donde c y d son constantes. Usando las condiciones $w = 300$ N/m en $x = 6$ m y $w = 100$ N/m en $x = 12$ m, obtenemos la ecuación $w = -(100/3)x + 500$ N/m. La fuerza hacia abajo en el cuerpo libre de la figura (d) por la carga distribuida es

$$F = \int_L w\,dx = \int_6^x \left(-\frac{100}{3}x + 500\right) dx = -\frac{50}{3}x^2 + 500x - 2400 \text{ N}.$$

El momento horario respecto al origen (A) debido a la carga distribuida es

$$\int_L xw\,dx = \int_6^x \left(-\frac{100}{3}x^2 + 500x\right) dx = -\frac{100}{9}x^3 + 250x^2 - 6600 \text{ N-m}.$$

Las ecuaciones de equilibrio son

$$\Sigma F_x = P = 0,$$

$$\Sigma F_y = 200 - V + \frac{50}{3}x^2 - 500x + 2400 = 0,$$

$$\Sigma M_{(\text{punto } A)} = M - Vx + \frac{100}{9}x^3 - 250x^2 + 6600 = 0.$$

Resolviéndolas obtenemos

$$\left.\begin{aligned} P &= 0 \\ V &= \frac{50}{3}x^2 - 500x + 2600 \text{ N} \\ M &= \frac{50}{9}x^3 - 250x^2 + 2600x - 6600 \text{ N-m} \end{aligned}\right\} \; 6 < x < 12 \text{ m}.$$

Para el tramo $12 < x < 18$ m obtenemos un diagrama de cuerpo libre muy sencillo usando la parte de la viga a la derecha del corte (Fig. e). De las ecuaciones de equilibrio

$$\Sigma F_x = -P = 0,$$

$$\Sigma F_y = V - 300 = 0,$$

$$\Sigma M_{(\text{extremo izquierdo})} = -M - 300(18 - x) = 0,$$

obtenemos

$$\left.\begin{aligned} P &= 0 \\ V &= 300 \text{ N} \\ M &= 300x - 5400 \text{ N-m} \end{aligned}\right\} \; 12 < x < 18 \text{ m}.$$

En la figura 9.14 se muestran los diagramas de fuerza cortante y de momento flector obtenidos graficando las ecuaciones para V y M en los tres intervalos de x.

(b) Del diagrama de fuerza cortante, la fuerza cortante mínima es -1000 N en $x = 12$ m, y su valor máximo es de 300 N en el intervalo $12 < x < 18$ m. El momento flector mínimo es -1800 N-m en $x = 12$ m. El máximo está en el intervalo $6 < x < 12$ m, y ocurre cuando $dM/dx = 0$. Usando la ecuación para M en función de x en el intervalo $6 < x < 12$ m, obtenemos

$$\frac{dM}{dx} = \frac{150}{9}x^2 - 500x + 2600 = 0.$$

La raíz aplicable es $x = 6.69$ m. Sustituyendo este valor en la ecuación para M, determinamos que el valor máximo del momento flector es de 1268 N-m.

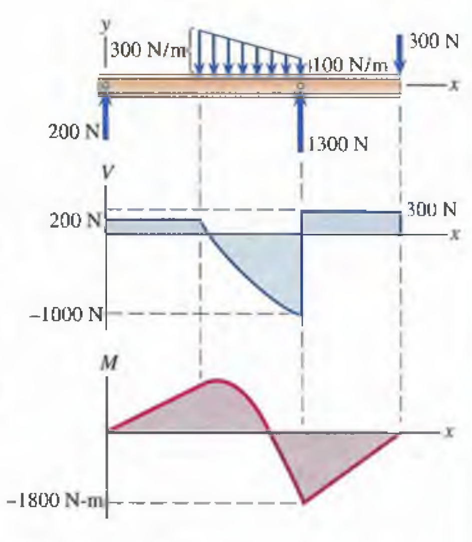


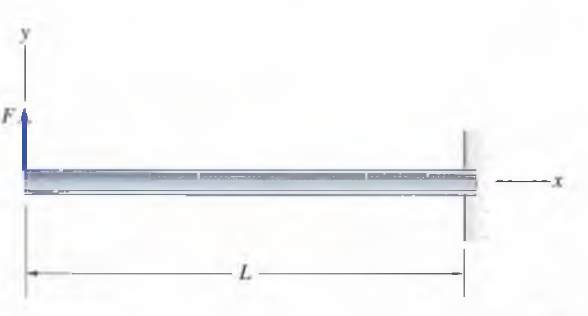
Figura 9.14

Diagramas de fuerza cortante y de momento flector.

Problemas

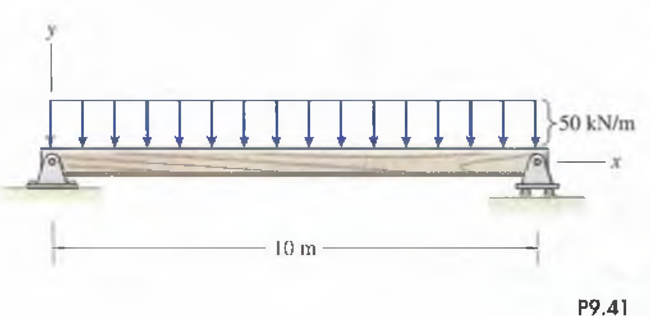
9.40 (a) Determine las fuerzas y el momento internos en función de x en la figura P9.40.
(b) Dibuje los diagramas de fuerza cortante y de momento flector.

Estrategia: No es necesario determinar las reacciones en el empotramiento. Corte la viga en una posición x arbitraria y dibuje el diagrama de cuerpo libre de la parte izquierda.



P9.40

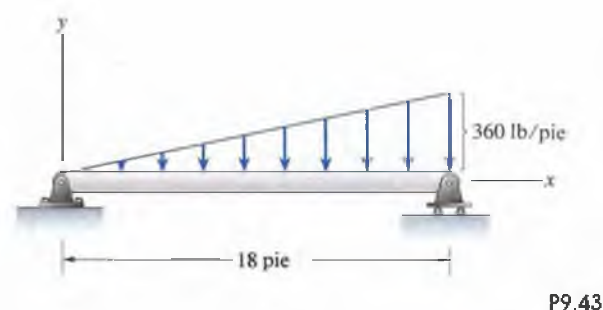
9.41 (a) Determine las fuerzas y el momento internos en función de x en la figura P9.41.
(b) Demuestre que las ecuaciones para V y M en función de x satisfacen la ecuación $V = dM/dx$.
(c) Dibuje los diagramas de fuerza cortante y de momento flector.



P9.41

9.42 La viga del problema 9.41 soporta con seguridad un momento flector de 1 MN-m (meganewton-metro) en cualquier sección transversal. Con base en este criterio, ¿cuál es el valor máximo seguro de la carga uniformemente distribuida?

9.43 (a) Determine el momento flector máximo en la viga y la posición x en que se presenta.
(b) Demuestre que las ecuaciones para V y M en función de x satisfacen la ecuación $V = dM/dx$.

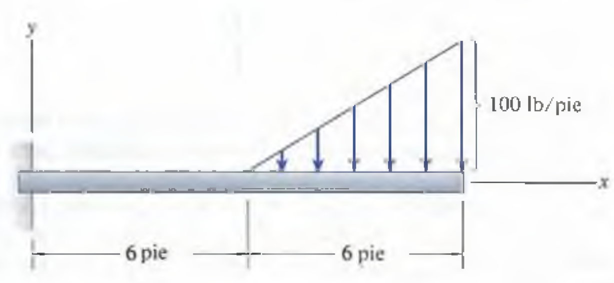


P9.43

9.44 Dibuje los diagramas de fuerza cortante y de momento flector para la viga del problema 9.43.

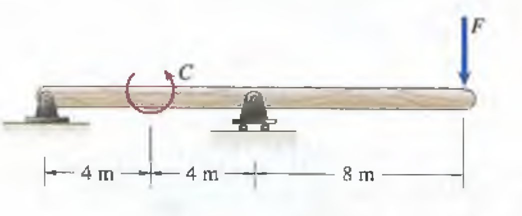
9.45 Determine las fuerzas y el momento internos en función de x para la viga del problema 9.4.

9.46 (a) Determine las fuerzas y el momento internos en función de x en la figura P9.46.
(b) Dibuje los diagramas de fuerza cortante y de momento flector.



P9.46

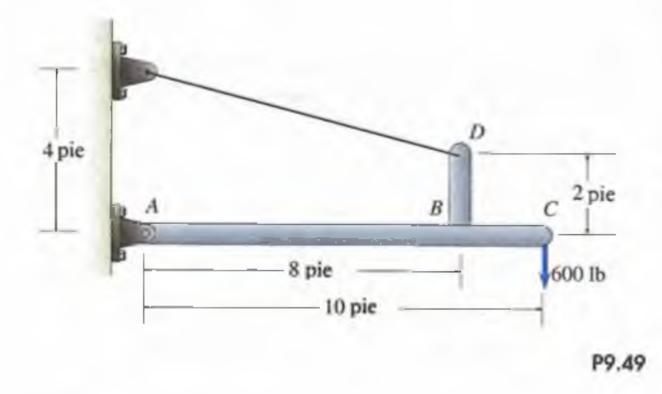
9.47 Se tienen las cargas $F = 200$ N y $C = 800$ N-m.
(a) Determine fuerzas y momentos internos en función de x.
(b) Dibuje diagramas de fuerza cortante y momento flector.



P9.47

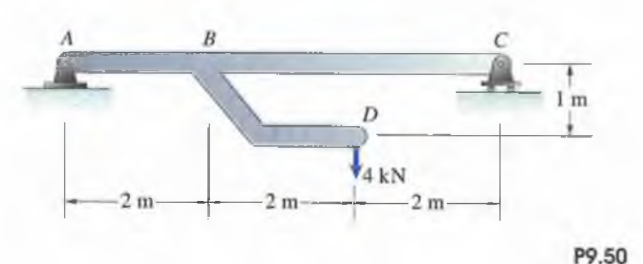
9.48 La viga del problema 9.47 soporta con seguridad fuerzas cortantes y momentos flectores de 2 kN y de 6.5 kN-m respectivamente. Con base en este criterio, ¿puede quedar sometida con seguridad a las cargas $F = 1$ kN y $C = 1.6$ kN-m?

9.49 Dibuje los diagramas de fuerza cortante y de momento flector para la viga ABC mostrada.



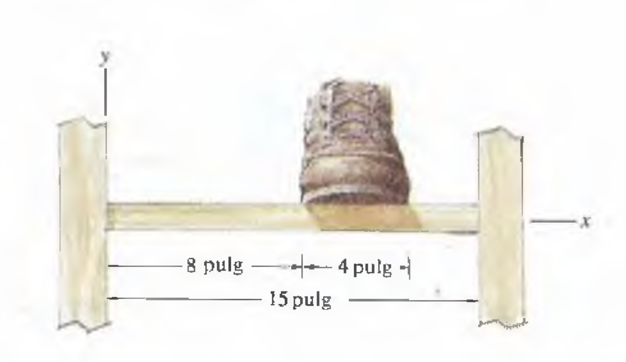
P9.49

9.50 Represente los diagramas de fuerza cortante y de momento flector para la viga ABC.



P9.50

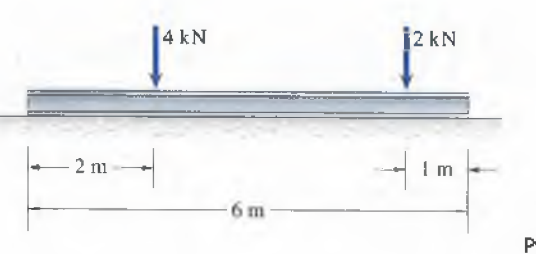
9.51 Represente el travesaño de la escalera como una viga simplemente apoyada (soporte de pasador), y suponga que la carga de 200 lb ejercida por el zapato de la persona está uniformemente distribuida. Dibuje los diagramas de fuerza cortante y de momento flector.



P9.51

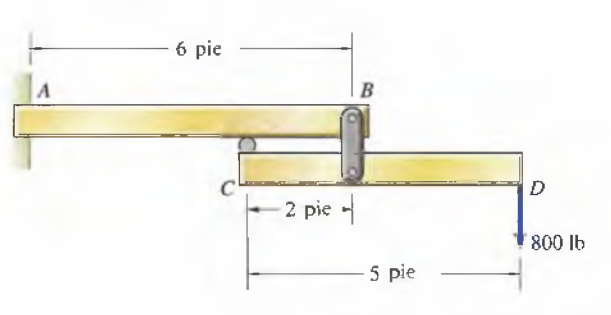
9.52 ¿Qué valor tiene el máximo momento flector en el travesaño de la escalera del problema 9.51 y dónde ocurre?

9.53 Suponga que la superficie sobre la que descansa la viga mostrada ejerce una carga uniformemente distribuida sobre ella. Dibuje sus diagramas de fuerza cortante y de momento flector.



P9.53

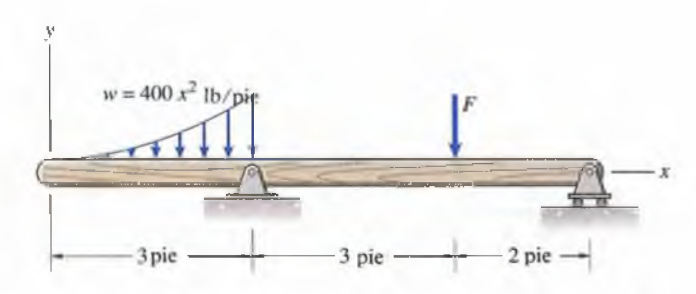
9.54 Las vigas homogéneas AB y CD mostradas pesan 600 lb y 500 lb respectivamente. Dibuje los diagramas de fuerza cortante y de momento flector para la viga CD.



P9.54

9.55 Dibuje los diagramas de fuerza cortante y de momento flector para la viga AB del problema 9.54.

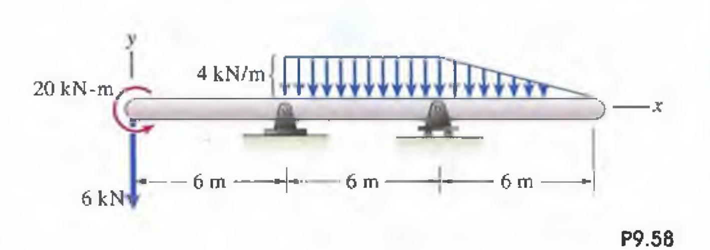
9.56 Dibuje los diagramas de fuerza cortante y de momento flector de la figura mostrada. $F = 4650$ lb.



P9.56

9.57 Si en el problema 9.56 la carga $F = 2150$ lb, ¿cuáles son los valores máximo y mínimo de la fuerza cortante y del momento flector y en qué posiciones x se presentan?

9.58 Dibuje los diagramas de fuerza cortante y de momento flector de la figura P9.58.



P9.58

9.59 En el problema 9.58, ¿cuáles son los valores máximo y mínimo de la fuerza cortante y del momento flector y en qué posiciones x se presentan?

9.60 Ignorando el peso del ala del avión del problema 9.8, dibuje su diagrama de fuerza cortante.

9.4 Relaciones entre carga distribuida, fuerza cortante y momento flector

La fuerza cortante y el momento flector en una viga sometida a una carga distribuida se rigen por ecuaciones diferenciales simples. Deduciremos esas ecuaciones y mostraremos que son una manera interesante e instructiva de obtener los diagramas de fuerza cortante y de momento flector, y que también son útiles para determinar deflexiones en vigas.

Supongamos que una porción de una viga está sometida a una carga distribuida w (Fig. 9.15a). En la figura 9.15(b) obtenemos un diagrama de cuerpo libre cortando la viga en x y en $x + \Delta x$. Los términos ΔP, ΔV y ΔM son los cambios en la fuerza axial, en la fuerza cortante y en el momento flector, respectivamente, de x a $x + \Delta x$. De este diagrama de cuerpo libre obtenemos las ecuaciones de equilibrio

$$\Sigma F_x = P + \Delta P - P = 0,$$

$$\Sigma F_y = V - V - \Delta V - w\Delta x - O(\Delta x^2) = 0,$$

$$\Sigma M_{(\text{punto } Q)} = M + \Delta M - M - (V + \Delta V)\Delta x - wO(\Delta x^2) = 0,$$

donde la notación $O(\Delta x^2)$ significa un término de orden Δx^2. Dividiendo esas ecuaciones entre Δx y tomando el límite cuando $\Delta x \to 0$, obtenemos

$$\frac{dP}{dx} = 0, \quad (9.6)$$

$$\frac{dV}{dx} = -w, \quad (9.7)$$

$$\frac{dM}{dx} = V. \quad (9.8)$$

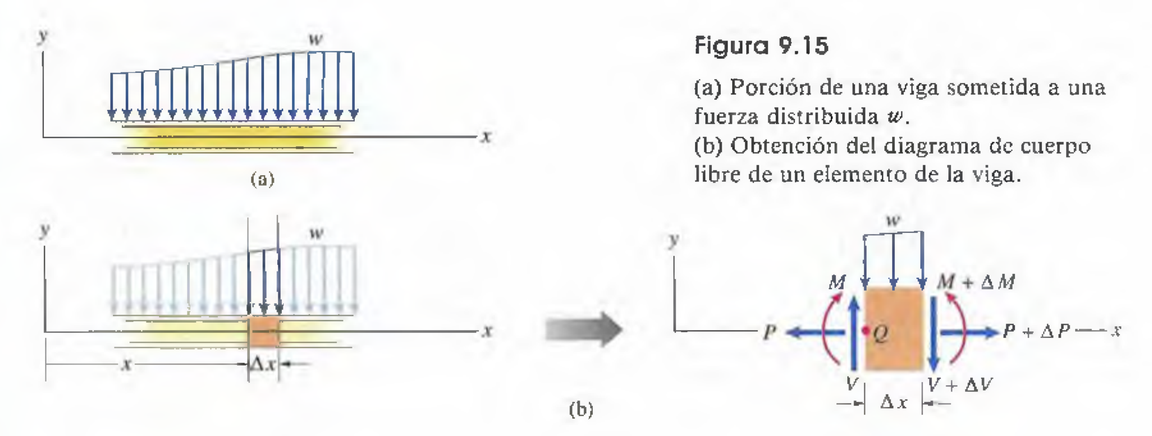


Figura 9.15

(a) Porción de una viga sometida a una fuerza distribuida w.
(b) Obtención del diagrama de cuerpo libre de un elemento de la viga.

La ecuación (9.6) establece que la fuerza axial no depende de x en la parte que sólo está sometida a una carga lateral distribuida. Pero se puede integrar la ecuación (9.7) para determinar V en función de x si se conoce w, y luego integrar la (9.8) para determinar M en función de x.

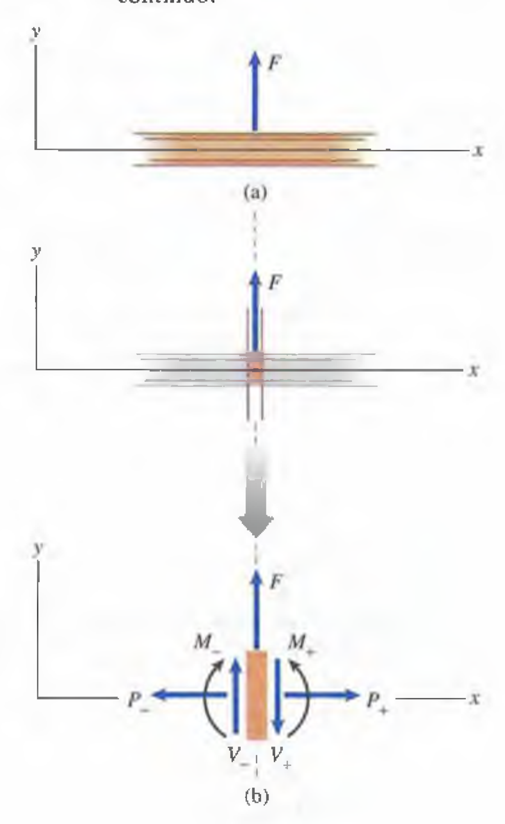
Dedujimos las ecuaciones (9.7) y (9.8) para una porción de viga sometida sólo a una carga distribuida. Al usar esas ecuaciones para determinar diagramas de fuerza cortante y de momento flector, deben tomarse en cuenta los efectos de fuerzas concentradas y pares. Veamos qué sucede a dichos diagramas cuando una viga se somete a una fuerza F que actúa en la dirección y positiva (Fig. 9.16a). Cortando la viga justamente a la izquierda y a la derecha de F, obtenemos el diagrama de cuerpo libre (Fig. 9.16b), donde los subíndices (−) y (+) denotan valores a la izquierda y a la derecha de F. Por equilibrio se requiere que

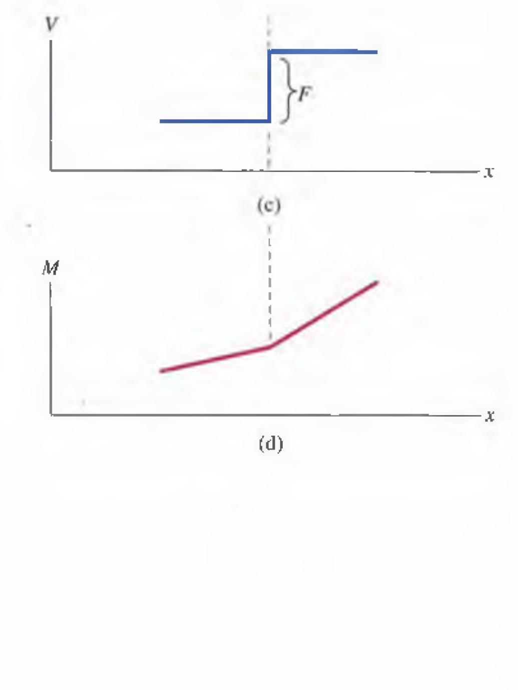
$$V_+ - V_- = F, \tag{9.9}$$

$$M_+ - M_- = 0. \tag{9.10}$$

El diagrama de fuerza cortante presenta una discontinuidad (un salto) de magnitud F (Fig. 9.16c), pero el diagrama de momento flector es continuo (Fig. 9.16d). El salto en la fuerza cortante es positivo si la fuerza actúa en la dirección y positiva.

Figura 9.16
(a) Porción de una viga sometida a una fuerza F en la dirección y positiva.
(b) Obtención de un diagrama de cuerpo libre cortando la viga a la izquierda y a la derecha de F.
(c) El diagrama de fuerza cortante sufre un salto positivo de magnitud F.
(d) El diagrama de momento flector es continuo.





Veamos ahora qué pasa en los diagramas de fuerza cortante y de momento flector cuando una viga está sometida a un par antihorario C (Fig. 9.17a). Cortando la viga justamente a la izquierda y a la derecha del par (Fig. 9.17b), determinamos que

$$V_+ - V_- = 0, \tag{9.11}$$

$$M_+ - M_- = -C. \tag{9.12}$$

El diagrama de fuerza cortante es continuo (Fig. 9.17c), pero el diagrama de momento flector presenta una discontinuidad (salto) de magnitud C (Fig. 9.17d) en el lugar en que la viga está sometida al par. El salto en el momento flector es *negativo* si el par actúa en dirección antihoraria.

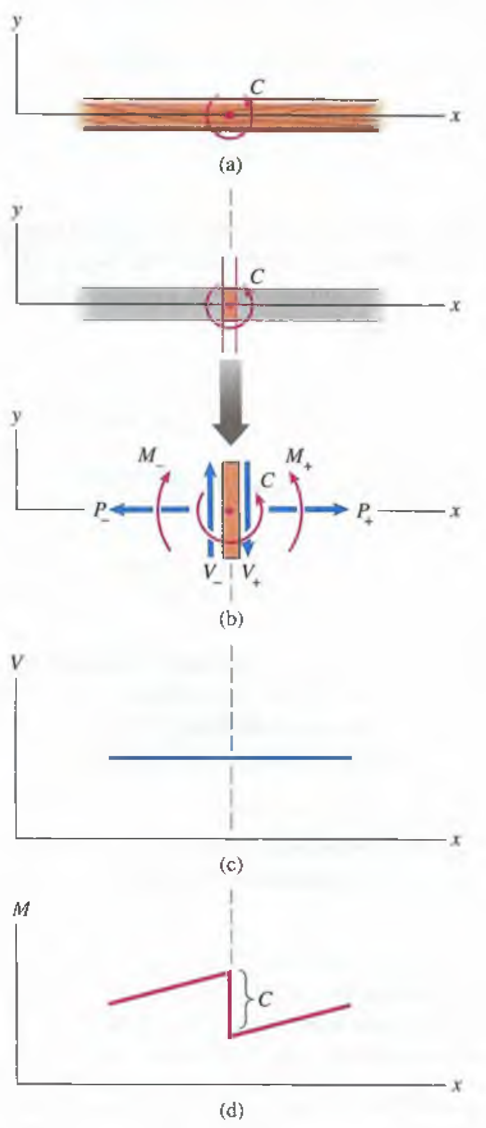


Figura 9.17

(a) Porción de una viga sometida a un par antihorario C.
(b) Obtención de un diagrama de cuerpo libre cortando la viga a la izquierda y a la derecha de C.
(c) El diagrama de fuerza cortante es continuo.
(d) El diagrama de momento flector sufre un salto *negativo* de magnitud C.

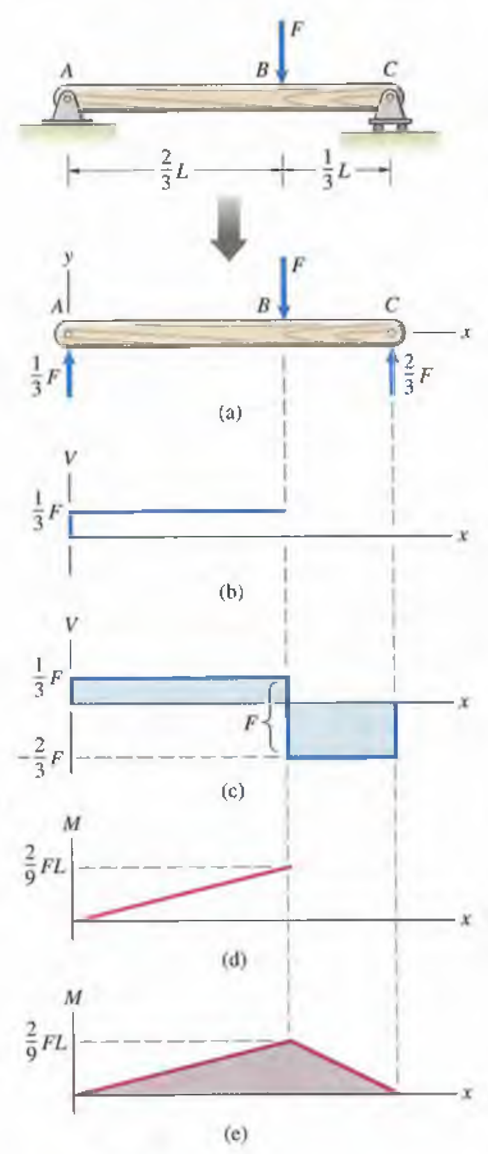


Figura 9.18

(a) Viga cargada con una fuerza F.
(b) Diagrama de fuerza cortante entre A y B.
(c) Diagrama de fuerza cortante completo.
(d) Diagrama de momento flector entre A y B.
(e) Diagrama de momento flector completo.

Ilustramos la aplicación de esto con la viga simplemente soportada de la figura 9.18(a). Para determinar su diagrama de fuerza cortante comenzamos en $x = 0$, donde la reacción hacia arriba en A genera un valor positivo de V de magnitud $(1/3)F$. Como no hay carga entre A y B, la ecuación (9.7) establece que $dV/dx = 0$. La fuerza cortante es constante entre A y B (Fig. 9.18b). En B, la fuerza F hacia abajo genera un salto negativo en V de magnitud F. No hay carga entre B y C, por lo que la fuerza cortante es constante en ese intervalo (Fig. 9.18c).

Ahora que hemos terminado el diagrama de fuerza cortante, comenzamos de nuevo en $x = 0$ para determinar el diagrama de momento flector. No hay par en $x = 0$, por lo que el momento flector es nulo en ese punto. Entre A y B, $V = \frac{1}{3}F$. Integrando la ecuación (9.8) de $x = 0$ a un valor arbitrario de x entre A y B,

$$\int_0^M dM = \int_0^x V\,dx = \int_0^x \frac{1}{3}F\,dx,$$

determinamos M en función de x entre A y B:

$$M = \frac{1}{3}Fx, \qquad 0 < x < \frac{2}{3}L.$$

El diagrama de momento flector de A a B se muestra en la figura 9.18(d). El valor del momento flector en B es $M_B = \frac{2}{9}FL$.

Entre B y C, $V = -\frac{2}{3}F$. Integrando la ecuación (9.8) de $x = \frac{2}{3}L$ a un valor arbitrario de x entre B y C,

$$\int_{M_B}^M dM = \int_{(2/3)L}^x V\,dx = \int_{(2/3)L}^x -\frac{2}{3}F\,dx,$$

obtenemos M en función de x entre B y C:

$$M = M_B - \frac{2}{3}F\left(x - \frac{2}{3}L\right) = \frac{2}{3}F(L - x), \qquad \frac{2}{3}L < x < L.$$

En la figura 9.18(c) se muestra el diagrama de momento flector completo. Compare los diagramas de fuerza cortante y de momento flector de las figuras 9.18(c) y (e) con los de la figura 9.12, que obtuvimos cortando la viga y resolviendo las ecuaciones de equilibrio.

Los ejemplos siguientes muestran cómo se utilizan las ecuaciones (9.7)-(9.12) para determinar los diagramas de fuerza cortante y de momento flector en vigas.

1. Diagrama de fuerza cortante. *Para segmentos de la viga que están descargados o sometidos a una carga distribuida, se puede integrar la ecuación (9.7) para determinar V en función de x. Además, se debe usar la ecuación (9.9) para determinar los efectos de fuerzas en V.*

2. Diagrama de momento flector. *Una vez que se ha determinado V en función de x, integre la ecuación (9.8) para determinar M en función de x. Use la ecuación (9.12) para determinar los efectos de pares en M.*

Ejemplo 9.7

Haga diagramas de fuerza cortante y momento flector para esta viga.

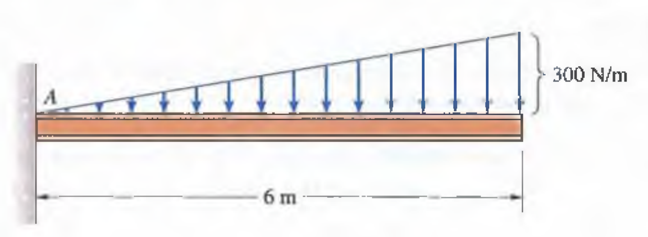
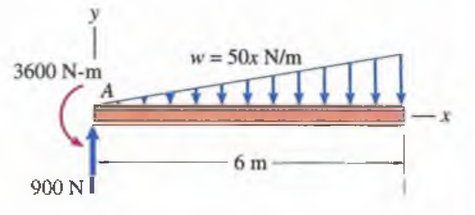


Figura 9.19

SOLUCIÓN

Primero debemos determinar las reacciones en A. Los resultados se muestran en el diagrama de cuerpo libre de la viga de la figura (a). La ecuación para la carga distribuida en función de x es $w = (x/6)300 = 50x$ N/m.



(a) Diagrama de cuerpo libre de la viga.

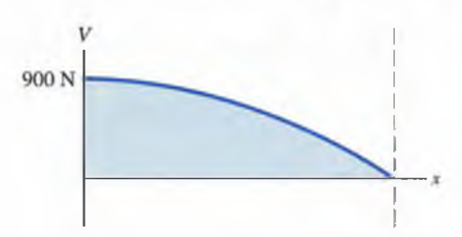
Diagrama de fuerza cortante La fuerza hacia arriba en A origina un valor positivo de V de 900 N. Integrando la ecuación (9.7) de $x = 0$ a un valor arbitrario de x,

$$\int_{V_A}^{V} dV = \int_0^x -w\,dx = \int_0^x -50x\,dx,$$

obtenemos V como función de x:

$$V = V_A - 25x^2 = 900 - 25x^2.$$

El diagrama de fuerza cortante se muestra en la figura (b).



(b) Diagrama de fuerza cortante.

Diagrama de momento flector El par antihorario en A genera un valor *negativo* de M de magnitud 3600 N-m, por lo que $M_A = -3600$ N-m. Integrando la ecuación (9.8) de $x = 0$ a un valor arbitrario de x,

$$\int_{M_A}^{M} dM = \int_0^x V\,dx = \int_0^x (900 - 25x^2)\,dx,$$

obtenemos

$$M = M_A + 900x - \frac{25}{3}x^3 = -3600 + 900x - \frac{25}{3}x^3.$$

El diagrama de momento flector se muestra en la figura (c).



(c) Diagrama de momento flector.

Ejemplo 9.8

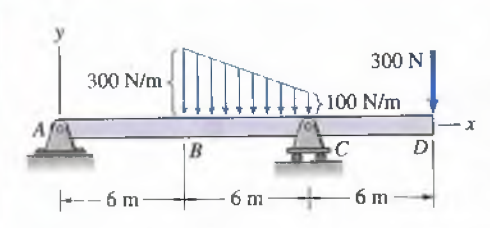


Figura 9.20

Obtenga diagramas de fuerza cortante y momento flector para esta viga.

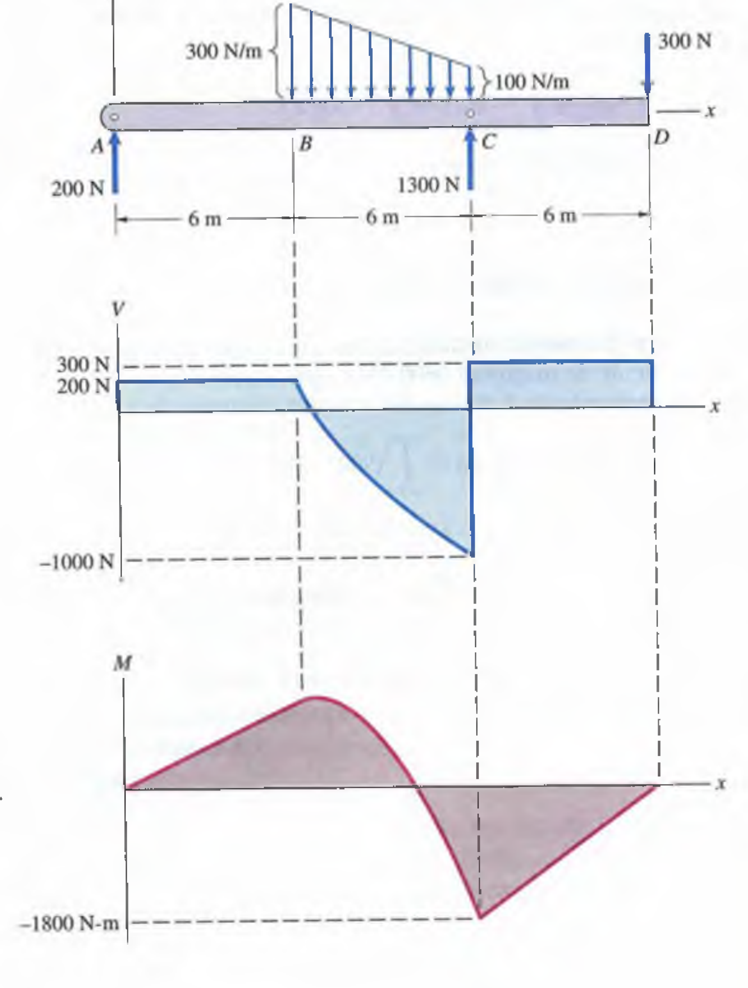
SOLUCIÓN

La determinación de las reacciones en los soportes para esta viga y esta carga se efectuó ya en el ejemplo 9.6. Los resultados se muestran en la figura (a).

Diagrama de fuerza cortante *De A a B*. No hay carga entre A y B, por lo que la fuerza cortante de 200 N se mantiene constante entre A y B:

$$V = 200 \text{ N}, \qquad 0 < x < 6 \text{ m}.$$

De B a C. Podemos expresar la carga distribuida w entre B y C en la forma $w = cx + d$, donde c y d son constantes. Usando las condiciones $w = 300$



(a) Diagrama de cuerpo libre de la viga.

(b) Diagrama de fuerza cortante.

(c) Diagrama de momento flector.

N/m en $x = 6$ m y $w = 100$ N/m en $x = 12$ m, obtenemos la ecuación $w = -(100/3)x + 500$ N/m. Integrando la ecuación (9.7) a partir de $x = 6$ m a un valor arbitrario de x entre B y C,

$$\int_{V_B}^{V} dV = \int_{6}^{x} -w\,dx = \int_{6}^{x} \left(\frac{100}{3}x - 500\right) dx,$$

obtenemos una ecuación para V entre B y C:

$$V = \frac{50}{3}x^2 - 500x + 2600 \text{ N}, \qquad 6 < x < 12 \text{ m}.$$

En $x = 12$ m, $V = -1000$ N.

De C a D. En C, V sufre un salto positivo de 1300 N de magnitud, por lo que su valor resulta $-1000 + 1300 = 300$ N. No hay carga entre C y D, por lo que V permanece constante de C a D:

$$V = 300 \text{ N}, \qquad 12 < x < 18 \text{ m}.$$

El diagrama de fuerza cortante se muestra en la figura (b).

Diagrama de momento flector *De A a B*. No hay par en $x = 0$, por lo que el momento flector ahí es nulo. Integrando la ecuación (9.8) de $x = 0$ a un valor arbitrario de x entre A y B,

$$\int_{0}^{M} dM = \int_{0}^{x} V\,dx = \int_{0}^{x} 200\,dx,$$

obtenemos

$$M = 200x \text{ N-m}, \qquad 0 < x < 6 \text{ m}.$$

En $x = 6$ m, $M = 1200$ N-m.

De B a C. Integrando de $x = 6$ m a un valor arbitrario de x entre B y C,

$$\int_{M_B}^{M} dM = \int_{6}^{x} V\,dx = \int_{6}^{x} \left(\frac{50}{3}x^2 - 500x + 2600\right) dx,$$

obtenemos

$$M = \frac{50}{9}x^3 - 250x^2 + 2600x - 6600 \text{ N-m}, \qquad 6 < x < 12 \text{ m}.$$

En $x = 12$ m, $M = -1800$ N-m.

De C a D. Integrando de $x = 12$ m a un valor arbitrario de x entre C y D,

$$\int_{M_C}^{M} dM = \int_{12}^{x} V\,dx = \int_{12}^{x} 300\,dx,$$

obtenemos

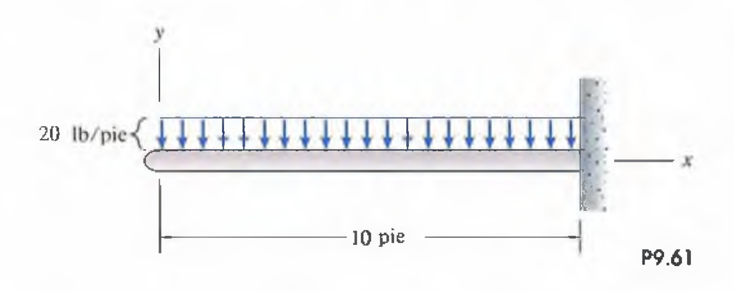
$$M = 300x - 5400 \text{ N-m}, \qquad 12 < x < 18 \text{ m}.$$

El diagrama de momento flector se muestra en la figura (c).

Problemas

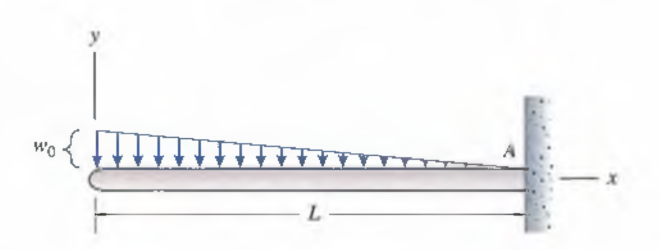
Los siguientes problemas deben resolverse utilizando las ecuaciones (9.7)-(9.12).

9.61 Determine V y M en función de x en la figura P9.61.



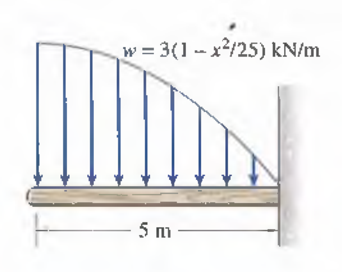
P9.61

9.62 (a) Determine V y M en función de x en la figura P9.62.
(b) Establezca las ecuaciones de equilibrio para determinar las reacciones en el empotramiento, y utilice los resultados de la parte (a) para verificar sus respuestas.



P9.62

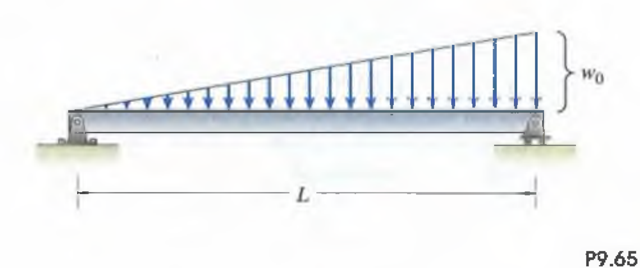
9.63 En la figura P9.63 determine V y M en función de x.



P9.63

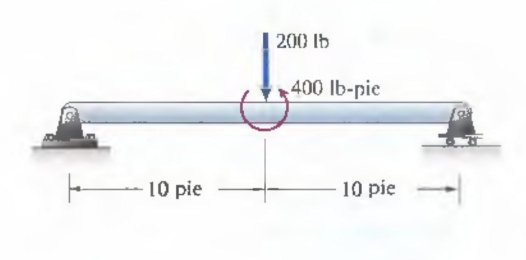
9.64 Determine V y M en función de x para la viga del problema 9.41.

9.65 En la figura P9.65 determine V y M en función de x.



P9.65

9.66 Dibuje los diagramas de fuerza cortante y de momento flector de la figura P9.66.



P9.66

9.67 Dibuje los diagramas de fuerza cortante y de momento flector para la viga del problema 9.47.

9.68 Dibuje los diagramas de fuerza cortante y de momento flector para la viga del problema 9.56.

9.69 Dibuje los diagramas de fuerza cortante y de momento flector para la viga del problema 9.58.

9.5 Cargas distribuidas en cables

Por su combinación única de resistencia, poco peso y flexibilidad, las cuerdas y cables se utilizan a menudo para soportar cargas y transmitir fuerzas en estructuras, máquinas y vehículos. Los grandes puentes colgantes están soportados por enormes cables de acero. Los ingenieros utilizan cables para crear estructuras estéticas con espacios interiores abiertos (Fig. 9.21). Aquí analizaremos cables sometidos a cargas uniformemente distribuidas en una línea horizontal y a lo largo de los cables.



Figura 9.21

El uso de cables para suspender el techo de este estadio deportivo permite a los espectadores una visión no obstruida por columnas.

Cargas uniformemente distribuidas a lo largo de una línea horizontal

El cable principal de un puente colgante es un ejemplo de cable sometido a una carga distribuida en una línea horizontal (Fig. 9.22). El peso del puente está (en forma aproximada) uniformemente distribuido en la horizontal. La carga transmitida al cable principal por los cables verticales se puede representar como una carga distribuida. Aquí veremos la forma y la variación de la tensión en un cable como éste.

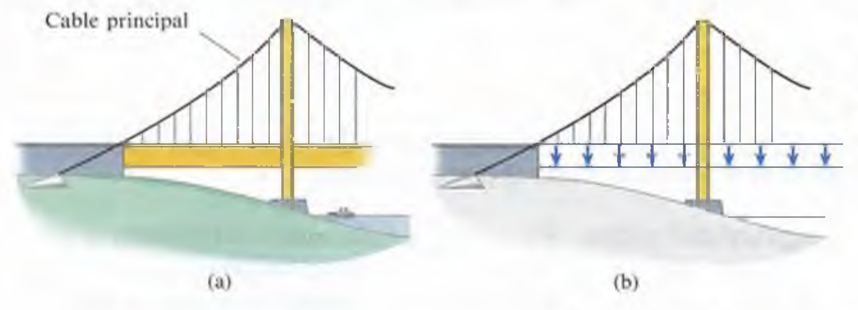


Figura 9.22

(a) Sobre el cable principal de un puente colgante,
(b) la carga está distribuida horizontalmente.

Consideremos un cable suspendido sometido a una carga uniformemente distribuida a lo largo de una línea horizontal (Fig. 9.23a). Ignoramos el peso del cable. El origen del sistema coordenado está en el punto más bajo del cable. Sea $y(x)$ la curva descrita por el cable en el plano x-y. Nuestro objetivo es determinar la curva $y(x)$ y la tensión en el cable.

Forma del cable Obtenemos un diagrama de cuerpo libre cortando el cable en su punto más bajo y en una posición arbitraria x (Fig. 9.23b). El término T_0 es la tensión en el punto más bajo del cable, y T es la tensión en x. La fuerza hacia abajo ejercida por la carga distribuida es wx. De este diagrama obtenemos las ecuaciones de equilibrio

$$T\cos\theta = T_0,$$
$$T\,\mathrm{sen}\,\theta = wx. \qquad (9.13)$$

Eliminamos la tensión T dividiendo la segunda ecuación entre la primera, para obtener

$$\tan\theta = \frac{w}{T_0}x = ax,$$

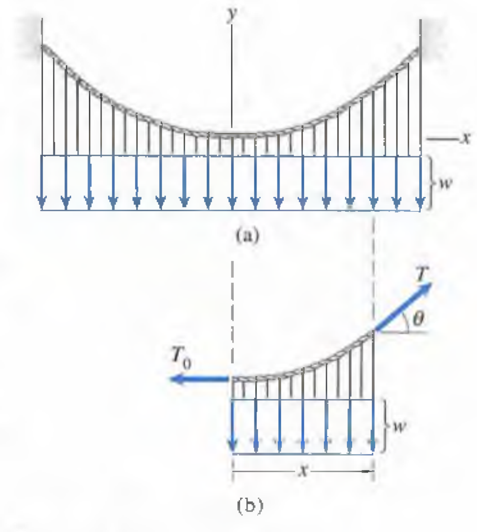


Figura 9.23

(a) Cable sometido a una carga uniformemente distribuida a lo largo de una línea horizontal.
(b) Diagrama de cuerpo libre del cable entre $x = 0$ y una posición x arbitraria.

donde definimos la constante $a = w/T_0$. La pendiente del cable en x es $dy/dx = \tan\theta$, por lo que obtenemos una ecuación diferencial que define la curva descrita por el cable:

$$\frac{dy}{dx} = ax. \tag{9.14}$$

Hemos escogido el sistema coordenado de manera que $y = 0$ en $x = 0$. Integrando la ecuación (9.14),

$$\int_0^y dy = \int_0^x ax\,dx,$$

encontramos que la curva descrita por el cable es la parábola

$$\boxed{y = \frac{1}{2}ax^2.} \tag{9.15}$$

Tensión en el cable Para determinar la distribución de la tensión, elevamos al cuadrado ambos lados de las ecuaciones (9.13) y las sumamos

$$\boxed{T = T_0\sqrt{1 + a^2x^2}.} \tag{9.16}$$

La tensión es mínima en el punto más bajo del cable y crece monotónicamente con su distancia al punto más bajo.

Longitud del cable En algunas aplicaciones es útil tener una expresión para la longitud del cable en función de x. Podemos escribir la relación $ds^2 = dx^2 + dy^2$, donde ds es un elemento de longitud del cable (Fig. 9.24), en la forma

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx.$$

Sustituyendo la ecuación (9.14) en esta expresión e integrando, obtenemos una ecuación para la longitud del cable en el intervalo horizontal de 0 a x:

$$\boxed{s = \frac{1}{2}\left\{x\sqrt{1 + a^2x^2} + \frac{1}{a}\ln\left[ax + \sqrt{1 + a^2x^2}\right]\right\}.} \tag{9.17}$$

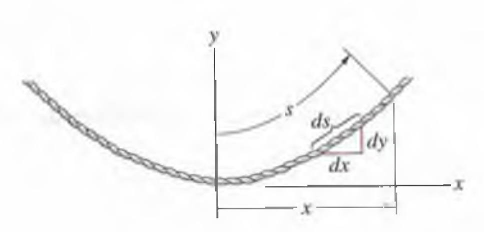


Figura 9.24
Longitud s del cable en el intervalo horizontal de 0 a x.

Ejemplo 9.9

La distancia horizontal entre las torres de soporte del puente Golden Gate de San Francisco, California, es de 1280 m (Fig. 9.25). Las cúspides de las torres están a 160 m sobre el punto más bajo de los cables de soporte principales. Obtenga la ecuación de la curva descrita por los cables.



Figura 9.25

ESTRATEGIA

Conocemos las coordenadas de los puntos de conexión de los cables respecto a sus puntos más bajos. Sustituyéndolas en la ecuación (9.15), podemos determinar a. Conocida a, la ecuación describe la forma de los cables.

SOLUCIÓN

Las coordenadas de la cúspide de la torre derecha de soporte respecto al punto más bajo de los cables de soporte son $x_R = 640$ m, $y_R = 160$ m (Fig. a). Sustituyendo estos valores en la ecuación (9.15),

$$160 = \frac{1}{2}a(640)^2,$$

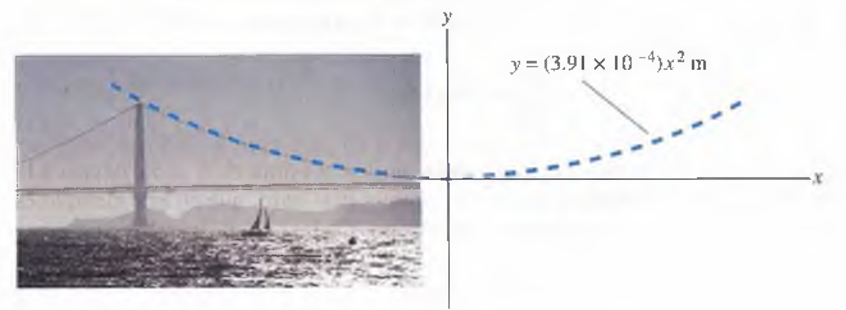
obtenemos

$$a = 7.81 \times 10^{-4}\ \text{m}^{-1}.$$

La curva descrita por los cables de soporte es

$$y = \frac{1}{2}ax^2 = (3.91 \times 10^{-4})x^2.$$

La figura (a) compara esta parábola con la foto de los cables de soporte.



(a) Comparación de la curva teórica con la fotografía de un cable de soporte.

Ejemplo 9.10

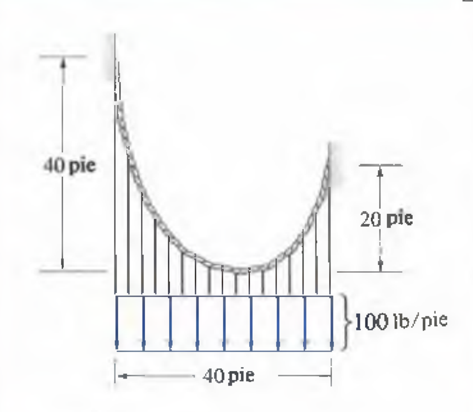


Figura 9.26

El cable de la figura 9.26 soporta una carga distribuida de 100 lb/pie. ¿Qué valor tiene la tensión máxima en el cable?

ESTRATEGIA

Se conocen la coordenada vertical de cada punto de conexión y el claro horizontal. Las coordenadas de cada punto de conexión respecto a un sistema coordenado con su origen en el punto más bajo del cable deben satisfacer la ecuación (9.15). Esto nos permite determinar las coordenadas horizontales de los puntos de conexión. A continuación, podemos usar la ecuación (9.15) para determinar $a = w/T_0$, lo que nos da la tensión en el punto más bajo; luego planteamos la ecuación (9.16) para obtener la tensión máxima.

SOLUCIÓN

Establecemos un sistema coordenado con su origen en el punto más bajo del cable, denotando las coordenadas de los puntos de conexión derecho e izquierdo como (x_L, y_L) y (x_R, y_R), respectivamente (Fig. a). La ecuación (9.15) debe satisfacerse para esos dos puntos:

$$y_L = 40 \text{ pie} = \frac{1}{2}ax_L^2,$$
$$y_R = 20 \text{ pie} = \frac{1}{2}ax_R^2, \qquad (9.18)$$

No conocemos a, pero podemos eliminarla dividiendo la primera ecuación entre la segunda, para obtener

$$\frac{x_L^2}{x_R^2} = 2.$$

Sabemos también que

$$x_R - x_L = 40 \text{ pie}.$$

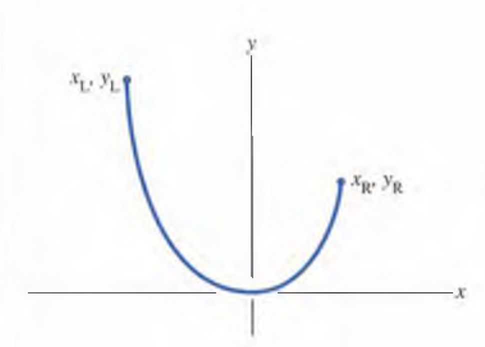
(La razón del signo menos es que x_L es negativa.) Por consiguiente, tenemos dos ecuaciones para determinar x_L y x_R; los resultados son $x_L = -23.43$ pies y $x_R = 16.57$ pies.

Podemos utilizar ahora cualquiera de las ecuaciones (9.18) para calcular a. Obtenemos $a = 0.146 \text{ pie}^{-1}$, y la tensión T_0 en el punto más bajo del cable es

$$T_0 = \frac{w}{a} = \frac{100}{0.146} = 686.3 \text{ lb}.$$

De la ecuación (9.16), sabemos que la tensión máxima en el cable ocurre a la distancia máxima horizontal desde su punto más bajo, que en este ejemplo es el punto izquierdo de conexión. La tensión máxima es entonces

$$T_{\text{máx}} = T_0\sqrt{1 + a^2x_L^2} = 686.3\sqrt{1 + (0.146)^2(-23.43)^2} = 2441.6 \text{ lb}.$$



(a) Sistema coordenado con su origen en el punto más bajo, las coordenadas de los puntos izquierdo y derecho de los apoyos.

Cargas uniformemente distribuidas en el cable

El peso de un cable lo somete a una carga uniformemente distribuida en toda su longitud. Si un cable se somete a fuerzas iguales y paralelas espaciadas uniformemente, la carga sobre el cable suele representarse uniformemente distribuida en toda su longitud. Aquí veremos la forma asumida por el cable (*catenaria*), y la variación de su tensión.

Supongamos que sobre un cable actúa una carga distribuida que somete cada elemento ds de su longitud a una fuerza $w\,ds$, donde w es constante. La figura 9.27 es el diagrama de cuerpo libre obtenido al cortar el cable en su punto más bajo y en un punto a una distancia s. T_0 y T son las tensiones en el punto más bajo y en s, respectivamente. La carga distribuida ejerce una fuerza ws hacia abajo. El origen del sistema se halla en el punto más bajo. Sea la función $y(x)$ la curva descrita por el cable en el plano x-y. El objetivo es determinar $y(x)$ y T.

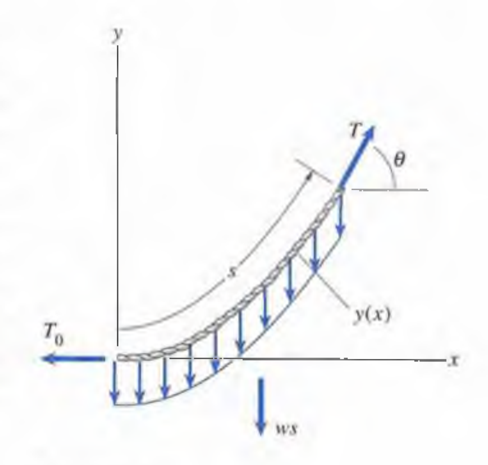


Figura 9.27
Cable sometido a una carga uniformemente distribuida a lo largo de él.

Forma del cable Del diagrama de cuerpo libre de la figura 9.27, obtenemos las ecuaciones de equilibrio

$$T \operatorname{sen} \theta = ws, \qquad (9.19)$$

$$T \cos \theta = T_0. \qquad (9.20)$$

Dividiendo la primera ecuación entre la segunda, obtenemos

$$\tan \theta = \frac{w}{T_0} s = as, \qquad (9.21)$$

donde definimos la constante $a = w/T_0$. La pendiente del cable $dy/dx = \tan \theta$, por lo que

$$\frac{dy}{dx} = as.$$

La derivada de esta ecuación con respecto a x es

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = a\frac{ds}{dx}. \qquad (9.22)$$

Por la relación

$$ds^2 = dx^2 + dy^2,$$

podemos escribir la derivada de s con respecto a x como

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \sqrt{1 + \sigma^2}, \qquad (9.23)$$

donde definimos σ como la pendiente:

$$\sigma = \frac{dy}{dx}.$$

Con la ecuación (9.23) escribimos la ecuación (9.22) como

$$\frac{d\sigma}{\sqrt{1+\sigma^2}} = a\,dx.$$

La pendiente es $\sigma = 0$ en $x = 0$. Integrando esta ecuación,

$$\int_0^\sigma \frac{d\sigma}{\sqrt{1+\sigma^2}} = \int_0^x a\,dx,$$

determinamos la pendiente en función de x:

$$\sigma = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}(e^{ax} - e^{-ax}) = \text{senh}\, ax. \tag{9.24}$$

Luego, integrando esta ecuación con respecto a x, obtenemos la curva descrita por el cable, denominada **catenaria**:

$$y = \frac{1}{2a}(e^{ax} + e^{-ax} - 2) = \frac{1}{a}(\cosh ax - 1). \tag{9.25}$$

Tensión en el cable Mediante la ecuación (9.20) y la relación $dx = \cos\theta\, ds$, obtenemos

$$T = \frac{T_0}{\cos\theta} = T_0\frac{ds}{dx}.$$

Sustituyendo la ecuación (9.23) en esta expresión y utilizando la ecuación (9.24) obtenemos la tensión en el cable en función de x:

$$T = T_0\sqrt{1 + \frac{1}{4}(e^{ax} - e^{-ax})^2} = T_0\cosh ax. \tag{9.26}$$

Longitud del cable De la ecuación (9.21), la longitud s es

$$s = \frac{1}{a}\tan\theta = \frac{\sigma}{a}.$$

Sustituyendo la ecuación (9.24) en esta ecuación, obtenemos una expresión para la longitud s del cable en el intervalo horizontal desde su punto más bajo hasta x:

$$s = \frac{1}{2a}(e^{ax} - e^{-ax}) = \frac{\text{senh}\, ax}{a}. \tag{9.27}$$

Ejemplo 9.11

El cable en la figura 9.28 pesa 10 N/m. La tensión en su punto más bajo es de 50 N. Determine la distancia h y la tensión máxima en el cable.

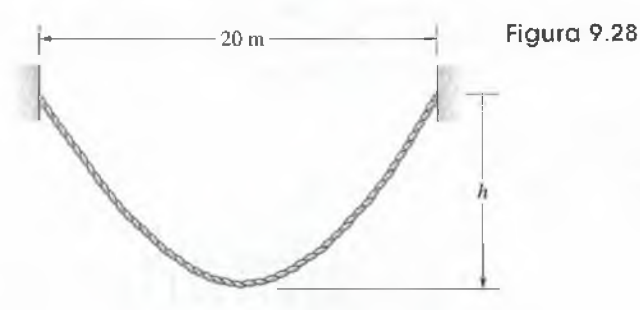


Figura 9.28

ESTRATEGIA

El cable está sometido a una carga $w = 10$ N/m uniformemente distribuida en toda su longitud. Como conocemos w y T_0, podemos determinar $a = w/T_0$. Luego podemos determinar h de la ecuación (9.25). Como la tensión máxima ocurre a la mayor distancia del punto más bajo del cable, podemos determinarla haciendo $x = 10$ m en la ecuación (9.26).

SOLUCIÓN

El parámetro a es

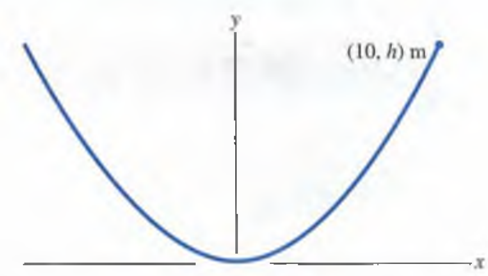
$$a = \frac{w}{T_0} = \frac{10}{50} = 0.2 \text{ m}^{-1}.$$

En función de un sistema coordenado con su origen en el punto más bajo del cable (Fig. a), las coordenadas del punto de conexión derecho son $x = 10$ m, $y = h$ m. De la ecuación (9.25),

$$h = \frac{1}{a}(\cosh ax - 1) = \frac{1}{0.2}\{\cosh[(0.2)(10)] - 1\} = 13.81 \text{ m}.$$

De la ecuación (9.26), la tensión máxima es

$$T_{\text{máx}} = T_0 \cosh ax = 50 \cosh[(0.2)(10)] = 188.1 \text{ N}.$$

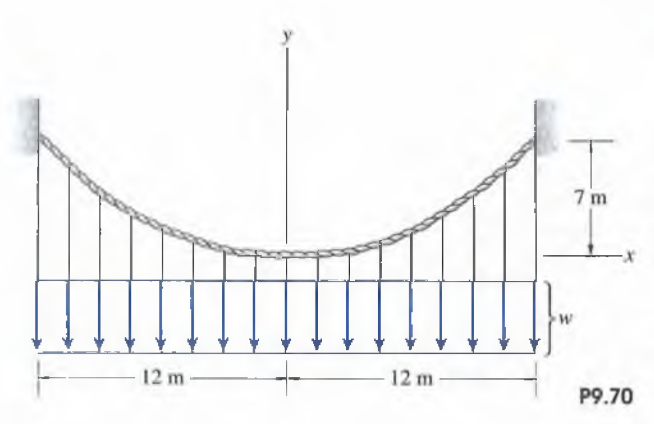


(a) Sistema coordenado con su origen en el punto más bajo del cable

Problemas

9.70 El cable mostrado soporta una carga uniformemente distribuida $w = 1$ kN/m.
(a) ¿Cuál es la tensión máxima en el cable?
(b) ¿Cuál es la longitud del cable?

Estrategia: Se conocen las coordenadas de los puntos de conexión del cable con respecto a su punto más bajo, por lo que se puede utilizar la ecuación (9.15) para determinar el coeficiente a, y establecer $a = w/T_0$ para determinar la tensión en el punto más bajo.



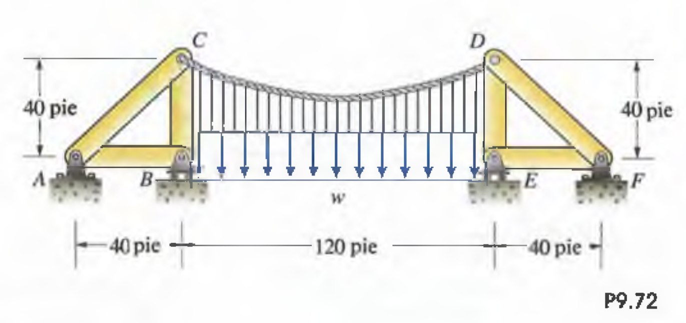
P9.70

9.71 Unos ingenieros utilizan un cable para suspender una tubería sobre un río. La distancia entre las torres es de 120 pies y el punto más bajo del cable se encuentra 10 pies abajo de las cúspides de las torres. El peso total de la tubería suspendida es de 6000 lb.
(a) Determine la tensión máxima en el cable suspendido.
(b) Determine la longitud del cable suspendido.



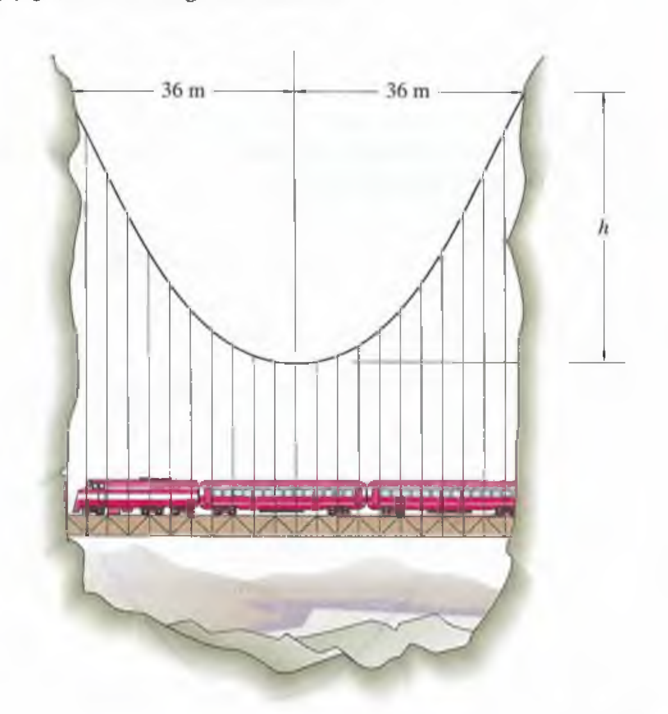
P9.71

9.72 El cable mostrado soporta una carga uniformemente distribuida $w = 100$ lb/pie. El punto más bajo del cable se halla 20 pies abajo de los puntos de conexión C y D. Determine las cargas axiales en las barras AC y BC de la armadura.



P9.72

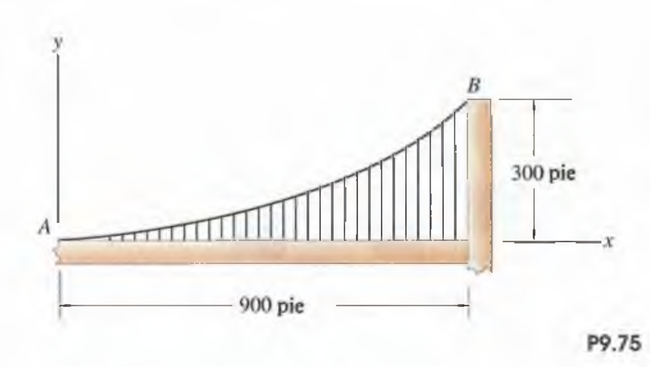
9.73 El cable de la figura soporta un puente de ferrocarril entre dos túneles. La carga distribuida es $w = 1$ MN/m y $h = 40$ m.
(a) ¿Cuál es la tensión máxima en el cable?
(b) ¿Cuál es la longitud del cable?



P9.73

9.74 El cable del problema 9.73 soporta con seguridad una tensión de 40 MN. ¿Cuál es el cable más corto que se puede emplear y cuál es el valor correspondiente de h?

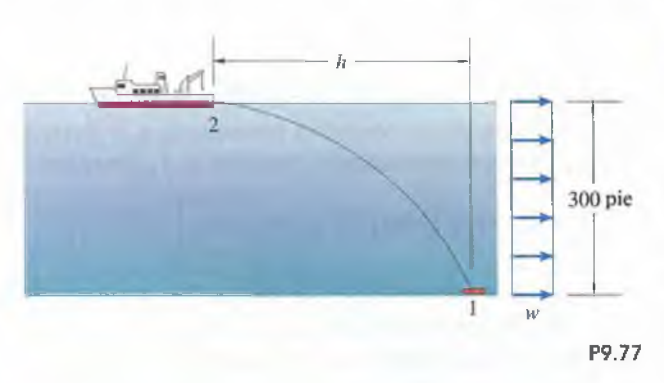
9.75 En A, el cable principal del puente colgante de la figura es horizontal y su tensión es de 1×10^8 lb.
(a) Determine la carga distribuida que actúa sobre el cable.
(b) ¿Cuál es la tensión en B?



P9.75

9.76 Halle la longitud del cable principal del problema 9.75.

9.77 Un barco de investigaciones oceanográficas remolca un instrumento con un cable. La fuerza hidrodinámica de arrastre somete al cable a una fuerza uniformemente distribuida $w = 2$ lb/pie. Las tensiones en el cable en 1 y 2 son de 800 lb y 1300 lb, respectivamente. Determine la distancia h.

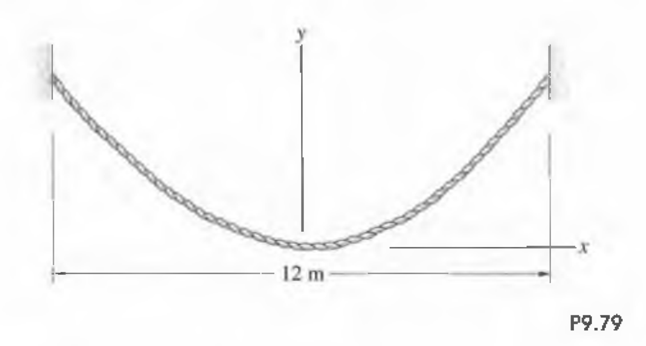


P9.77

9.78 Dibuje una gráfica de la forma del cable del problema 9.77.

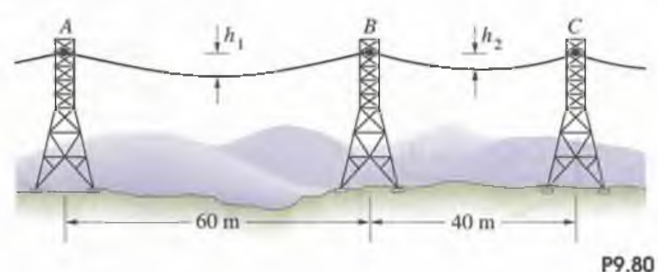
9.79 La cuerda pesa 1 N/m. La tensión en su punto más bajo es de 5 N. (a) ¿Cuál es la tensión máxima en la cuerda? (b) ¿Cuál es su longitud?

Estrategia: Se da lo necesario para evaluar el coeficiente $a = w/T_0$. Como la cuerda no tiene más carga que su peso, la tensión está dada en función de x por la ecuación (9.26), y la longitud de la cuerda en el intervalo horizontal de $x = 0$ a x está dada por la ecuación (9.27).



P9.79

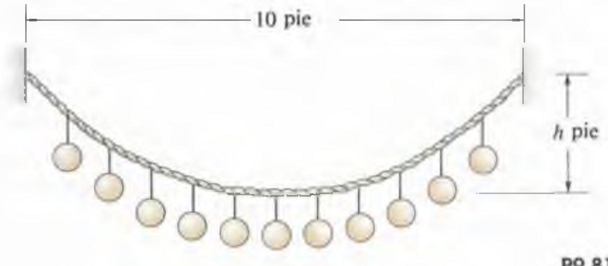
9.80 La masa por unidad de longitud de las líneas AB y BC es 2 kg/m. La tensión en el punto más bajo de AB es 1.8 kN. Ambas líneas ejercen fuerzas horizontales iguales en B. (a) Halle las flechas h_1 y h_2. (b) Halle las tensiones máximas en las dos líneas.



P9.80

9.81 La cuerda está cargada con pesos de 10 lb suspendidos a intervalos de 1 pie. Ignore el peso de la cuerda. Si la tensión en el punto más bajo de la cuerda es de 45 lb, determine h, la tensión máxima en la cuerda y la longitud de ésta.

Estrategia: Obtenga una aproximación tomando las cargas discretas como una carga uniformemente distribuida.



P9.81

9.6 Cargas discretas en cables

Las primeras aplicaciones del concepto de equilibrio (Cap. 3) implicaron determinar tensiones en cables que soportaban cuerpos suspendidos. Aquí veremos el caso de un número arbitrario N de cuerpos suspendidos de un cable (Fig. 9.29a). Suponemos que el peso del cable puede ignorarse comparado con los pesos suspendidos, y que el cable es lo bastante flexible para aproximar su forma con una serie de segmentos rectos.

(a)

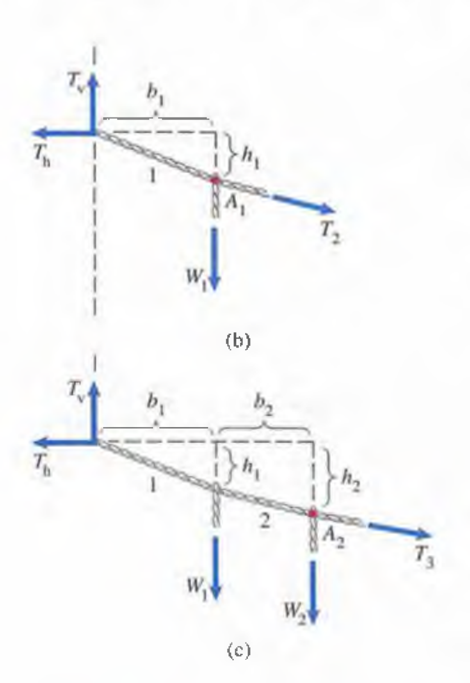


Figura 9.29
(a) N pesos suspendidos de un cable.
(b) Primer diagrama de cuerpo libre.
(c) Segundo diagrama de cuerpo libre.

Supongamos que se conocen las distancias horizontales $b_1, b_2, \ldots, b_{N+1}$, así como la distancia vertical h_{N+1} que especifica la posición de la conexión derecha del cable. Tenemos dos objetivos: (1) determinar la configuración (forma) del cable calculando las distancias verticales $h_1, h_2, \ldots, h_N$ que especifican las posiciones de los puntos de unión de los pesos, y (2) determinar las tensiones en los segmentos $1, 2, \ldots, N+1$ del cable.

Dibujamos un diagrama de cuerpo libre, cortando el cable en su punto izquierdo de conexión y justamente a la derecha del peso W_1 (Fig. 9.29b). Descomponemos la tensión del cable en el punto de conexión izquierdo en sus componentes T_h y T_v horizontal y vertical. Sumando momentos respecto al punto de unión A_1, obtenemos la ecuación

$$\Sigma M_{(\text{punto } A_1)} = h_1 T_h - b_1 T_v = 0.$$

El siguiente paso es dibujar un diagrama de cuerpo libre pasando planos por el cable en su punto izquierdo de conexión justamente a la derecha del peso W_2 (Fig. 9.29c). Sumando momentos respecto a A_2 obtenemos

$$\Sigma M_{(\text{punto } A_2)} = h_2 T_h - (b_1 + b_2) T_v + b_2 W_1 = 0.$$

Así, al cortar el cable justo a la derecha de cada uno de los N pesos, obtenemos N ecuaciones. También podemos dibujar un diagrama de cuerpo libre cortando el cable en sus puntos de conexión izquierdo y derecho, y sumar momentos respecto al punto de conexión derecho. Con ello obtenemos $N+1$ ecuaciones en términos de $N+2$ incógnitas: las componentes de la tensión T_h y T_v y las posiciones verticales de los puntos de unión $h_1, h_2, \ldots, h_N$. Si la posición vertical de un solo punto de unión se especifica, podemos resolver el sistema de ecuaciones para las posiciones verticales de los otros puntos de unión, y queda determinada la configuración del cable.

Una vez conocidas la configuración y T_h, podemos determinar la tensión en cualquier segmento cortando el cable en su punto de conexión izquierdo dentro del segmento y sumando fuerzas en dirección horizontal.

Comparando cables sometidos a cargas distribuidas y discretas, podemos hacer algunas observaciones acerca de cómo se representan en ingeniería los sistemas continuos y los discretos. Consideremos un cable sometido a una carga distribuida horizontal w (Fig. 9.30a). La fuerza total ejercida sobre él es wL. Como el cable pasa por el punto $x = L/2$, $y = L/2$, mediante la ecuación (9.15) obtenemos que $a = 4/L$, por lo que la ecuación para la curva descrita por el cable es $y = (2/L)x^2$.

En la figura 9.30(b), la forma del cable con la carga distribuida se compara con la de un cable de peso insignificante sometido a tres cargas discretas $W = wL/3$ con el mismo espaciamiento horizontal. (Escogimos las dimensiones del cable con las cargas discretas de manera que las alturas de los dos cables fuesen iguales en sus puntos medios.) En la figura 9.30(c), la forma del cable con la carga distribuida se compara con la de un cable sometido a cinco cargas discretas, $W = wL/5$, con el mismo espaciamiento horizontal. En las figuras 9.31(a) y (b) comparamos la tensión en el cable sometido a la carga distribuida con la de los cables sometidos a tres y a cinco cargas discretas.

La forma y la tensión en el cable con una carga distribuida se infieren de aquéllas en los cables con cargas discretas. Aunque la aproximación de la tensión es menos precisa que la de la forma, es evidente que la primera se puede mejorar incrementando el número de cargas.

Este método —aproximar una distribución continua con un modelo discreto— es muy importante en ingeniería. Es el punto de partida de los métodos de diferencias finitas y del elemento finito. El procedimiento opuesto, representar sistemas discretos con modelos continuos, es también muy utilizado, por ejemplo cuando las fuerzas ejercidas sobre un puente por el tránsito se representan como una carga distribuida.

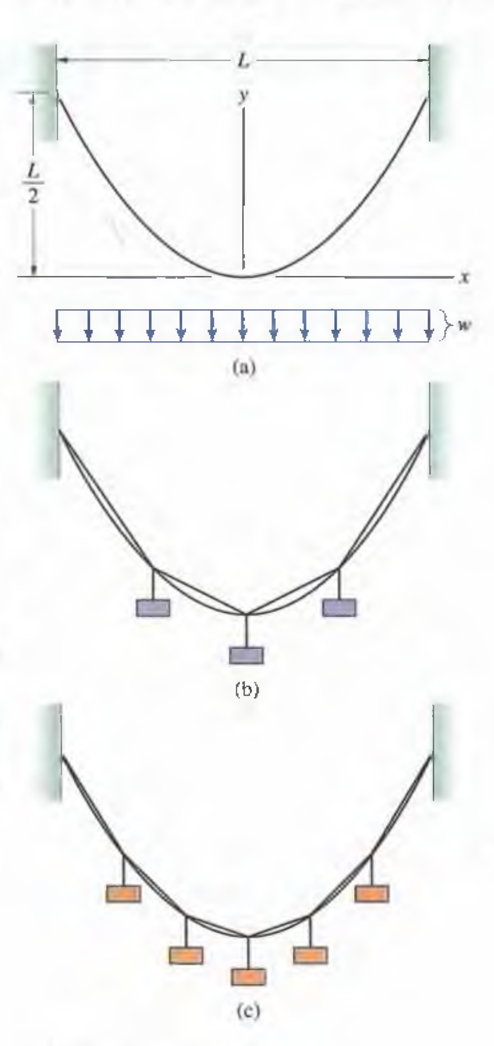
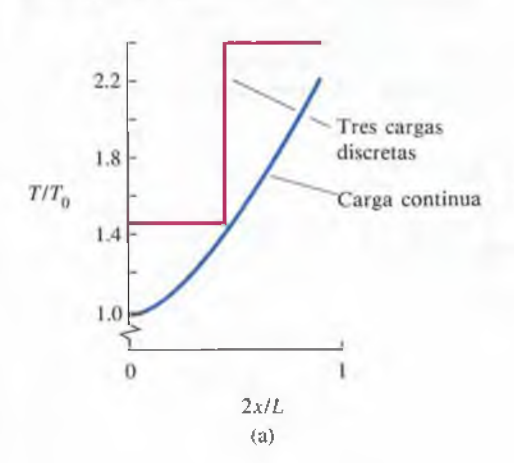


Figura 9.30

(a) Cable sometido a una carga continua.
(b) Cable con tres cargas discretas.
(c) Cable con cinco cargas discretas.



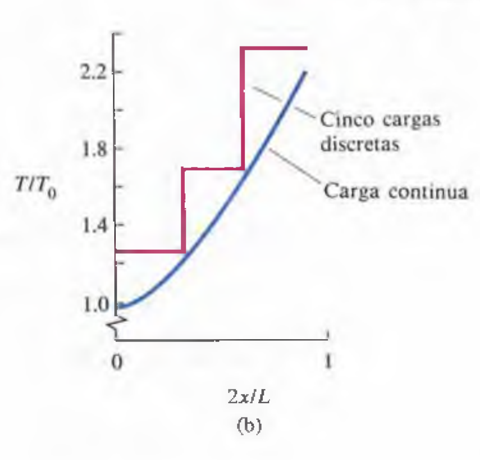


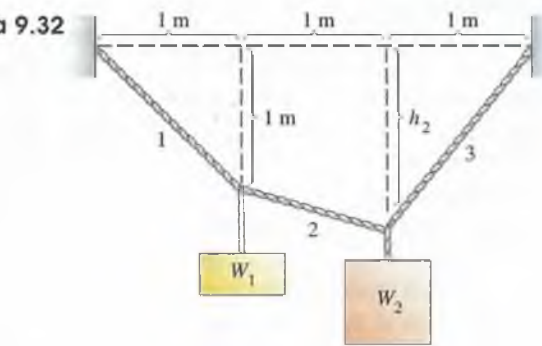
Figura 9.31

(a) Tensión en el cable con una carga continua, comparada con la del cable con tres cargas discretas.
(b) Tensión en el cable con una carga continua, comparada con la del cable con cinco cargas discretas.

Ejemplo 9.12

En la figura 9.32 dos pesos, $W_1 = 100$ N y $W_2 = 200$ N, están suspendidos del cable.
(a) Determine la distancia vertical h_2.
(b) Determine la tensión en el segmento 2 del cable.

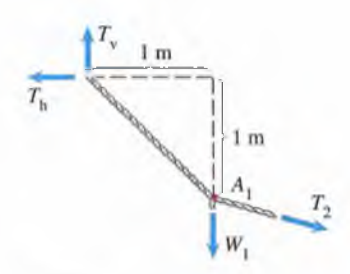
Figura 9.32



SOLUCIÓN

(a) Cortamos primero el cable en su punto izquierdo de conexión justo a la derecha de W_1 y expresamos la tensión en ese punto en función de sus componentes horizontal y vertical (Fig. a). Sumando momentos respecto a A_1:

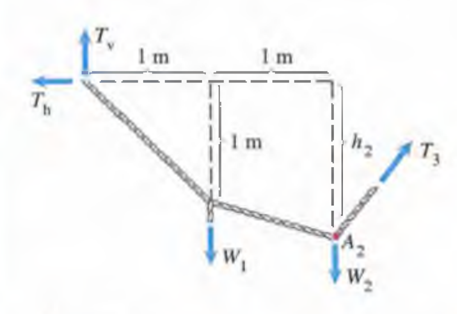
$$\Sigma M_{\text{(punto } A_1)} = (1)T_h - (1)T_v = 0.$$



(a) Primer diagrama de cuerpo libre.

Luego cortamos el cable justamente a la derecha de W_2 (Fig. b) y sumamos momentos respecto a A_2:

$$\Sigma M_{\text{(punto } A_2)} = h_2 T_h - (2)T_v + (1)W_1 = 0.$$



(b) Segundo diagrama de cuerpo libre.

El último paso es cortar el cable en el punto derecho de conexión (Fig. c) y sumar momentos respecto a A_3:

$$\Sigma M_{\text{(punto } A_3)} = -(3)T_v + (2)W_1 + (1)W_2 = 0.$$

Se tienen tres ecuaciones en términos de las incógnitas T_h, T_v y h_2. Al resolverlas obtenemos $T_h = 133.3$ N, $T_v = 133.3$ N y $h_2 = 1.25$ m.

(b) Para determinar la tensión en el segmento 2 utilizamos el diagrama de cuerpo libre de la figura (a). El ángulo entre la fuerza T_2 y la horizontal es

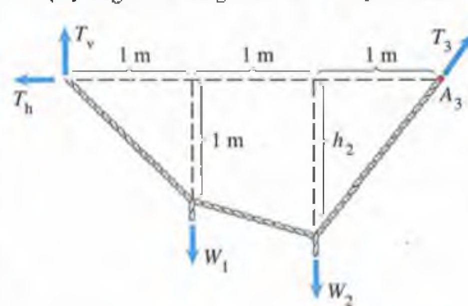
$$\arctan\left(\frac{h_2 - 1}{1}\right) = 14.04°.$$

Sumando fuerzas en la dirección horizontal,

$$T_2 \cos 14.04° - T_h = 0.$$

Despejando T_2 obtenemos

$$T_2 = \frac{T_h}{\cos 14.04°} = \frac{133.3}{\cos 14.04°} = 137.4 \text{ N}.$$



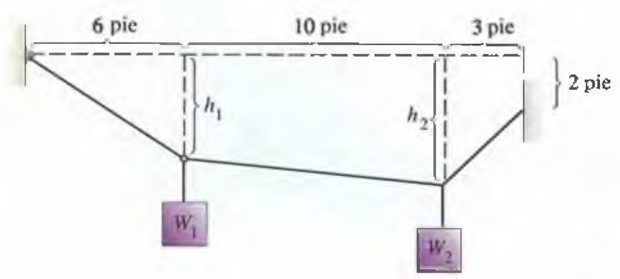
(c) Diagrama de cuerpo libre de todo el cable.

Problemas

9.82 En el ejemplo 9.12, ¿qué valor tienen las tensiones en los segmentos 1 y 3 del cable?

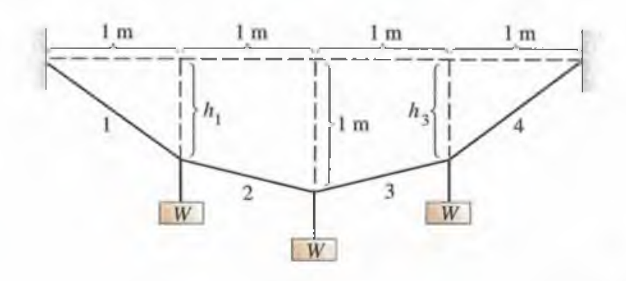
9.83 Si en el ejemplo 9.12 los pesos son $W_1 = 240$ N y $W_2 = 400$ N, ¿cuál es la distancia vertical h_2 y qué valor tiene la tensión en el segmento 3 del cable?

9.84 Dos pesos, $W_1 = W_2 = 50$ lb, están suspendidos de una cuerda. La distancia vertical $h_1 = 4$ pies.
(a) Determine la distancia vertical h_2 de la figura.
(b) ¿Qué valor tiene la tensión máxima en la cuerda?



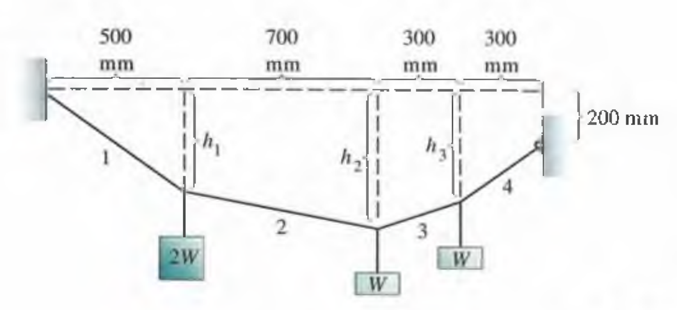
P9.84

9.85 Tres pesos están suspendidos de una cuerda. Los pesos $W = 10$ N.
(a) Determine las distancias verticales h_1 y h_2 de la figura y haga un croquis de la configuración de la cuerda mostrada.
(b) ¿Qué valor tienen las tensiones en los segmentos 1 y 2 de la cuerda?



P9.85

9.86 Tres pesos están suspendidos de una cuerda. El peso $W = 100$ N y la distancia vertical $h_1 = 400$ mm. Determine las distancias verticales h_2 y h_3 de la figura.



P9.86

9.87 En el problema 9.86, ¿cuál es la tensión máxima en el cable y en qué segmento de éste ocurre?

9.88 El cable del problema 9.86 resiste con seguridad una tensión de 15 kN. ¿Es $W = 2$ kN una carga segura si $h_1 = 200$ mm?

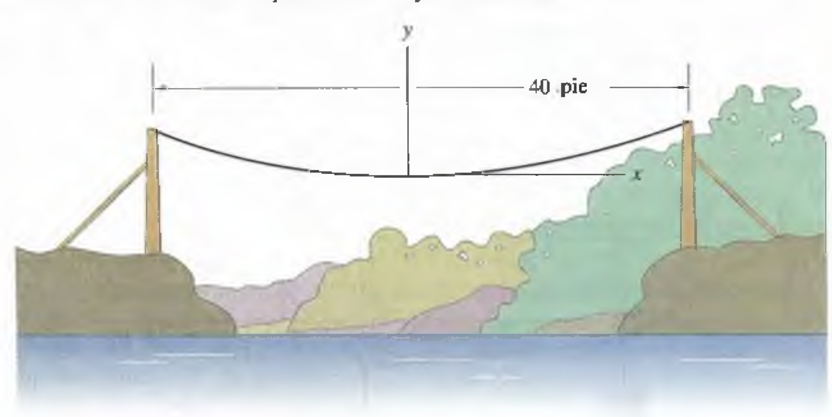
Ejemplos con computador

Los siguientes problemas y el ejemplo están diseñados para resolverse usando una calculadora programable o un computador.

Ejemplo 9.13

Como primer paso en la construcción de un puente colgante peatonal, un cable se suspende a través del claro desde puntos de conexión ubicados a la misma altura (Fig. 9.33). El cable pesa 5 lb/pie y tiene 42 pies de longitud. Determine la tensión máxima en el cable y la distancia vertical desde los puntos de conexión hasta el punto más bajo del cable.

Figura 9.33



ESTRATEGIA

La ecuación (9.27) da la longitud s del cable en función de la distancia horizontal x desde el punto más bajo de éste y del parámetro $a = w/T_0$. El término w es el peso por unidad de longitud, y T_0 es la tensión en el cable en su punto más bajo. Sabemos que la longitud de la mitad del claro del cable es de 20 pies, por lo que podemos graficar s en función de a y calcular el valor de a para el cual $s = 21$ pies. Luego podemos determinar la tensión máxima con la ecuación (9.26) y la distancia vertical hasta el punto más bajo del cable con la ecuación (9.25).

SOLUCIÓN

Sustituyendo $x = 20$ pies en la ecuación (9.27),

$$s = \frac{\operatorname{senh} 20a}{a},$$

calculamos s como función de a (Fig. 9.34). La longitud $s = 21$ pies cuando el parámetro a es aproximadamente 0.027. Examinando los resultados calculados cerca de $a = 0.027$,

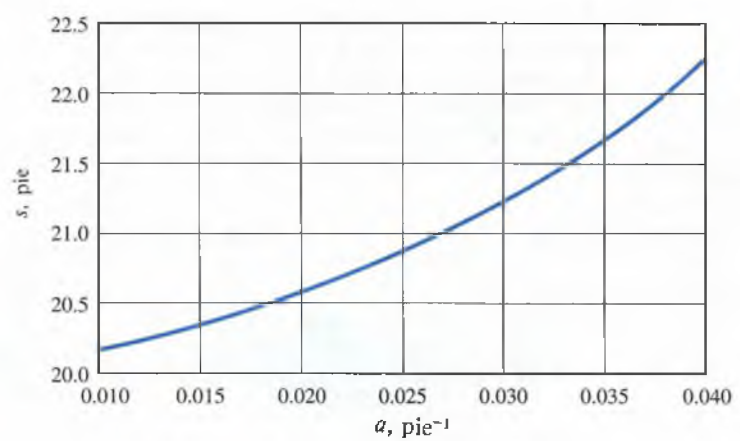


Figura 9.34
Gráfica de la longitud s en función del parámetro a.

a, pie^{-1}	s, pies
0.0269	20.9789
0.0270	20.9863
0.0271	20.9937
0.0272	21.0012
0.0273	21.0086
0.0274	21.0162
0.0275	21.0237

vemos que s mide aproximadamente 21 pies cuando $a = 0.0272$ pie^{-1}. Por consiguiente, la tensión en el punto más bajo del cable es

$$T_0 = \frac{w}{a} = \frac{5}{0.0272} = 184 \text{ lb},$$

y la tensión máxima es

$$T_{\text{máx}} = T_0 \cosh ax = 183.8 \cosh[(0.0272)(20)] = 212 \text{ lb}.$$

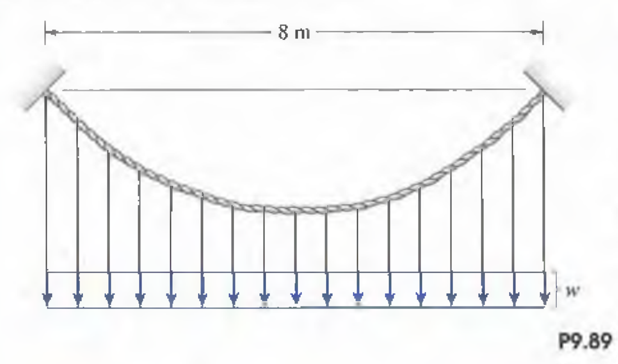
De la ecuación (9.25), la distancia vertical desde el punto más bajo del cable hasta los puntos de conexión es

$$y_{\text{máx}} = \frac{1}{a}(\cosh ax - 1) = \frac{1}{0.0272}\{\cosh[(0.0272)(20)] - 1\} = 5.58 \text{ pie}.$$

Problemas

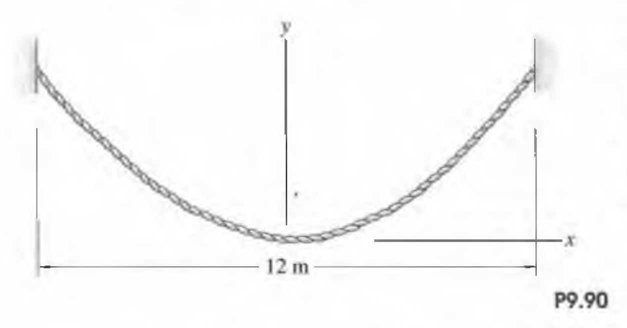
9.89 Un cable de 10 m de largo está sometido a una carga distribuida $w = 200$ N/m. ¿Cuál es la tensión máxima?

Estrategia: Sustituyendo $x = 4$ m en la ecuación (9.17) y obteniendo una gráfica de s en función del parámetro a, se puede determinar el valor de a correspondiente a $s = 5$ m y luego $T_0 = w/a$. Con la ecuación (9.16) se puede determinar entonces la tensión máxima.



P9.89

9.90 La cuerda pesa 1 N/m y tiene 16 m de longitud.
(a) ¿Qué valor tiene la tensión máxima?
(b) ¿Qué valor tiene la distancia vertical de los puntos de conexión al punto más bajo de la cuerda?

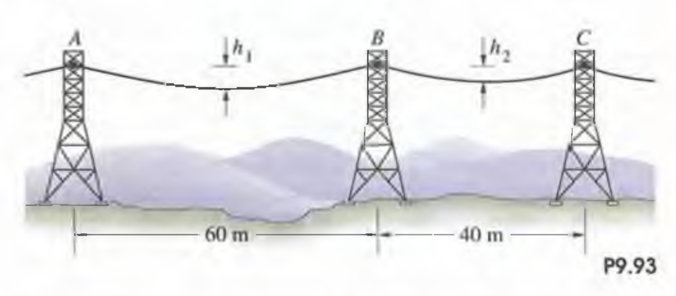


P9.90

9.91 Una cadena pesa 20 lb y mide 20 pies. Está suspendida de dos puntos a la misma altura y separados 10 pies.
(a) Determine la tensión máxima en la cadena.
(b) Dibuje un croquis de la forma que toma la cadena.

9.92 Un ingeniero quiere suspender líneas de alto voltaje entre postes con 200 m de separación. Cada línea tiene una masa de 2 kg/m.
(a) Si quiere someter las líneas a una tensión no mayor que 10 kN, ¿cuál debe ser la flecha máxima admisible entre los postes? (la distancia vertical máxima admisible entre los puntos de conexión y el punto más bajo de la línea)?
(b) ¿Cuál es la longitud de cada línea?

9.93 La masa por unidad de longitud de las líneas AB y BC mostradas es 2 kg/m. La longitud de AB es 62 m. Las dos líneas ejercen fuerzas horizontales iguales en B.
(a) Determine las flechas h_1 y h_2.
(b) Determine las tensiones máximas en las dos líneas.



P9.93

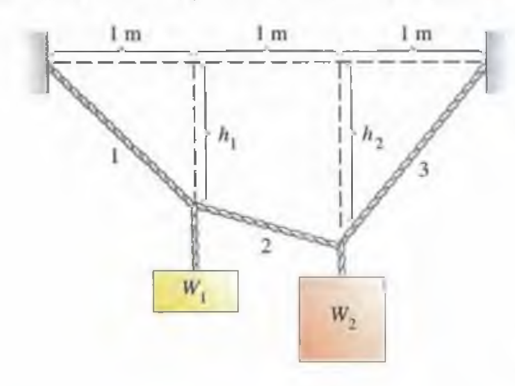
9.94 La masa por unidad de longitud de las líneas AB y BC del problema 9.93 es de 2 kg/m. La flecha $h_1 = 4.5$ m, pero la longitud de la línea AB es desconocida. Las dos líneas ejercen fuerzas horizontales iguales en B.
(a) Determine la flecha h_2.
(b) Determine las tensiones máximas en las dos líneas.

9.95 Dos cables, A y B, de 30 pies están suspendidos de puntos a igual altura y separados 20 pies. A está sometido a una carga uniformemente distribuida de manera horizontal de 200 lb. B está sometido a una carga uniformemente distribuida de 200 lb en toda su longitud. ¿Cuáles son las tensiones máximas en A y B?

9.96 Dibuje una gráfica de los dos cables del problema 9.95, comparando las formas geométricas que asumen.

9.97 Los pesos $W_1 = 100$ N y $W_2 = 200$ N, y la longitud total L de los tres segmentos de la cuerda es de 5 m.
(a) ¿Qué valor tienen h_1 y h_2?
(b) ¿Qué valor tiene la tensión máxima en la cuerda?

Estrategia: Si escoge un valor de h_1, puede determinar h_2 y L. Obteniendo una gráfica de L en función de h_1, puede determinar el valor de h_1 que corresponde a $L = 5$ m.



P9.97

9.7 Presión

Las fuerzas de viento sobre edificios y las aerodinámicas sobre autos y aeroplanos son ejemplos de fuerzas distribuidas sobre *áreas*. La fuerza hacia abajo ejercida sobre la plataforma de un camión de volteo por una carga de grava está distribuida sobre el área de su plataforma. La fuerza hacia arriba que soporta un edificio está distribuida sobre el área de su cimentación. Las cargas distribuidas sobre los techos de edificios por la nieve pueden ser peligrosas. Muchas fuerzas de interés en ingeniería están distribuidas sobre áreas. Aquí analizaremos el ejemplo más común: la fuerza ejercida por la presión de un gas o un líquido.

Definiciones de presión y centro de presión

Una superficie inmersa en un gas o líquido está sometida a fuerzas ejercidas por impactos moleculares. Si el fluido está en reposo, la carga se puede describir con una función p, la **presión**, tal que la fuerza normal ejercida sobre un elemento diferencial dA de la superficie es pdA (Figs. 9.35a y b). (Observe la analogía con una carga w distribuida a lo largo de una línea, donde la fuerza sobre un diferencial dx de la línea es wdx.)

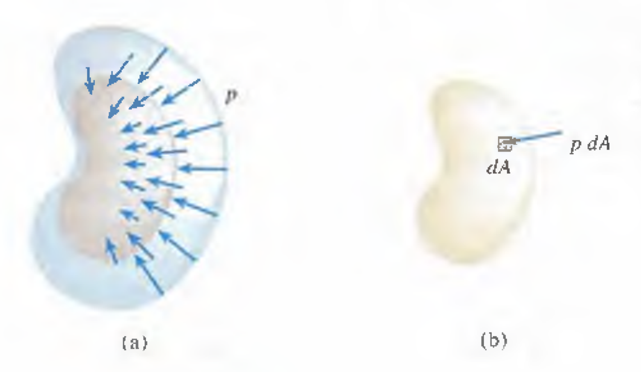


Figura 9.35
(a) Presión sobre una superficie.
(b) La presión sobre un elemento dA es pdA.

Las dimensiones de p son (fuerza)/(área). En el sistema inglés, la presión se puede expresar en libras entre pie cuadrado o libras entre pulgada cuadrada. En unidades SI, la presión se expresa en newtons entre metro cuadrado, unidad llamada pascal (Pa).

En algunas aplicaciones es conveniente usar la **presión manométrica**

$$p_g = p - p_{atm}, \tag{9.28}$$

donde p_{atm} es la presión de la atmósfera, que varía con el lugar y el clima. Al nivel del mar, su valor es aproximadamente 1×10^5 Pa en unidades SI y 14.7 lb/pulg^2 o 2120 lb/pie^2 en unidades inglesas.

Si la fuerza distribuida debido a la presión sobre una superficie se representa con una fuerza equivalente, el punto donde su línea de acción corta la superficie se llama **centro de presión**. Consideremos un área *plana* A sometida a una presión p y un sistema coordenado tal que el área

esté en el plano x-y (Fig. 9.36a). La fuerza normal sobre cada diferencial de área dA es $p dA$ (Fig. 9.36b), y la fuerza normal total sobre A es

$$F = \int_A p\, dA. \tag{9.29}$$

Ahora determinaremos las coordenadas (x_p, y_p) del centro de presión (Fig. 9.36c). Igualando el momento de F respecto al origen con el momento total debido a la presión respecto al origen,

$$(x_p\,\mathbf{i} + y_p\,\mathbf{j}) \times (-F\,\mathbf{k}) = \int_A (x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j}) \times (-p\,dA\,\mathbf{k}),$$

y utilizando la ecuación (9.29) obtenemos

$$x_p = \frac{\int_A xp\,dA}{\int_A p\,dA}, \quad y_p = \frac{\int_A yp\,dA}{\int_A p\,dA}. \tag{9.30}$$

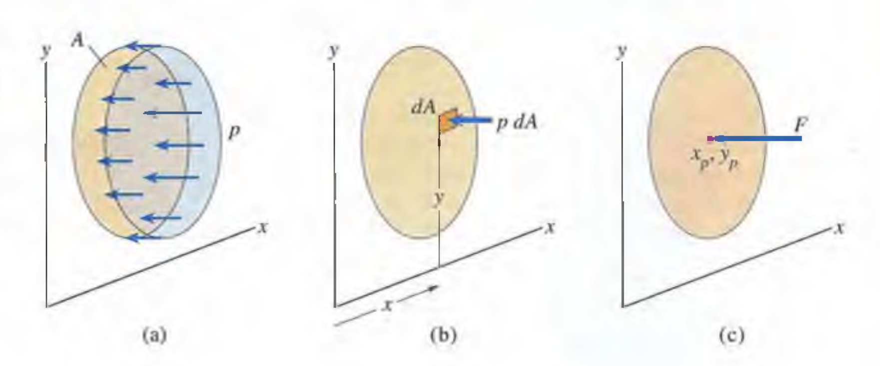


Figura 9.36
(a) Un área plana sometida a presión.
(b) La fuerza sobre un elemento diferencial dA.
(c) La fuerza total actuando en el centro de presión.

Estas ecuaciones determinan la posición del centro de presión cuando se conoce la presión p. Si la presión p es uniforme, la fuerza normal total es $F = pA$ y las ecuaciones (9.30) indican que el centro de presión coincide con el centroide de A.

Ya vimos que si se calcula el "área" definida por una carga distribuida en una línea y se coloca la fuerza resultante en su centroide, ésta equivale a la carga distribuida. Un resultado similar es válido para una presión distribuida sobre un área plana. El término pdA de la Ec. (9.29) es igual a un elemento diferencial dV del "volumen" entre la superficie definida por la distribución de presión y el área A (Fig. 9.37a). La fuerza total ejercida por la presión es, por tanto, igual a este "volumen",

$$F = \int_V dV = V.$$

Sustituyendo $pdA = dV$ en las ecuaciones (9.30), obtenemos

$$x_p = \frac{\int_V x\,dV}{\int_V dV}, \quad y_p = \frac{\int_V y\,dV}{\int_V dV}.$$

El centro de presión coincide con las coordenadas x y y del centroide del "volumen" (Fig. 9.37b).

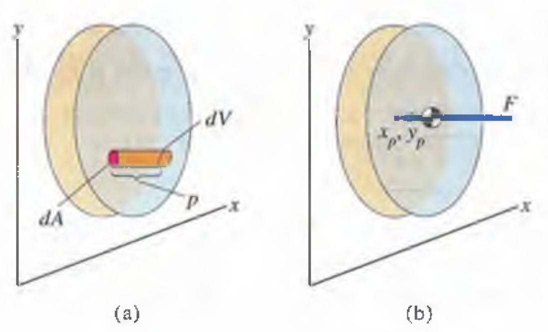


Figura 9.37
(a) Elemento diferencial $dV = pdA$.
(b) La línea de acción de F pasa por el centroide de V.

Distribución de presión en un líquido en reposo

Los proyectistas de recipientes y tuberías a presión, barcos, presas y otras estructuras sumergidas manejan fuerzas y momentos ejercidos por la presión del agua. Si nadamos hacia el fondo de una alberca, sentimos el aumento de presión en los oídos: la presión en un líquido en reposo crece con la profundidad. La dependencia de la presión respecto a la profundidad se determina con un simple diagrama de cuerpo libre.

Dibujamos un diagrama de cuerpo libre de un cilindro de líquido que se extiende desde la superficie libre hasta una profundidad x (Fig. 9.38b) con un sistema coordenado con origen en la superficie y un eje x positivo dirigido hacia abajo (Fig. 9.38a). La parte superior del cilindro está sometida a la presión en la superficie, p_0. Los lados y el fondo del cilindro están sometidos a presión por el líquido circundante, que crece de p_0 en la superficie a p en la profundidad x. El volumen del cilindro es Ax, donde A es el área de su sección transversal. Por tanto, su peso es $W = \gamma Ax$, donde γ es el peso específico del líquido. (Recuerde que el peso específico y la densidad están relacionados por $\gamma = \rho g$.)

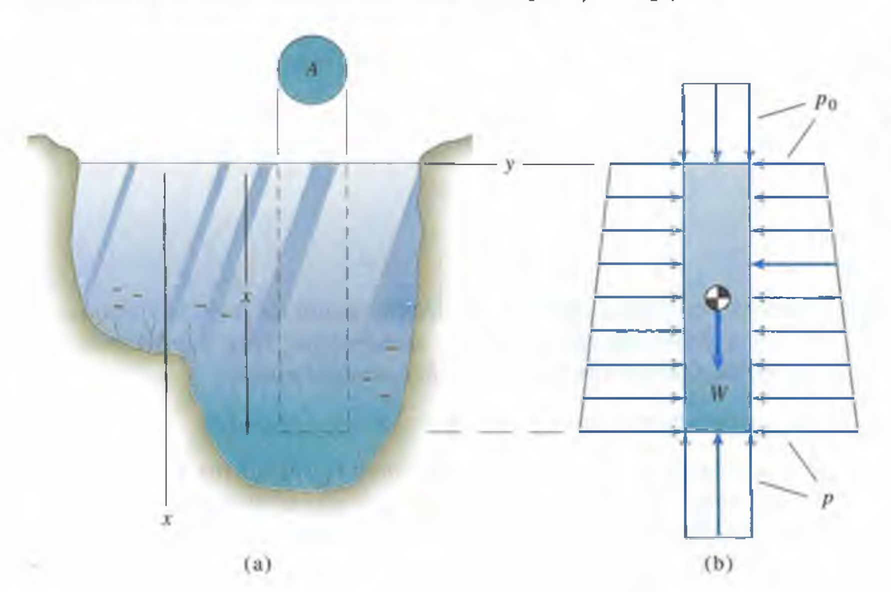


Figura 9.38
(a) Cilindro de líquido que se extiende desde la superficie libre hasta una profundidad x.
(b) Diagrama de cuerpo libre del cilindro.

Como el líquido está en reposo, el cilindro se encuentra en equilibrio. De la ecuación de equilibrio

$$\Sigma F_x = p_0 A - pA + \gamma A x = 0,$$

obtenemos una expresión sencilla para la presión p en el líquido a una profundidad x:

$$\boxed{p = p_0 + \gamma x.} \tag{9.31}$$

Así pues, la presión crece linealmente con la profundidad, y la deducción que hemos efectuado ilustra por qué ocurre así. La presión a una profundidad dada mantiene al líquido literalmente arriba de esa profundidad.

Si la superficie del líquido está en contacto con la atmósfera, $p_0 = p_{atm}$ y podemos escribir la ecuación (9.31) en función de la presión manométrica $p_g = p - p_{atm}$ como

$$p_g = \gamma x. \tag{9.32}$$

En unidades SI, la densidad del agua al nivel del mar es $\rho = 1000$ kg/m^3, por lo que su peso específico es aproximadamente $\gamma = \rho g = (1000)(9.81) = 9.81$ kN/m^3. En el sistema inglés, el peso específico del agua es aproximadamente $\gamma = 62.4$ lb/pie^3.

***Los siguientes ejemplos abordan la determinación de fuerzas y momentos debido a presiones sobre cuerpos sumergidos. Hay dos formas de determinar las fuerzas y momentos sobre un área plana*:**

1. Por integración. *Integre la ecuación (9.31) o la (9.32).*

2. Por la analogía del volumen. *Determine la fuerza total calculando el "volumen" entre la superficie definida por la distribución de presión y el área A. El centro de presión coincide con las coordenadas x y y del centroide del volumen.*

Ejemplo 9.14

Un ingeniero que efectúa estudios para un diseño preliminar de la esclusa de un canal necesita determinar la fuerza total debida a la presión sobre una placa rectangular sumergida (Fig. 9.39) y la posición del centro de presión. La parte superior de la placa está 6 m bajo la superficie libre. La presión atmosférica es $p_{atm} = 1 \times 10^5$ Pa y el peso específico del agua es $\gamma = 9.81$ kN/m^3.

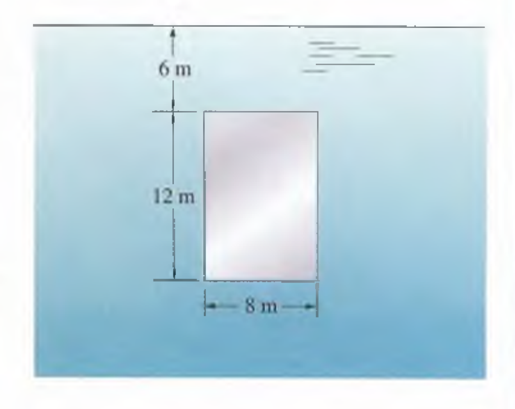


Figura 9.39

ESTRATEGIA

Determinaremos la fuerza de presión sobre un elemento diferencial de área de la placa representado por una franja horizontal e integraremos para determinar la fuerza total y el momento ejercidos por la presión.

SOLUCIÓN

En términos de un sistema coordenado con su origen en la superficie y del eje x positivo dirigido hacia abajo (Fig. a), la presión del agua es $p = p_{atm} + \gamma x$. El área de la franja horizontal es $dA = 8\,dx$. Por tanto, la fuerza total ejercida sobre la cara de la placa por la presión es

$$F = \int_A p\,dA = \int_6^{18} (p_{atm} + \gamma x)(8\,dx) = 96 p_{atm} + 1152\gamma$$

$$= (96)(1 \times 10^5) + (1152)(9810)$$

$$= 20.9 \text{ MN}.$$

El momento respecto al eje y debido a la presión sobre la placa es

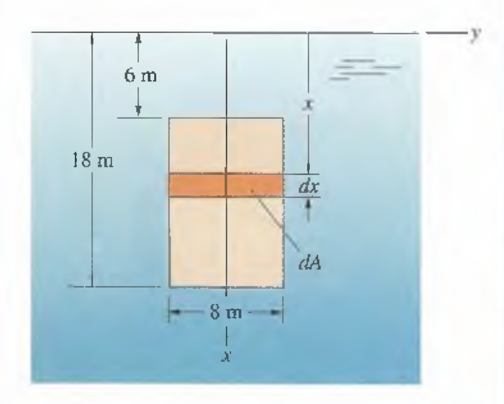
$$M = \int_A xp\,dA = \int_6^{18} x(p_{atm} + \gamma x)(8\,dx) = 262 \text{ MN-m}.$$

La fuerza F que actúa en el centro de presión (Fig. b) ejerce un momento respecto al eje y igual a M:

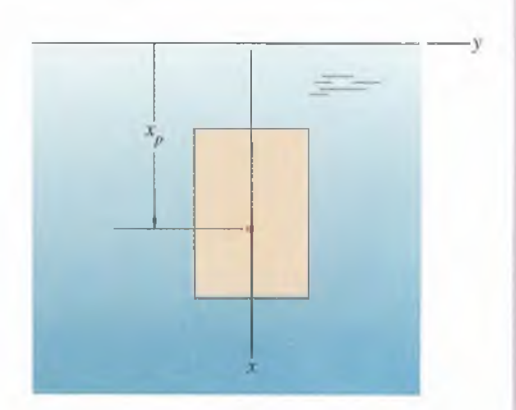
$$x_p F = M.$$

Por consiguiente, la posición del centro de presión es

$$x_p = \frac{M}{F} = \frac{262 \text{ MN-m}}{20.9 \text{ MN}} = 12.5 \text{ m}.$$



(a) Elemento de área en forma de franja horizontal.



(b) Centro de presión.

Ejemplo 9.15

La compuerta AB de la figura 9.40 tiene agua con 2 m de profundidad sobre su lado derecho. El ancho (perpendicular a la página) de la compuerta es de 3 pies y su peso es de 100 lb. El peso específico del agua es $\gamma = 62.4$ lb/pie^3. Determine las reacciones sobre la compuerta en los soportes A y B.

Figura 9.40

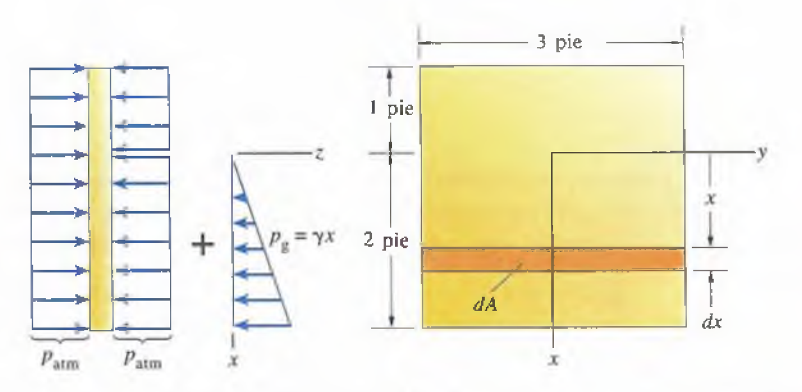
ESTRATEGIA

Las caras izquierda y derecha sobre el nivel del agua están expuestas a la presión atmosférica. De las Ecs. (9.28) y (9.31), la presión en el agua es la suma de la presión atmosférica y la manométrica $p_g = \gamma x$, donde x se mide hacia abajo desde la superficie libre del agua. Los efectos de la presión atmosférica se cancelan (Fig. a), y sólo tenemos que considerar las fuerzas y momentos ejercidos por la presión manométrica. Los determinaremos por integración y calculando el "volumen" de la distribución de presión.

SOLUCIÓN

Integración La cara de la compuerta es la Fig. (b). En términos del elemento diferencial de área dA, la fuerza de la presión manométrica es

$$F = \int_A p_g \, dA = \int_0^2 (\gamma x) 3 \, dx = 374.4 \text{ lb}.$$



(a) Las presiones actuando sobre las caras de la compuerta.

(b) La cara de la compuerta y el elemento diferencial dA.

y el momento respecto al eje y es

$$M = \int_A x p_g \, dA = \int_0^2 x(\gamma x) 3 \, dx = 499.2 \text{ lb-pie}.$$

La posición del centro de presión es

$$x_p = \frac{M}{F} = \frac{499.2 \text{ lb-pie}}{374.4 \text{ lb}} = 1.33 \text{ pie}.$$

Analogía del volumen La presión manométrica en el fondo de la compuerta es p_g = (2 pies) (Fig. c): el "volumen" de la distribución de presión es

$$F = \frac{1}{2}[2 \text{ pie}][(2 \text{ pie})(62.4 \text{ lb/pie}^3)][3 \text{ pie}] = 374 \text{ lb}.$$

La coordenada x del centroide de la distribución triangular, que es el centro de presión, es $\frac{2}{3}(2) = 1.33$ pies.

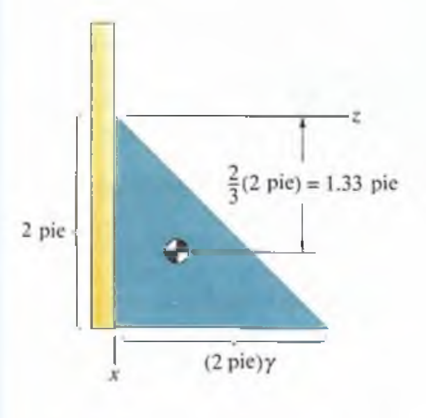
Determinación de las reacciones En la figura (d) dibujamos el diagrama de cuerpo libre de la compuerta. De las ecuaciones de equilibrio

$$\Sigma F_x = A_x + 100 = 0,$$

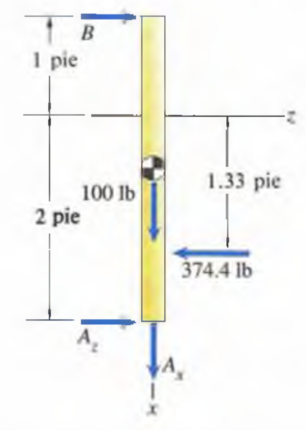
$$\Sigma F_z = A_z + B - 374.4 = 0,$$

$$\Sigma M_{(\text{eje } y)} = (1)B - (2)A_z + (1.33)(374.4) = 0,$$

obtenemos $A_x = -100$ lb, $A_z = 291.2$ lb y $B = 83.2$ lb.



(c) Determinación del "volumen" de la distribución de presión y su centroide.

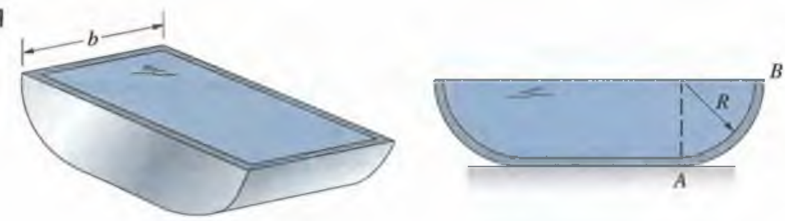


(d) Diagrama de cuerpo libre de la compuerta.

Ejemplo 9.16

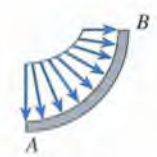
El recipiente de la figura 9.41 está lleno con un líquido cuya densidad es γ. Determine la fuerza ejercida por la presión del líquido sobre la pared cilíndrica AB.

Figura 9.41



ESTRATEGIA

La presión del líquido sobre la pared cilíndrica varía con la profundidad (Fig. a). Es la fuerza ejercida por esta distribución de presión la que queremos determinar. Podríamos determinarla integrando sobre la superficie cilíndrica, pero podemos evitar esto dibujando un diagrama de cuerpo libre del cuarto de cilindro de líquido a la derecha de A.



(a) La presión del líquido sobre la pared AB.

SOLUCIÓN

Dibujamos el diagrama de cuerpo libre del cuarto de cilindro de líquido de la figura (b). La distribución de presión sobre la superficie cilíndrica del líquido es la misma que actúa sobre la pared cilíndrica. Si denotamos con la fuerza $\mathbf{F}_p$ ejercida sobre el líquido por esta distribución de presión, la fuerza ejercida por el líquido sobre la pared cilíndrica es $-\mathbf{F}_p$.

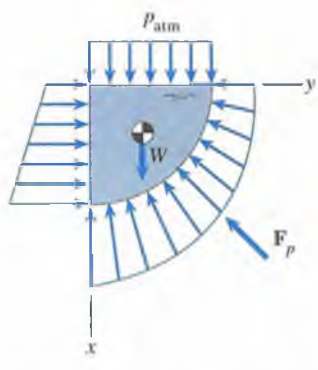
Las otras fuerzas paralelas al plano x-y que actúan sobre el cuarto de cilindro de líquido son su peso, la presión atmosférica en la superficie superior y la distribución de presión del líquido sobre el lado izquierdo. El volumen de líquido es $(\frac{1}{4}\pi R^2)b$, por lo que la fuerza ejercida sobre el diagrama de cuerpo libre por el peso del líquido es $\frac{1}{4}\gamma\pi R^2 b\mathbf{i}$. La fuerza ejercida sobre la superficie superior por la presión atmosférica es $Rbp_{\text{atm}}\mathbf{i}$.

Podemos integrar para determinar la fuerza ejercida por la presión sobre el lado izquierdo del diagrama de cuerpo libre. Su magnitud es

$$\int_A p\,dA = \int_0^R (p_{\text{atm}} + \gamma x)b\,dx = Rb\left(p_{\text{atm}} + \frac{1}{2}\gamma R\right).$$

De la ecuación de equilibrio

$$\Sigma\mathbf{F} = \frac{1}{4}\gamma\pi R^2 b\,\mathbf{i} + Rbp_{\text{atm}}\,\mathbf{i} + Rb\left(p_{\text{atm}} + \frac{1}{2}\gamma R\right)\mathbf{j} + \mathbf{F}_p = \mathbf{0},$$



(b) Diagrama de cuerpo libre del líquido a la derecha de A.

obtenemos la fuerza ejercida por la presión del líquido sobre la pared AB:

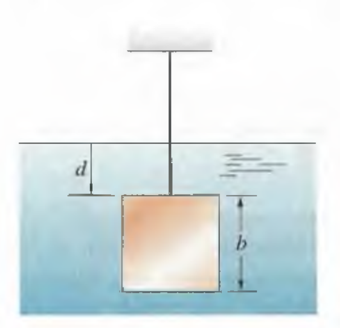
$$-\mathbf{F}_p = Rb\left(p_{\text{atm}} + \frac{\pi}{4}\gamma R\right)\mathbf{i} + Rb\left(p_{\text{atm}} + \frac{1}{2}\gamma R\right)\mathbf{j}.$$

Problemas

9.98 Un vehículo sumergible opera cerca del fondo del Océano Índico, a 1 milla de profundidad. El peso específico γ del agua es de aproximadamente 64 lb/pie^3, y la presión atmosférica p_{atm} = 2120 lb/pie^2. Determine la presión sobre la superficie del vehículo (a) en lb/pulg^2; (b) en Pa.

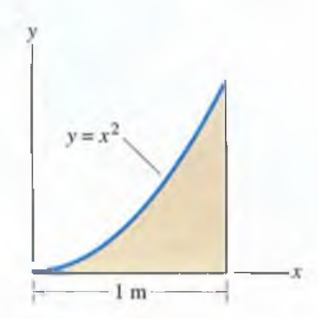
9.99 Un ingeniero que planea un sistema de abastecimiento de agua para una comunidad calcula que, considerando el consumo máximo esperado, la caída de presión entre el sistema central y el hidrante más alejado será de 25 lb/pulg^2. La estación de bomberos indica que se requiere una presión manométrica de 40 lb/pulg^2 en el hidrante. El peso específico del agua es γ = 62.4 lb/pie^3. ¿Qué altura debe tener una torre de agua en el sistema central para proporcionar la presión necesaria?

9.100 Un cubo de cierto material está suspendido bajo la superficie de un líquido de peso específico γ. Calcule las fuerzas ejercidas sobre las caras del cubo por la presión y demuestre que su suma es una fuerza hacia arriba de magnitud γb^3.



P9.100

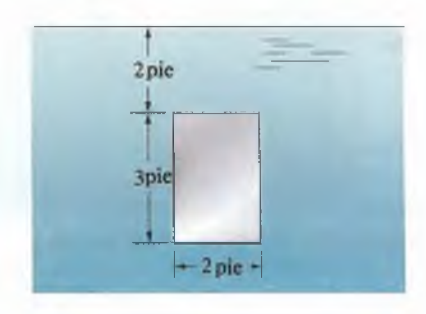
9.101 El área mostrada está sometida a una presión *uniforme* p_{atm} = 1 × 10^5 Pa.
(a) ¿Qué valor tiene la fuerza total ejercida por la presión sobre el área?
(b) ¿Qué valor tiene el momento respecto al eje y debido a la presión sobre el área?



P9.101

9.102 Determine las coordenadas del centro de presión en el problema 9.101.

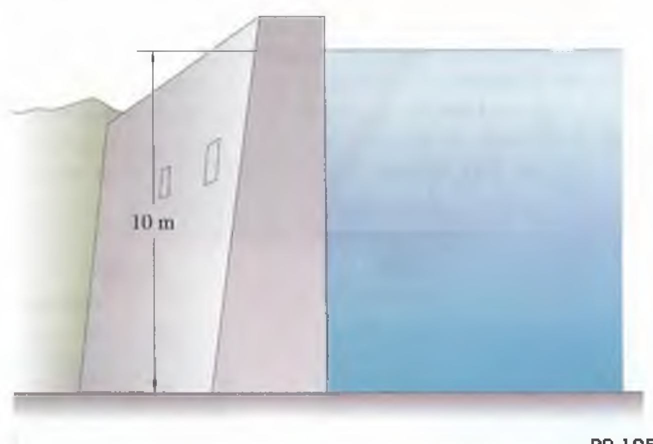
9.103 La parte superior de la placa rectangular mostrada está a 2 pies bajo la superficie de un lago. La presión atmosférica es p_{atm} = 2120 lb/pie^2 y el peso específico del agua es γ = 62.4 lb/pie^3
(a) Qué valor tiene la presión máxima ejercida sobre la placa por el agua?
(b) Determine la fuerza ejercida sobre una cara de la placa por la presión del agua.



P9.103

9.104 ¿A qué distancia de la parte superior de la placa del problema 9.103 se encuentra el centro de presión?

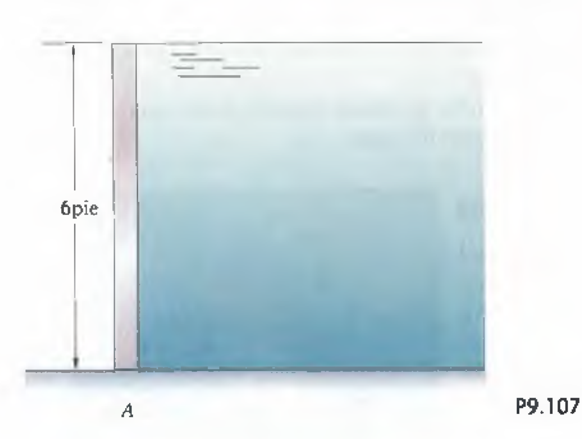
9.105 El ancho de la presa (perpendicular a la página) es de 100 m. La densidad del agua es ρ = 1000 kg/m^3. Determine la fuerza ejercida por la presión manométrica del agua sobre la presa (a) por integración; (b) calculando el "volumen" de la distribución de presión.



P9.105

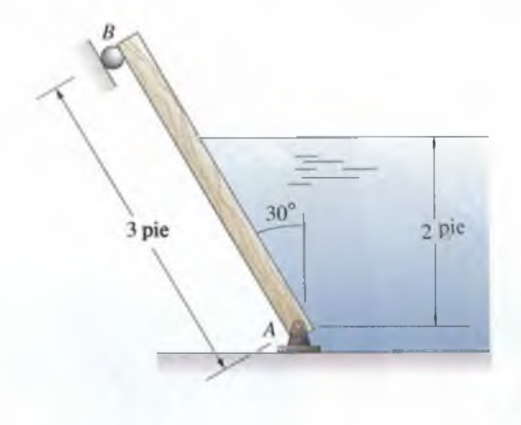
9.106 En el problema 9.105, ¿a qué distancia de la superficie libre del agua está el centro de presión debido a la presión manométrica del agua sobre la presa?

9.107 El ancho de la compuerta (perpendicular a la página) de la figura es de 4 pies y su peso es de 200 lb. El peso específico del agua es $\gamma = 62.4$ lb/pie^3 y la presión atmosférica es $p_{\text{atm}} = 2120$ lb/pie^2. Determine las reacciones sobre la compuerta en A.



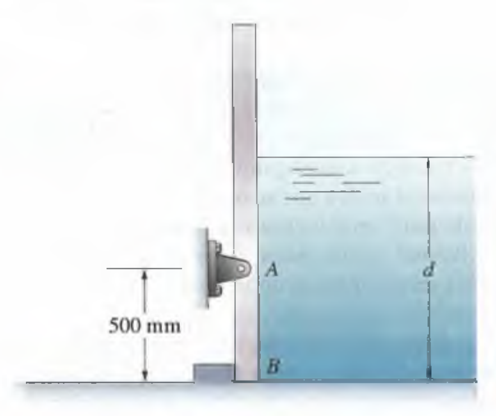
P9.107

9.108 La compuerta homogénea mostrada pesa 100 lb y su ancho (perpendicular a la página) es de 3 pies. El peso específico del agua es $\gamma = 62.4$ lb/pie^3 y la presión atmosférica es $p_{\text{atm}} = 2120$ lb/pie^2. Determine las reacciones en A y B.



P9.108

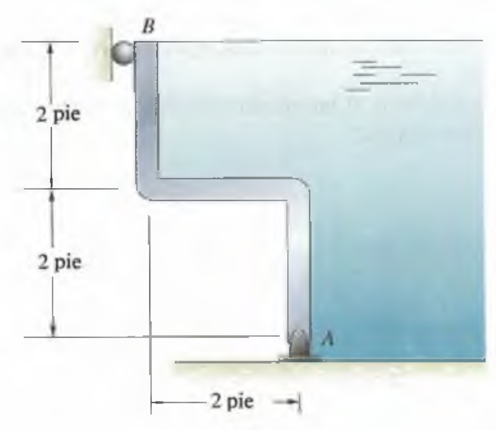
9.109 La compuerta mostrada tiene agua con profundidad $d = 1$ m en uno de sus lados. El ancho (perpendicular a la página) de la compuerta es de 2 m y su peso es de 800 N. La densidad del agua es $\rho = 1000$ kg/m^3 y la presión atmosférica es $p_{\text{atm}} = 1 \times 10^5$ Pa. Determine las reacciones sobre la compuerta en A y B. (El soporte en B ejerce sólo una reacción horizontal sobre la compuerta.)



P9.109

9.110 Cuando la profundidad d del agua del problema 9.109 excede de cierto valor, la compuerta gira y el agua sale. ¿Cuál es este valor?

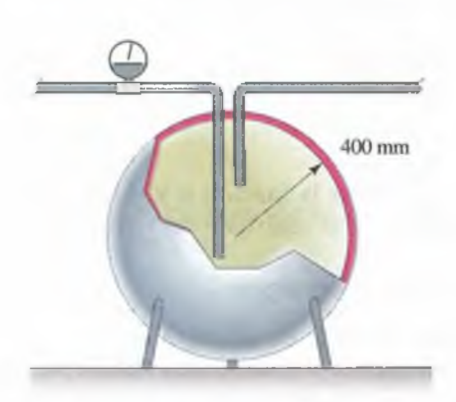
9.111 La compuerta mostrada tiene agua con profundidad de 4 pies en uno de sus lados. El ancho (perpendicular a la página) de la compuerta es de 8 pies. El peso específico del agua es $\gamma = 62.4$ lb/pie^3 y la presión atmosférica es $p_{\text{atm}} = 2120$ lb/pie^2. Si se ignora el peso de la compuerta, ¿qué valor tienen las reacciones en A y B?



P9.111

9.112 Un tanque esférico de 400 mm de radio interno está lleno de agua ($\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$). La presión del agua en la parte superior del tanque es 4×10^5 Pa.
(a) ¿Cuál es la presión del agua en el fondo del tanque?
(b) ¿Qué valor tiene la fuerza total ejercida por la presión del agua sobre la superficie interior del tanque?

Estrategia: Para la parte (b), dibuje un diagrama de cuerpo libre de la esfera de agua en el tanque.

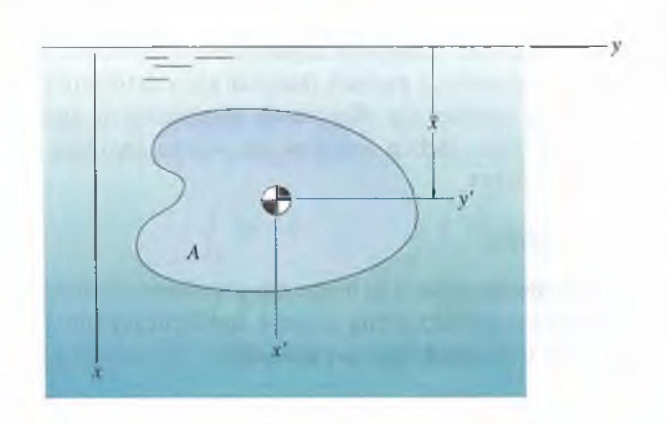


P9.112

9.113 Considere un área A plana vertical bajo la superficie de un líquido. Sea p_0 la presión en la superficie.
(a) Demuestre que la fuerza ejercida por la presión sobre el área es $F = \bar{p}A$, donde $\bar{p} = p_0 + \gamma\bar{x}$ es la presión del líquido en el centroide del área.
(b) Demuestre que la coordenada x del centro de presión es

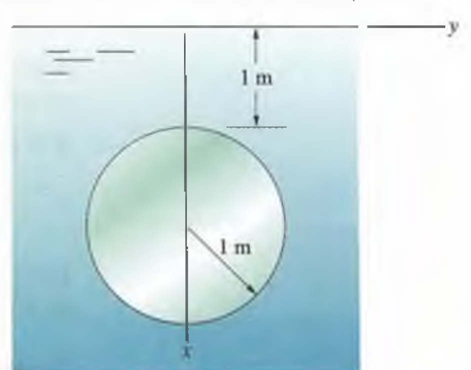
$$x_p = \bar{x} + \frac{\gamma I_{y'}}{\bar{p}A},$$

donde $I_{y'}$ es el momento de inercia del área respecto al eje y' que pasa por su centroide.



P9.113

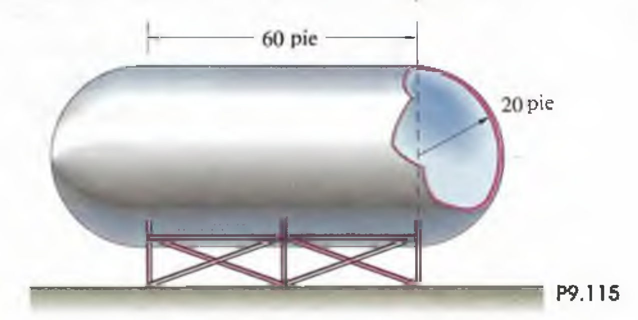
9.114 Una placa circular de 1 m de radio se encuentra bajo la superficie de un tanque de agua en reposo. La presión atmosférica es $p_{\text{atm}} = 100$ kPa, y la densidad del agua es $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$. Determine (a) la fuerza ejercida por la presión del agua sobre una cara de la placa; y (b) la coordenada x del centro de presión (véase el Problema 9.113).



P9.114

9.115 Un tanque consiste en un cilindro con extremos semiesféricos. Está lleno de agua ($\gamma = 62.4 \text{ lb/pie}^3$), y la presión del agua en la parte superior del tanque es de 3000 lb/pie^2. Determine la magnitud de la fuerza ejercida por la presión del agua sobre uno de los extremos semiesféricos del tanque.

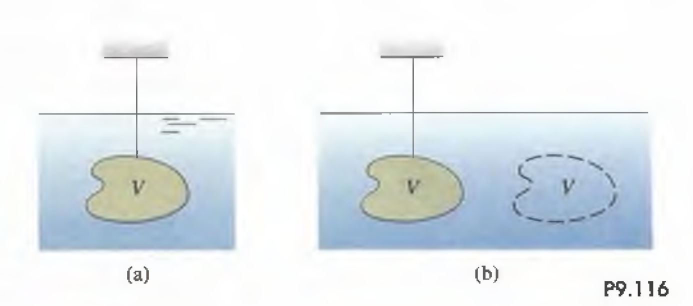
Estrategia: Dibuje un diagrama de cuerpo libre del agua a la derecha de la línea discontinua (véase el Ej. 9.16).



P9.115

9.116 Un cuerpo de volumen V y peso W está suspendido bajo la superficie de un líquido en reposo de peso específico γ (Fig. a). Demuestre que la tensión en la cuerda es $W - V\gamma$. Este resultado se debe a Arquímedes (287-212 A.C.).

Estrategia: Dibuje el diagrama de cuerpo libre de un volumen de líquido con igual forma y posición (Fig. b).



(a) (b)

P9.116

Resumen del capítulo

Fuerzas distribuidas a lo largo de una línea

Una fuerza distribuida a lo largo de una línea se describe con una función w tal que la fuerza sobre un elemento diferencial dx de la línea es wdx. La fuerza ejercida por una carga distribuida es

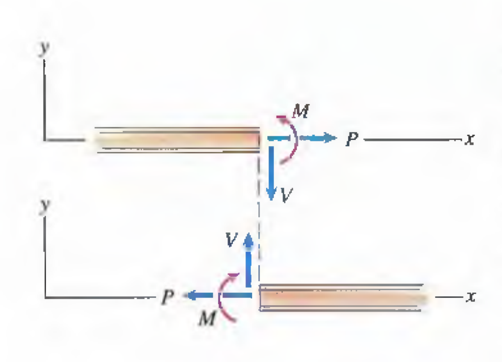
$$F = \int_L w\,dx, \qquad \text{Ec. (9.1)}$$

y el momento respecto al origen es

$$M = \int_L xw\,dx. \qquad \text{Ec. (9.2)}$$

La fuerza F es igual al "área" entre la función w y el eje x, y equivale a la carga distribuida si se coloca en el centroide del "área".

Fuerzas y momentos internos en vigas



Las fuerzas y los momentos internos en una viga se expresan como la **fuerza axial** P, la **fuerza cortante** V y el **momento flector** M. Sus direcciones positivas están definidas en la figura (a).

Cortando una viga en una posición arbitraria x, la fuerza axial P, la fuerza cortante V y el momento flector M se pueden determinar en función de x. Dependiendo de la carga y de los soportes de la viga, puede ser necesario dibujar varios diagramas de cuerpo libre a fin de determinar las distribuciones para toda la viga. Las gráficas de V y M como funciones de x son los **diagramas de fuerza cortante y de momento flector.**

La carga distribuida, la fuerza cortante y el momento flector en una parte de una viga sometida exclusivamente a una carga distribuida satisfacen las relaciones

$$\frac{dV}{dx} = -w, \qquad \text{Ec. (9.7)}$$

$$\frac{dM}{dx} = V. \qquad \text{Ec. (9.8)}$$

Para segmentos de una viga que están descargados o sometidos a una carga distribuida, estas ecuaciones se pueden integrar para determinar V y M en función de x. Para obtener los diagramas completos de fuerza cortante y de momento flector, deben tomarse en cuenta también las fuerzas concentradas y los pares.

Fuerzas internas en cables

Cargas uniformemente distribuidas a lo largo de una línea horizontal

Si un cable suspendido está sometido a una carga w horizontalmente distribuida, la curva descrita por el cable es la parábola

$$y = \frac{1}{2}ax^2, \qquad \text{Ec. (9.15)}$$

donde $a = w/T_0$ y T_0 es la tensión en el cable en $x = 0$. La tensión en el cable en una posición x es

$$T = T_0\sqrt{1 + a^2x^2}, \qquad \text{Ec. (9.16)}$$

y la longitud del cable en el intervalo de 0 a x es

$$s = \frac{1}{2}\left\{x\sqrt{1 + a^2x^2} + \frac{1}{a}\ln\left[ax + \sqrt{1 + a^2x^2}\right]\right\}. \qquad \text{Ec. (9.17)}$$

Cargas uniformemente distribuidas a lo largo del cable Si un cable está sometido a una carga w distribuida en toda su longitud, la curva descrita por el cable es la catenaria

$$y = \frac{1}{2a}(e^{ax} + e^{-ax} - 2) = \frac{1}{a}(\cosh ax - 1), \qquad \text{Ec. (9.25)}$$

donde $a = w/T_0$ y T_0 es la tensión en el cable en $x = 0$. La tensión en el cable en una posición x es

$$T = T_0\sqrt{1 + \frac{1}{4}(e^{ax} - e^{-ax})^2} = T_0 \cosh ax, \qquad \text{Ec. (9.26)}$$

y la longitud del cable en el intervalo horizontal de 0 a x es

$$s = \frac{1}{2a}(e^{ax} - e^{-ax}) = \frac{\operatorname{senh} ax}{a}. \qquad \text{Ec. (9.27)}$$

Cargas discretas Al suspender de un cable N pesos conocidos, si se conocen también las posiciones de los puntos de conexión del cable, las posiciones horizontales de los puntos de conexión de los pesos, y la posición vertical del punto de conexión de uno de ellos, se pueden hallar la configuración del cable y la tensión en cada uno de sus segmentos.

Presión

La presión p sobre una superficie se define de manera que la fuerza normal ejercida sobre un elemento dA de la superficie es $p\,dA$. La fuerza normal total ejercida por la presión sobre un *área plana* A es

$$F = \int_A p\,dA. \qquad \text{Ec. (9.29)}$$

El **centro de presión** es el punto sobre A en que debe colocarse F para que equivalga a la presión sobre A. Sus coordenadas son

$$x_p = \frac{\int_A xp\,dA}{\int_A p\,dA}, \qquad y_p = \frac{\int_A yp\,dA}{\int_A p\,dA}. \qquad \text{Ec. (9.30)}$$

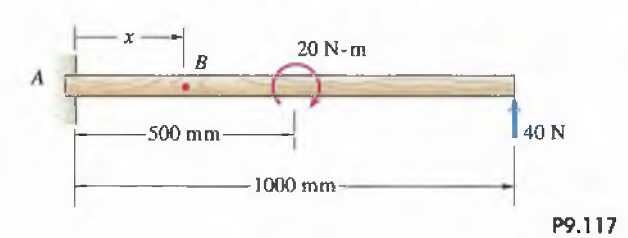
La presión en un líquido en reposo es

$$p = p_0 + \gamma x, \qquad \text{Ec. (9.31)}$$

donde p_0 es la presión en la superficie, γ es el peso específico del líquido y x es la profundidad. Si la superficie del líquido está en contacto con la atmósfera, $p_0 = p_{atm}$.

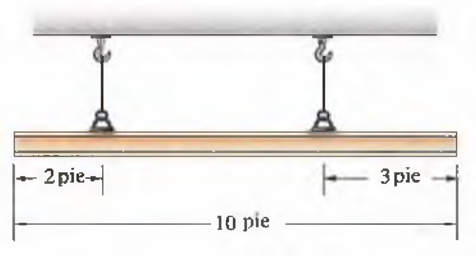
Problemas de repaso

9.117 Determine las fuerzas internas y el momento en el punto B mostrado: (a) si $x = 250$ mm; (b) si $x = 750$ mm.



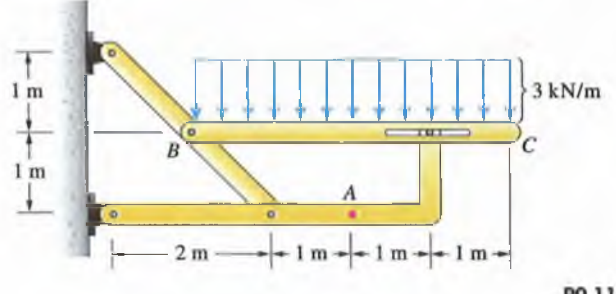
P9.117

9.118 La viga homogénea mostrada pesa 1000 lb. ¿Qué valor tienen las fuerzas internas y el momento flector en su punto medio?



P9.118

9.119 Determine las fuerzas internas y el momento en el punto A mostrado.



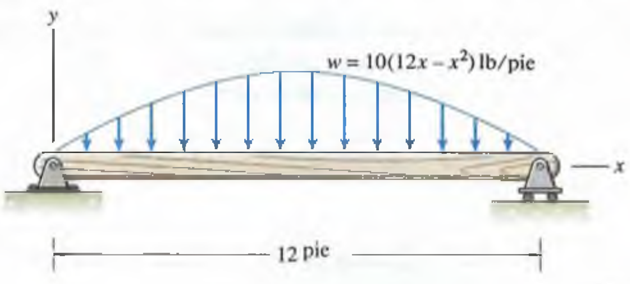
P9.119

9.120 Dibuje los diagramas de fuerza cortante y de momento flector de la viga del problema 9.117.

9.121 Dibuje los diagramas de fuerza cortante y de momento flector de la viga del problema 9.118.

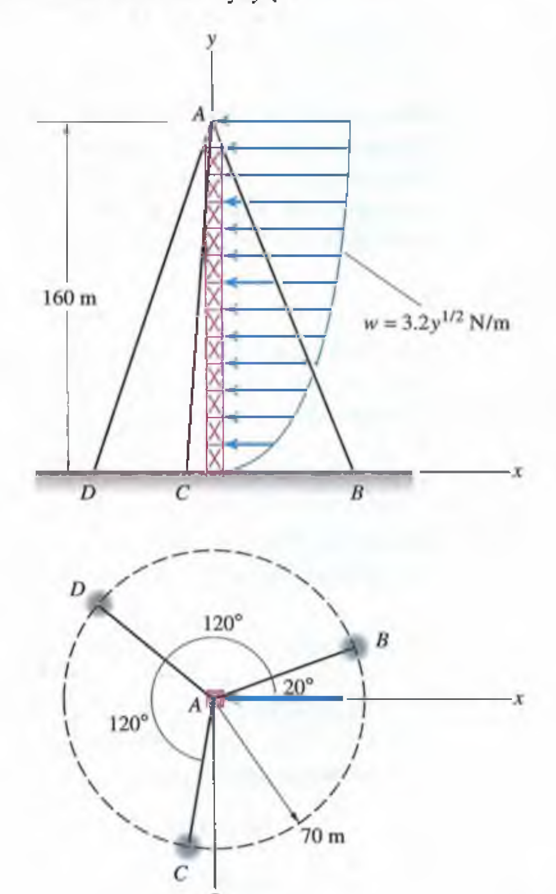
9.122 Dibuje los diagramas de fuerza cortante y de momento flector de la viga del problema 9.119.

9.123 Utilice las ecuaciones (9.7)-(9.12) para determinar los diagramas de fuerza cortante y de momento flector de la viga mostrada.



P9.123

9.124 La fuerza ejercida sobre la torre por el viento está descrita por la fuerza distribuida que se muestra. El viento es paralelo al eje x. Si la fuerza del viento se representa con una sola fuerza equivalente **F**, ¿qué valor tiene **F** y en qué punto su línea de acción corta el eje y?

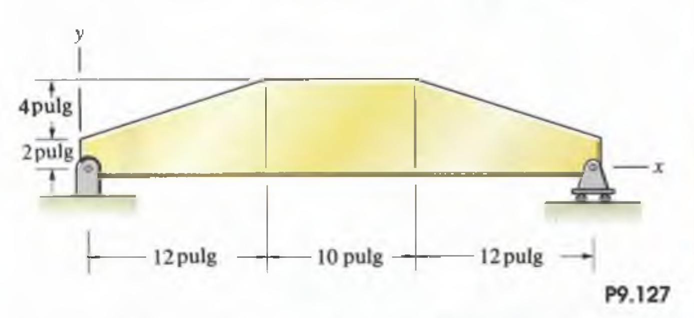


P9.124

9.125 Si la base de la torre (P. 9.124) se representa como un soporte de bola y cuenca y la tensión en el cable AD es de 1 kN, ¿qué valor tienen las tensiones en los cables AB y AC?

9.126 Halle el máximo momento flector en la torre del problema 9.124 y la posición sobre el eje y en que se presenta.

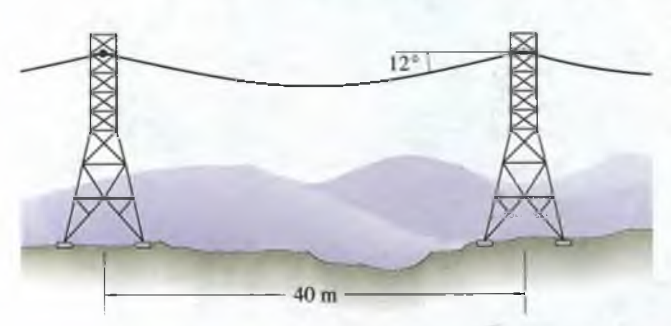
9.127 La placa pesa 234 lb. Obtenga una ecuación para la fuerza cortante V en función de x, de $x = 0$ a $x = 12$ pulg.



P9.127

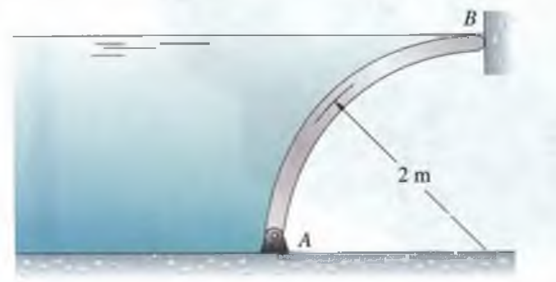
9.128 Dibuje los diagramas de fuerza cortante y de momento flector para la placa del problema 9.127.

9.129 La línea de transmisión tiene una masa de 1.4 kg/m. Si soporta con seguridad una tensión de 5 kN, determine si soportará con seguridad una acumulación de hielo de 4 kg/m.



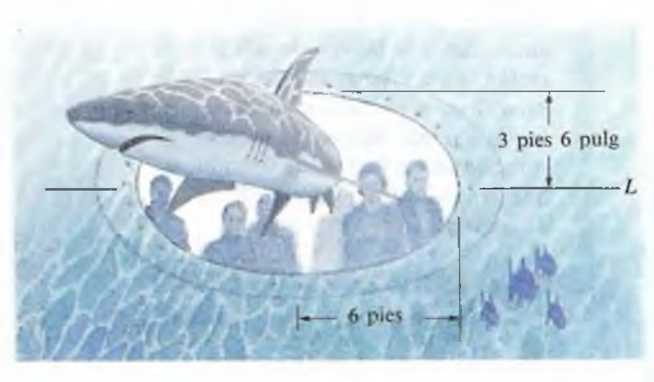
P9.129

9.130 La compuerta tiene agua con 2 m de profundidad en uno de sus lados. El ancho (perpendicular a la página) es de 4 m, y su masa es 160 kg. La densidad del agua es $\rho = 1000$ kg/m^3 y la presión atmosférica es $p_{\text{atm}} = 1 \times 10^5$ Pa. Determine las reacciones sobre la compuerta en A y B. (El soporte en B ejerce sólo una reacción horizontal sobre la compuerta.)



P9.130

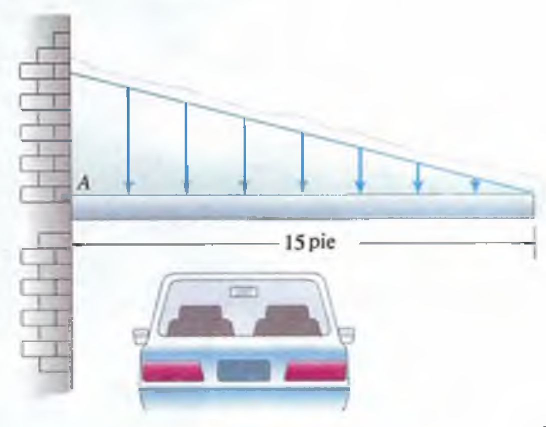
9.131 La profundidad del agua en el centro de la ventana elíptica de un acuario es de 20 pies. Determine la magnitud de la fuerza neta ejercida sobre la ventana por la presión del agua marina ($\gamma = 64$ lb/pie^3) y la presión atmosférica del aire sobre el lado opuesto (véase el Problema 9.113).



P9.131

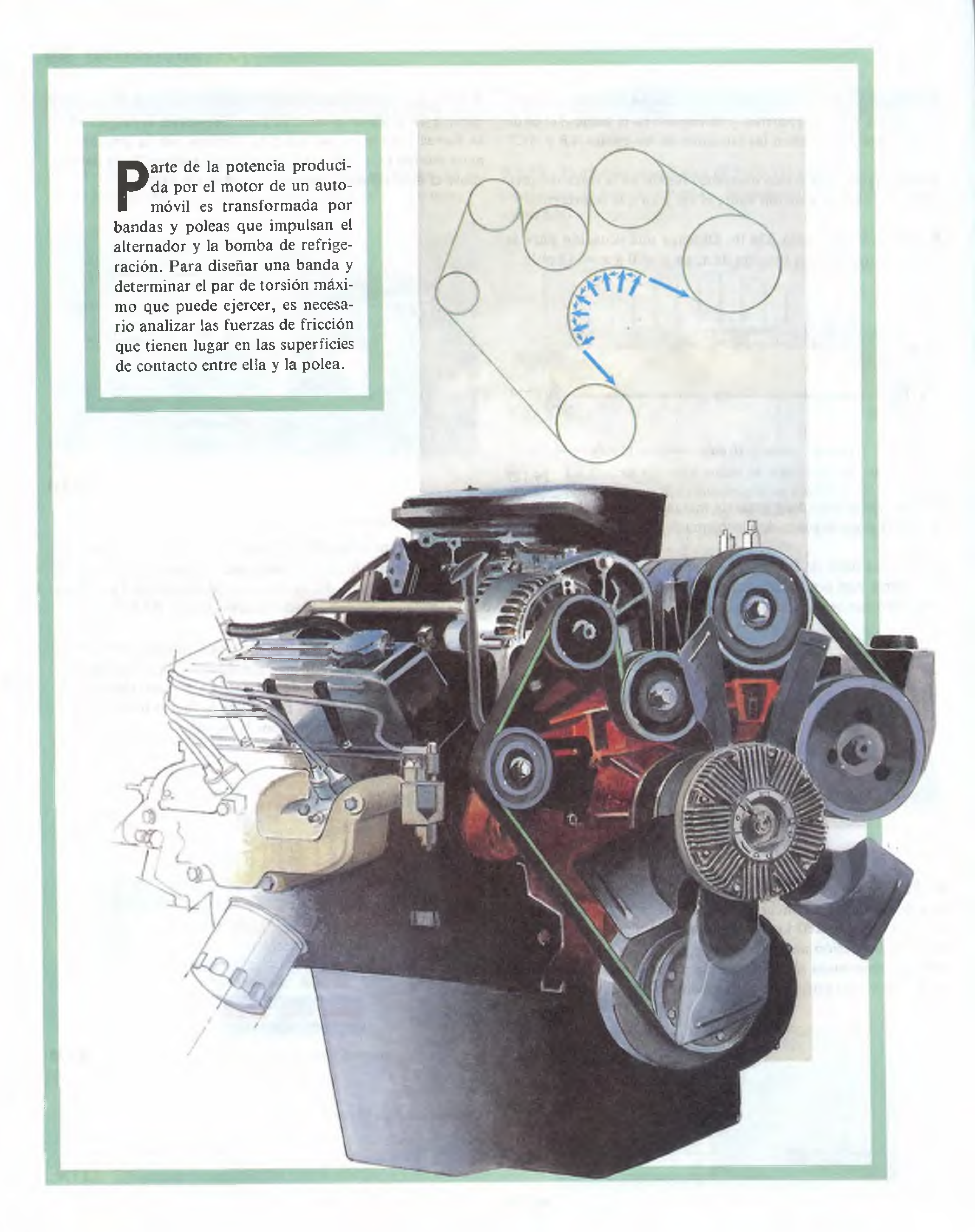
9.132 En el problema 9.131, determine la magnitud del momento neto ejercido sobre la ventana respecto al eje horizontal L por la presión del agua ($\gamma = 64$ lb/pie^3) y la presión atmosférica del aire en el lado opuesto (véase P9.113).

9.133 Un techo en voladizo tiene una acumulación de nieve en forma de cuña. La dimensión del techo, en dirección perpendicular a la página, es de 20 pies. La presión debida a la nieve en A es de 80 lb/pie^2. Determine la fuerza total y el momento respecto a A ejercidos por la nieve.



P9.133

Parte de la potencia producida por el motor de un automóvil es transformada por bandas y poleas que impulsan el alternador y la bomba de refrigeración. Para diseñar una banda y determinar el par de torsión máximo que puede ejercer, es necesario analizar las fuerzas de fricción que tienen lugar en las superficies de contacto entre ella y la polea.

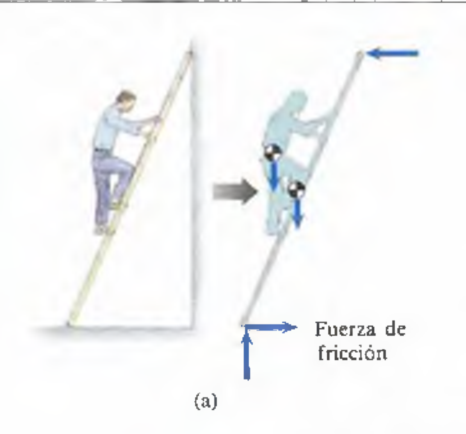


Capítulo 10

Fricción

LAS fuerzas de fricción tienen muchos efectos importantes, tanto deseables como indeseables, en las aplicaciones de ingeniería. Por ejemplo, el funcionamiento adecuado de un automóvil depende de las fuerzas de fricción entre sus neumáticos y el suelo, y entre las bandas y las poleas de su motor, pero la fricción entre sus pistones y cilindros ocasiona un desgaste que se debe minimizar por medio de algún lubricante. En algunos casos hemos visto que las fuerzas de fricción se pueden determinar con las ecuaciones de equilibrio. En este capítulo analizamos la teoría de la fricción de Coulomb, que nos permite calcular la fuerza de fricción máxima que se puede ejercer entre superficies en contacto y la fuerza de fricción ejercida por superficies deslizantes. Esto abre el camino para el análisis de nuevos e importantes tipos de soportes y máquinas, incluidas cuñas, conexiones roscadas, cojinetes y bandas.

10.1 *Teoría de la fricción seca*



Al subir por una escalera, ésta permanece en reposo por la fuerza de fricción ejercida por el piso (Fig. 10.1a). Si se permanece quieto sobre la escalera, las ecuaciones de equilibrio determinan la fuerza de fricción. Pero, hay una cuestión importante que no puede aclararse sólo con las ecuaciones de equilibrio: ¿permanecerá la escalera en reposo o resbalará sobre el piso? Si un camión se estaciona sobre un terreno inclinado, la fuerza de fricción ejercida sobre él por el terreno impide que se deslice cuesta abajo (Fig. 10.1b). Surge otra pregunta: ¿qué pendiente *máxima* puede tener el terreno sin que el camión estacionado se deslice?

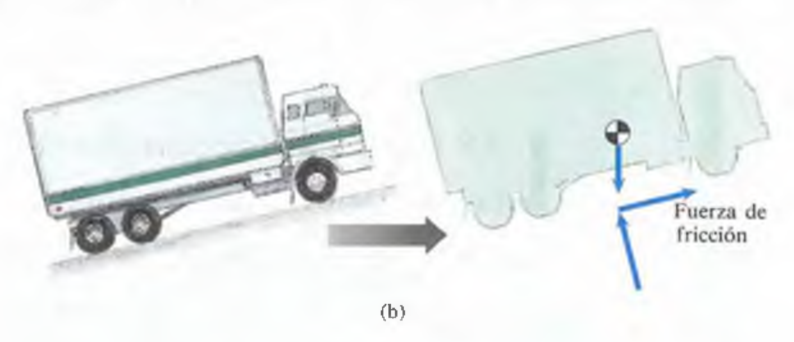


Figura 10.1
Cuerpos soportados por fuerzas de fricción.

Para responder estas preguntas, debemos examinar con mayor detalle la naturaleza de las fuerzas de fricción. Coloque un libro sobre una mesa y empújelo con una pequeña fuerza horizontal (Fig. 10.2a). Si la fuerza que usted ejerce es suficientemente pequeña, el libro no se moverá. En la figura 10.2(b) se muestra el diagrama de cuerpo libre. La fuerza W es el peso del libro, y N es la fuerza normal ejercida por la mesa. La fuerza F es la fuerza horizontal que se aplica, y f es la fuerza de fricción ejercida por la mesa. Como el libro está en equilibrio, $f = F$.



Figura 10.2
(a) Ejerciendo una fuerza horizontal sobre un libro.
(b) Diagrama de cuerpo libre del libro.

Ahora incremente con lentitud la fuerza sobre el libro. Mientras éste permanezca en equilibrio, la fuerza de fricción debe aumentar en forma correspondiente, ya que es igual a la fuerza que se aplica. Cuando ésta llega a ser muy grande, el libro se deslizará sobre la mesa. Después de alcanzar cierto valor máximo, la fuerza de fricción ya no es capaz de mantener el libro en equilibrio. Observe también que la fuerza necesaria para mantener al libro en movimiento es menor que la requerida para que empiece a deslizarse (usted estará familiarizado con este fenómeno si alguna vez trató de empujar un mueble sobre el piso).

¿Cómo ejerce la mesa una fuerza de fricción sobre el libro? ¿Por qué éste se desliza? ¿Por qué para mantenerlo en movimiento se requiere una fuerza menor que para empezar a deslizarlo? Si las superficies de la mesa y del libro se amplifican suficientemente, adquieren un aspecto rugoso (Fig. 10.3). Las fuerzas de fricción surgen en parte debido a las rugosidades o **asperezas** de las superficies en contacto. A escala aún menor, las superficies tienden a formar enlaces atómicos que las adhieren entre sí (Fig. 10.4). La última pregunta planteada arriba la explica, en parte, la necesidad de romper esos enlaces antes de que pueda comenzar el deslizamiento.

En las siguientes secciones veremos una teoría que predice los fenómenos básicos que hemos descrito y que ha resultado útil para representar, en aplicaciones de ingeniería, las fuerzas de fricción entre superficies secas (la fricción entre superficies lubricadas es un fenómeno hidrodinámico que debe analizarse en el contexto de la mecánica de fluidos).

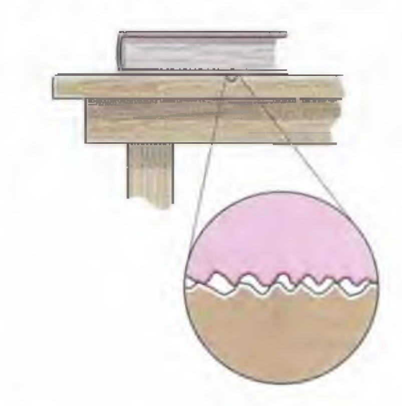


Figura 10.3
Las rugosidades de las superficies se pueden ver en una vista ampliada.

Coeficientes de fricción

La teoría de la fricción seca, o **fricción de Coulomb**, predice las fuerzas de fricción máximas que pueden ser ejercidas por superficies secas en contacto, y que se hallan en reposo entre sí. También predice las fuerzas de fricción ejercidas por las superficies cuando éstas se hallan en movimiento relativo, es decir, deslizándose unas con respecto a otras.



Figura 10.4
Simulación con computador de un enlace de átomos formado entre una punta de níquel y una superficie de oro.

El coeficiente estático La magnitud de la fuerza de fricción *máxima* que se puede ejercer entre dos superficies planas secas en contacto es

$$\boxed{f = \mu_s N,} \qquad (10.1)$$

donde N es la componente normal de la fuerza de contacto entre las superficies y μ_s es una constante llamada **coeficiente de fricción estática**.

Se supone que el valor de μ_s depende sólo de los materiales de las superficies en contacto y de sus condiciones (lisura y grado de contaminación por otros materiales). En la tabla 10.1 se muestran valores típicos de μ_s para varios materiales. El intervalo relativamente grande de valores para cada par de materiales refleja la sensibilidad de μ_s respecto a las condiciones de las superficies. En las aplicaciones de ingeniería suele ser necesario medir el valor de μ_s de las superficies consideradas.

Tabla 10.1 Valores típicos del coeficiente de fricción estática

Materiales	Coeficiente de fricción estática μ_s
Metal sobre metal	0.15-0.20
Mampostería sobre mampostería	0.60-0.70
Madera sobre madera	0.25-0.50
Metal sobre mampostería	0.30-0.70
Metal sobre madera	0.20-0.60
Hule sobre concreto u hormigón	0.50-0.90

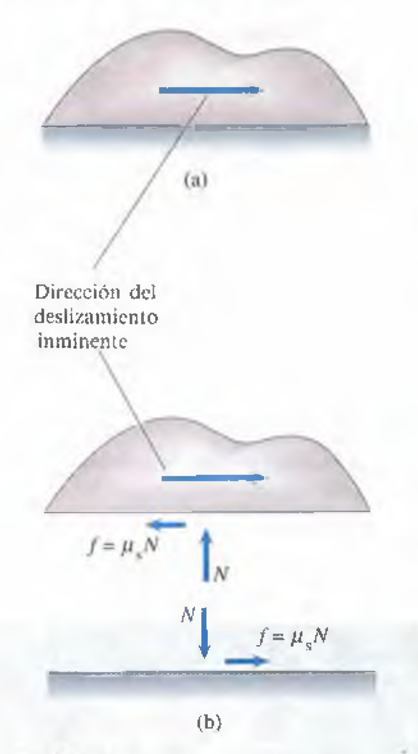


Figura 10.5

(a) La superficie superior está a punto de deslizarse hacia la derecha.
(b) Direcciones de las fuerzas de fricción.

Volvamos al ejemplo de la figura 10.2. Si la fuerza F sobre el libro es tan pequeña que éste no se mueve, la condición de equilibrio indica que la fuerza de fricción $f = F$. ¿Para qué necesitamos la teoría de la fricción seca? Si se incrementara F, la fuerza f aumentará hasta que el libro se deslice. La ecuación (10.1) da la fuerza de fricción *máxima* que las dos superficies pueden ejercer y, por ende, la fuerza máxima F que se puede aplicar sin que el libro se deslice. Si se conoce el coeficiente de fricción estática μ_s entre el libro y la mesa y el peso W del libro, como la fuerza normal $N = W$, el valor máximo de F es $F = f = \mu_s W$.

La ecuación (10.1) determina la magnitud de la fuerza máxima de fricción pero no su dirección. La fuerza de fricción es un máximo, y la ecuación (10.1) es aplicable, si las dos superficies están a punto de deslizarse una con respecto a la otra. Se dice que el deslizamiento es **inminente** y que las fuerzas de fricción resisten el movimiento inminente. Si (Fig. 10.5a) la superficie inferior está fija y el deslizamiento de la superficie superior hacia la derecha es inminente, la fuerza de fricción sobre la superficie superior resistirá este movimiento inminente (Fig. 10.5b). La fuerza de fricción sobre la superficie inferior tendrá dirección opuesta.

El coeficiente cinético Según la teoría de la fricción seca, la magnitud de la fuerza de fricción entre las dos superficies planas y secas en contacto, que están en movimiento (deslizamiento) relativo, es

$$\boxed{f = \mu_k N,} \tag{10.2}$$

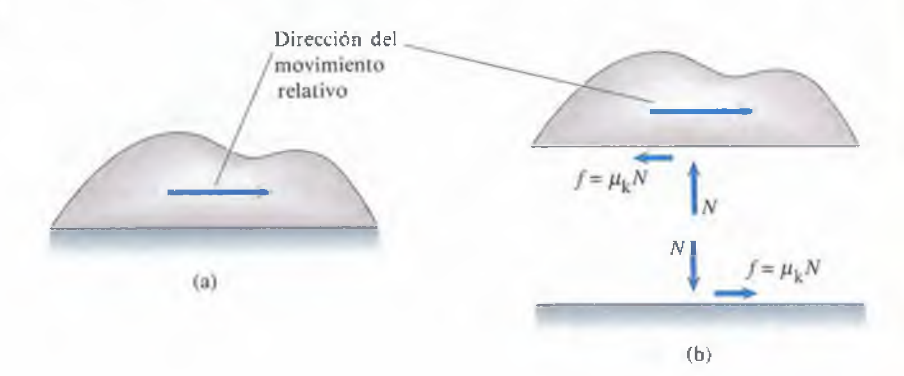
donde N es la fuerza normal entre las superficies y μ_k es el **coeficiente de fricción cinética**. Se supone que el valor de μ_k depende sólo de las composiciones y condiciones de las superficies. Para un par de superficies dado, su valor es generalmente menor que el de μ_s.

Una vez que el libro de la figura 10.2 ha comenzado a deslizarse, la fuerza de fricción $f = \mu_k N = \mu_k W$. Por tanto, la fuerza que debe ejercerse para mantener el libro en movimiento uniforme es $F = f = \mu_k W$.

Cuando dos superficies están deslizándose entre sí, las fuerzas de fricción resisten el movimiento relativo. Suponga que en la figura 10.6(a) la superficie inferior se encuentra fija y que la superficie superior está moviéndose hacia la derecha. La fuerza de fricción sobre la superficie superior actúa en dirección opuesta a la de su movimiento (Fig. 10.6b). La fuerza de fricción sobre la superficie inferior actúa en dirección opuesta.

Figura 10.6

(a) La superficie superior se está moviendo hacia la derecha con respecto a la superficie inferior.
(b) Direcciones de las fuerzas de fricción.



Ángulos de fricción

En vez de que la reacción ejercida en una superficie por su contacto con otra se descomponga en una fuerza normal N y en una fuerza de fricción f (Fig. 10.7a), podemos expresarla en términos de su magnitud R y del **ángulo de fricción** θ entre la fuerza y la normal a la superficie (Fig. 10.7b). Las fuerzas normal y de fricción están relacionadas con R y θ por

$$f = R \operatorname{sen} \theta, \qquad (10.3)$$

$$N = R \cos \theta. \qquad (10.4)$$

El valor de θ cuando el deslizamiento es inminente se llama **ángulo de fricción estática** θ_s, y su valor cuando las dos superficies están en movimiento relativo se llama **ángulo de fricción cinética** θ_k. Utilizando las ecuaciones (10.1)-(10.4), podemos expresar los ángulos de fricción estática y cinética en términos de los coeficientes de fricción:

$$\tan \theta_s = \mu_s, \qquad (10.5)$$

$$\tan \theta_k = \mu_k. \qquad (10.6)$$

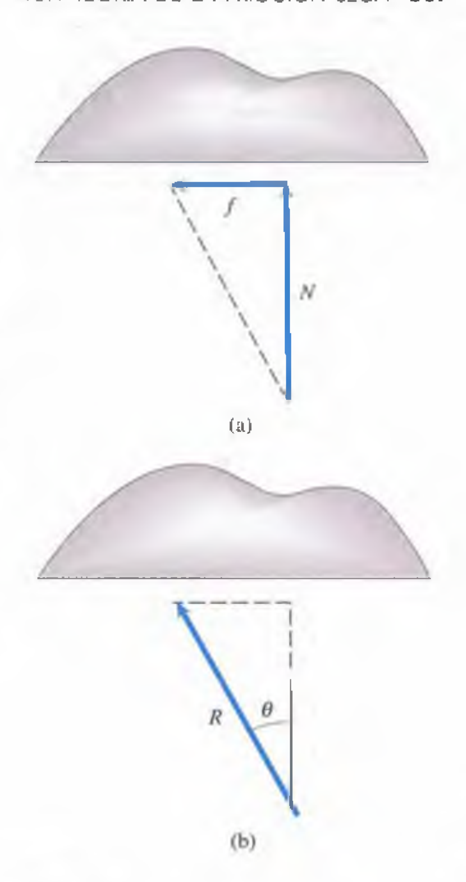


Figura 10.7
(a) Fuerza normal N y fuerza de fricción f.
(b) Magnitud R y ángulo de fricción θ.

En los siguientes ejemplos analizaremos problemas que implican fuerzas de fricción. Un paso importante en la solución de tales problemas es cómo evaluar las fuerzas de fricción o los ángulos de fricción. Cuando se sabe que el deslizamiento es inminente, la magnitud de la fuerza de fricción está dada por la ecuación (10.1) y el ángulo de fricción por la ecuación (10.5). Cuando las superficies están deslizándose entre sí, la magnitud de la fuerza de fricción está dada por la ecuación (10.2) y el ángulo de fricción por la ecuación (10.6). De lo contrario, la fuerza de fricción y el ángulo de fricción se deben determinar partiendo de las ecuaciones de equilibrio. La secuencia de decisiones se resume en la figura 10.8.

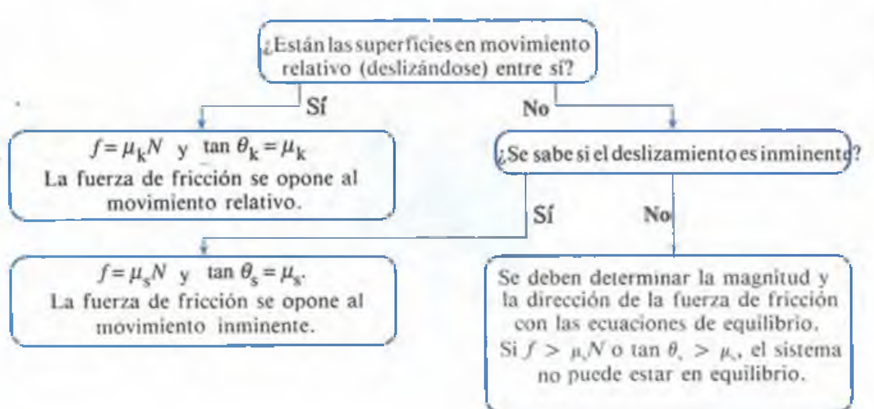
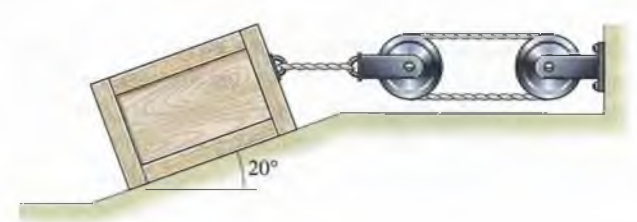


Figura 10.8
Evaluación de la fuerza de fricción.

Ejemplo 10.1

El dispositivo de la figura 10.9 ejerce una fuerza horizontal sobre la caja en reposo. La caja pesa 800 N y el coeficiente de fricción estática entre el cajón y la rampa es $\mu_s = 0.4$.
(a) Si la cuerda ejerce una fuerza de 400 N sobre la caja, ¿cuál es la fuerza de fricción ejercida por la rampa sobre la caja?
(b) ¿Cuál es la máxima fuerza que la cuerda puede ejercer sobre la caja sin que ésta se deslice hacia arriba sobre la rampa?

Figura 10.9



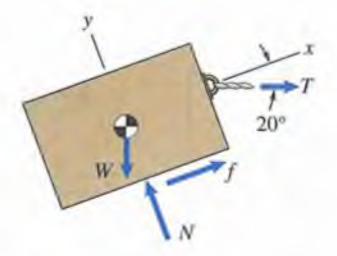
ESTRATEGIA

(a) Con el algoritmo de la figura 10.8 vemos cómo evaluar la fuerza de fricción. La caja no está deslizándose y no sabemos si el deslizamiento es inminente: debemos hallar la fuerza de fricción con las ecuaciones de equilibrio.
(b) Queremos determinar el valor de la fuerza que ocasiona que la caja esté a punto de deslizarse hacia abajo sobre la rampa. Cuando el deslizamiento es inminente, la magnitud de la fuerza de fricción es $f = \mu_s N$ y la fuerza de fricción se opone al deslizamiento inminente. Podemos usar las ecuaciones de equilibrio para determinar la fuerza ejercida por la cuerda. Podemos también obtener la solución usando el ángulo de fricción estática.

SOLUCIÓN

(a) En la figura (a) dibujamos el diagrama de cuerpo libre de la caja, mostrando la fuerza T ejercida por la cuerda, el peso W de la caja, la fuerza normal N y la fuerza de fricción f ejercida por la rampa. Podemos escoger arbitrariamente la dirección de f y nuestra solución indicará la dirección correcta de la fuerza de fricción. Alineando el sistema coordenado con la rampa como se muestra, obtenemos la ecuación de equilibrio

$$\Sigma F_x = f + T\cos 20° - W \operatorname{sen} 20° = 0.$$



(a) Diagrama de cuerpo libre de la caja.

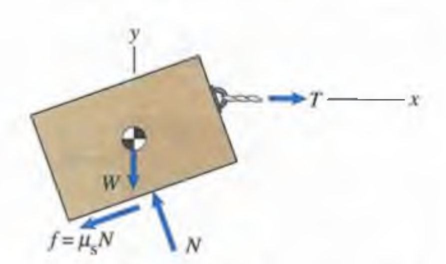
Despejando la fuerza de fricción obtenemos

$$f = -T\cos 20^\circ + W\,\text{sen}\,20^\circ = -(400)\cos 20^\circ + (800)\,\text{sen}\,20^\circ$$

$$= -102.3\text{ N}.$$

El signo menos indica que la dirección de la fuerza de fricción sobre la caja es hacia abajo a lo largo de la rampa.

(b) La fuerza de fricción es $f = \mu_s N$ y se opone al deslizamiento inminente. Para hacer más sencilla la obtención de T, alineamos el sistema coordenado como se muestra de la figura (b) y planteamos las ecuaciones de equilibrio



(b) Diagrama cuando el deslizamiento hacia arriba sobre la rampa es inminente.

$$\Sigma F_x = T - N\,\text{sen}\,20^\circ - \mu_s N\cos 20^\circ = 0,$$

$$\Sigma F_y = N\cos 20^\circ - \mu_s N\,\text{sen}\,20^\circ - W = 0.$$

Despejando N de la segunda ecuación obtenemos

$$N = \frac{W}{\cos 20^\circ - \mu_s\,\text{sen}\,20^\circ} = \frac{800}{\cos 20^\circ - (0.4)\,\text{sen}\,20^\circ} = 996.4\text{ N}.$$

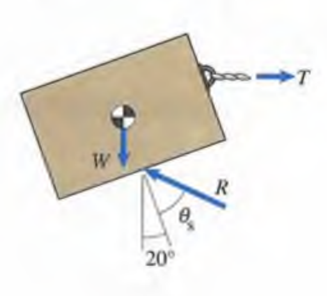
Luego, de la primera ecuación, T es

$$T = N\,\text{sen}\,20^\circ + \mu_s N\cos 20^\circ = (996.4)[\text{sen}\,20^\circ + (0.4)\cos 20^\circ]$$

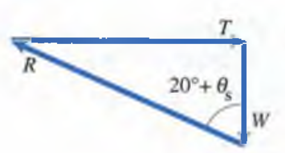
$$= 715.3\text{ N}.$$

Solución alternativa Determinamos T representando la reacción ejercida por la rampa como una sola fuerza (Fig. c). Como el deslizamiento de la caja hacia arriba por la rampa es inminente, R se opone a él y el ángulo de fricción es $\theta_s = \arctan\mu_s = \arctan(0.4) = 21.8^\circ$. Del triángulo formado por la suma de las fuerzas sobre la caja (Fig. d):

$$T = W\tan(20^\circ + \theta_s) = (800)\tan(20^\circ + 21.8^\circ) = 715.3\text{ N}.$$



(c) Representación de la reacción ejercida por la rampa como una sola fuerza.



(d) Las fuerzas sobre la caja.

Ejemplo 10.2

Figura 10.10

Supongamos que queremos empujar el cofre de herramientas de la figura 10.10 sobre el piso aplicando la fuerza horizontal F. Si aplicamos la fuerza a una altura h muy grande, el cofre se volcará antes de deslizarse. Si el coeficiente de fricción estática entre el piso y el cofre es μ_s, ¿cuál es el máximo valor de h para que el cofre se deslice antes de volcarse?

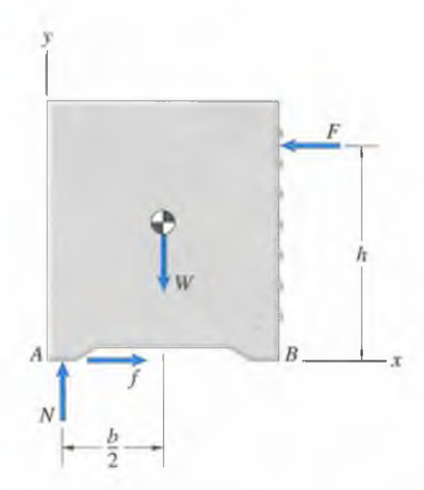
ESTRATEGIA

Cuando el cofre está a punto de volcarse, se encuentra en equilibrio sin ninguna reacción en B. Podemos usar esta condición para determinar F en función de h. Luego, determinando el valor de F que hará que el cofre se deslice, obtendremos el valor de h que ocasionará que el cofre esté a punto de volcarse y a punto de deslizarse.

SOLUCIÓN

En la figura (a) dibujamos el diagrama de cuerpo libre del cofre cuando está a punto de volcarse. Sumando momentos respecto a A, obtenemos

$$\Sigma M_{(\text{punto } A)} = Fh - W\left(\frac{1}{2}b\right) = 0.$$



(a) El diagrama de cuerpo libre del cofre cuando éste se encuentra a punto de voltearse.

El equilibrio también requiere que $f = F$ y $N = W$.

Cuando el cofre está a punto de deslizarse,

$$f = \mu_s N,$$

por lo que

$$F = f = \mu_s N = \mu_s W.$$

Sustituyendo esta expresión en la ecuación de momentos, obtenemos

$$\mu_s Wh - W\left(\frac{1}{2}b\right) = 0.$$

Despejando h en esta ecuación encontramos que el cofre está a punto de volcarse y a punto de deslizarse cuando

$$h = \frac{b}{2\mu_s}.$$

Si h es menor que este valor, el cofre empezará a deslizarse antes de volcarse.

COMENTARIO

Observe que el máximo valor de h para que el cofre se deslice antes de volcarse es independiente de F. Si el cofre se vuelca o no depende sólo de dónde se aplica la carga y no de la magnitud de ésta.

Ejemplo 10.3

El movimiento del disco de la figura 10.11 está controlado por la fuerza de fricción ejercida en C por el freno ABC. El actuador hidráulico BE ejerce una fuerza horizontal F sobre el freno en B. Los coeficientes de fricción entre el disco y el freno son μ_s y μ_k. ¿Qué par M es necesario para que el disco gire con velocidad constante en sentido antihorario?

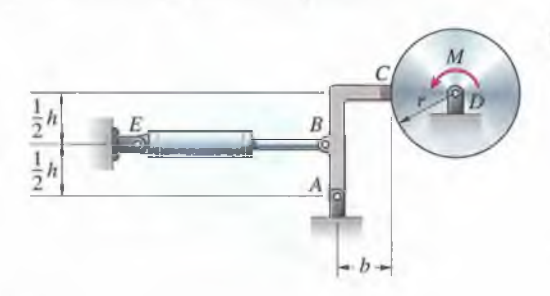


Figura 10.11

ESTRATEGIA

Con el diagrama de cuerpo libre del disco obtenemos una relación entre M y la reacción ejercida por el freno sobre el disco, y luego usar el diagrama de cuerpo libre del freno para determinar la reacción en función de F.

SOLUCIÓN

Dibujamos el diagrama de cuerpo libre del disco de la figura (a), representando con una sola fuerza R la fuerza ejercida por el freno. La fuerza R se opone al giro antihorario del disco, y el ángulo de fricción es el ángulo de fricción cinética $\theta_k = \arctan \mu_k$. Sumando momentos respecto a D obtenemos

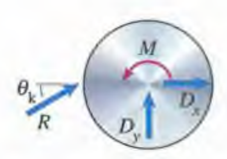
$$\Sigma M_{(\text{punto } D)} = M - (R \operatorname{sen} \theta_k)r = 0.$$

Luego, del diagrama de cuerpo libre del freno (Fig. b) obtenemos

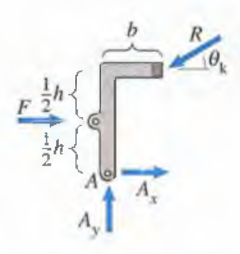
$$\Sigma M_{(\text{punto } A)} = -F\left(\frac{1}{2}h\right) + (R\cos\theta_k)h - (R\operatorname{sen}\theta_k)b = 0.$$

Con esas dos ecuaciones podemos encontrar los valores de M y R. La solución para el par M es

$$M = \frac{(1/2)hr\,F\operatorname{sen}\theta_k}{h\cos\theta_k - b\operatorname{sen}\theta_k} = \frac{(1/2)hr\,F\mu_k}{h - b\,\mu_k}.$$



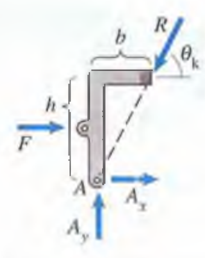
(a) Diagrama de cuerpo libre del disco.



(b) Diagrama de cuerpo libre del freno.

COMENTARIO

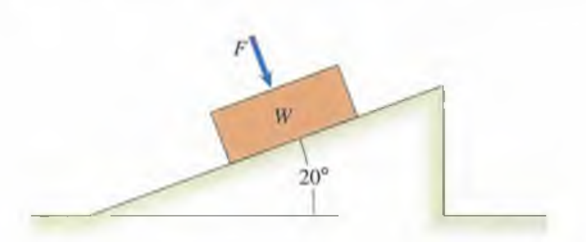
Si μ_k es suficientemente pequeño, el denominador de la solución para el par, $(h \cos \theta_k - b \operatorname{sen} \theta_k)$, es positivo. Al crecer μ_k, el denominador se vuelve más pequeño porque $\cos \theta_k$ se reduce y $\operatorname{sen} \theta_k$ aumenta. Cuando el denominador se acerca a cero, el par requerido para que el disco gire se acerca a infinito. Para entender este resultado, observe que el denominador es igual a cero cuando $\tan \theta_k = h/b$, lo cual significa que la línea de acción de R pasa por el punto A (Fig. c). Al crecer μ_k y la línea de acción de R se acerca al punto A, la magnitud de R necesaria para equilibrar el momento de F respecto a A tiende a infinito y, en consecuencia, M tiende también a infinito.



(c) Línea de acción de R pasando por el punto A.

Problemas

10.1 El peso de la caja es $W = 30$ lb y la fuerza F es perpendicular a la superficie inclinada. El coeficiente de fricción estática entre la caja y la superficie inclinada es $\mu_s = 0.2$.
(a) Si $F = 30$ lb, ¿cuál es la magnitud de la fuerza de fricción ejercida sobre la caja?
(b) Si $F = 10$ lb, demuestre que la caja no puede permanecer en equilibrio sobre la superficie inclinada.

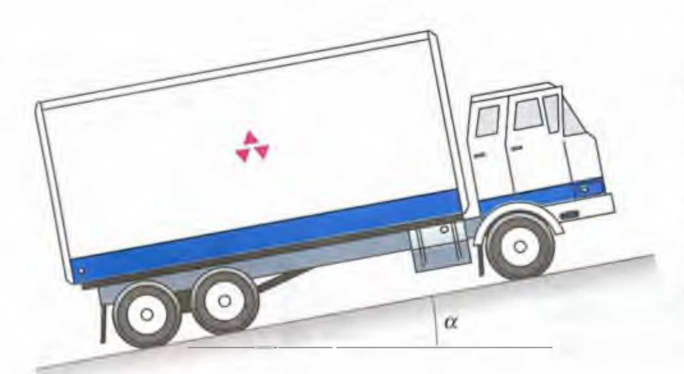


P10.1

10.2 En el problema 10.1, ¿qué valor tiene la mínima fuerza F necesaria para mantener la caja en reposo?

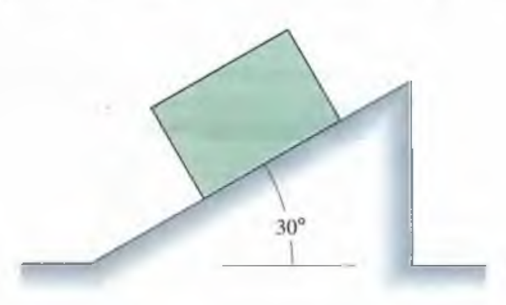
Estrategia: Suponga que el deslizamiento hacia abajo es inminente.

10.3 El camión de la figura pesa 18 000 lb.
(a) Si está en reposo y $\alpha = 10°$, ¿cuál es la magnitud de la fuerza de fricción ejercida sobre él por el camino inclinado?
(b) Si el coeficiente de fricción estática entre los neumáticos del camión y el camino es $\mu_s = 0.6$, ¿cuál es el valor máximo de α en el que el camión puede permanecer en reposo?
(c) Si el camino está cubierto de hielo y $\mu_s = 0.1$, ¿cuál es el valor máximo de α en el cual el camión sigue en reposo?



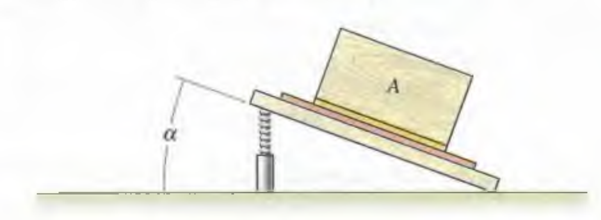
P10.3

10.4 La caja de 50 N mostrada está en reposo.
(a) ¿Cuál es la fuerza de fricción sobre la caja?
(b) ¿Cuál es el valor mínimo del coeficiente de fricción estática que permite que la caja permanezca en reposo?



P10.4

10.5 Mida el coeficiente de fricción estática entre dos materiales: Coloque una hoja de uno de los materiales sobre una tabla plana. Pegue una hoja del otro material a un bloque A. Coloque el bloque sobre la tabla e incremente lentamente el ángulo α hasta que el bloque resbale. Demuestre que el coeficiente de fricción estática entre los dos materiales está relacionado con el ángulo α por $\mu_s = \tan \alpha$.



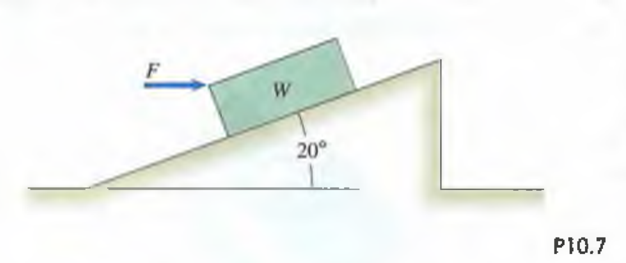
P10.5

10.6 El mecanismo mostrado está diseñado para colocar maletas sobre una rampa. La maleta S pesa 20 lb. El mecanismo ejerce sobre la maleta una fuerza en dirección paralela a la rampa. Los coeficientes de fricción entre la maleta y la rampa son $\mu_s = 0.20$ y $\mu_k = 0.18$.
(a) ¿Permanecerá la maleta en reposo sobre la rampa cuando el mecanismo no ejerza fuerza sobre ella?
(b) Determine la fuerza que el mecanismo debe ejercer sobre la maleta para que ésta empiece a moverse hacia arriba.
(c) Determine la fuerza que el mecanismo debe ejercer sobre la maleta para mantenerla moviéndose.



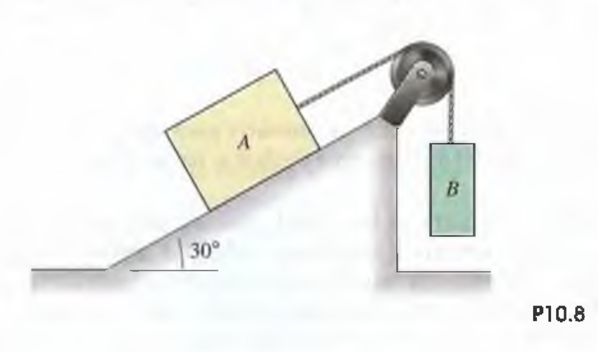
P10.6

10.7 El peso de la caja mostrada es de 30 N. La fuerza *F* es horizontal. El coeficiente de fricción estática entre la caja y la superficie inclinada es $\mu_s = 0.2$. ¿Para qué intervalo de valores de *F* permanecerá la caja en reposo?



P10.7

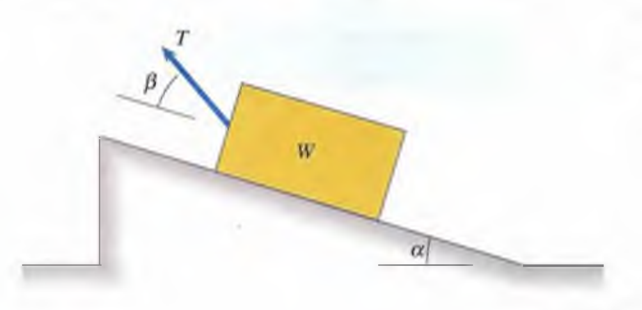
10.8 En la figura P10.8 la caja *A* pesa 100 lb y la caja *B* 30 lb. Los coeficientes de fricción entre la caja *A* y la rampa son $\mu_s = 0.30$ y $\mu_k = 0.28$. ¿Cuál es la magnitud de la fuerza de fricción ejercida sobre la caja *A* por la rampa?



P10.8

10.9 En el problema 10.8, la caja *A* pesa 100 lb y los coeficientes de fricción entre la caja *A* y la rampa son $\mu_s = 0.30$ y $\mu_k = 0.28$. ¿Para qué intervalo de pesos de la caja *B* permanece el sistema en reposo?

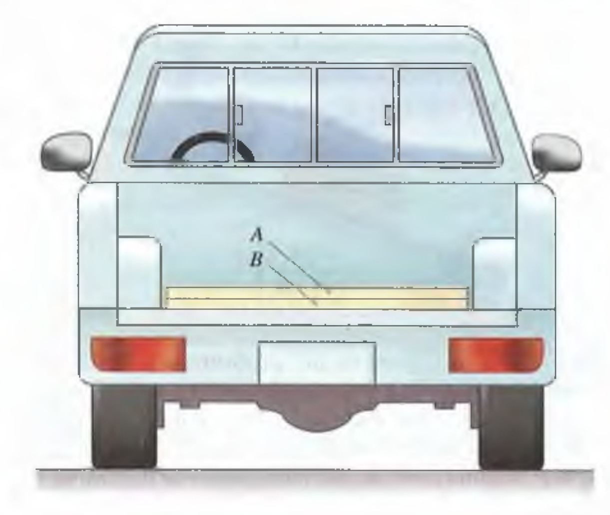
10.10 La caja mostrada está en reposo sobre la superficie inclinada. El coeficiente de fricción estática es μ_s.
(a) Determine la fuerza *T* necesaria para que la caja empiece a deslizarse hacia arriba sobre la superficie.
(b) Demuestre que la respuesta anterior es el valor mínimo cuando $\tan \beta = \mu_s$.



P10.10

10.11 Para explicar las observaciones hechas durante la botadura de barcos en el puerto de Rochefort en 1779, Coulomb analizó el sistema del problema 10.10 a fin de determinar la fuerza *T* mínima necesaria para mantener la caja en reposo sobre el plano inclinado. Demuestre que el resultado es $T = W(\text{sen}\,\alpha - \mu_s \cos \alpha)/(\cos \beta - \mu_s\, \text{sen}\,\beta)$.

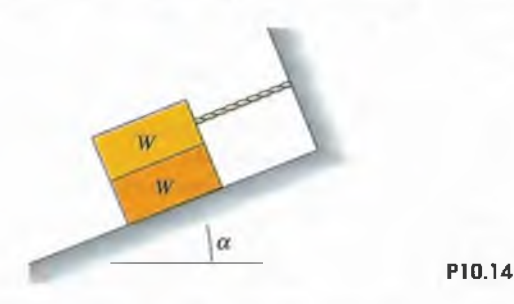
10.12 Dos hojas de madera terciada *A* y *B* yacen sobre la plataforma del camión mostrado. Ambas tienen el mismo peso *W*, y el coeficiente de fricción estática entre las dos hojas de madera y entre la hoja *B* y la plataforma del camión es μ_s.
(a) Si se aplica una fuerza horizontal a la hoja *A* y ninguna fuerza a la hoja *B*, ¿puede usted deslizar la hoja *A* hacia afuera del camión sin hacer que se mueva la hoja *B*? ¿Qué fuerza se necesita para que la hoja *A* empiece a deslizarse?
(b) Si se impide que la hoja *A* se mueva ejerciendo una fuerza horizontal sobre ella, ¿qué fuerza horizontal sobre la hoja *B* se necesita para que ésta empiece a deslizarse?



P10.12

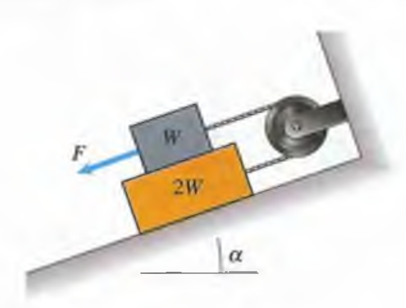
10.13 Suponga que el camión del problema 10.12 está cargado con *N* hojas de madera terciada del mismo peso *W*, designadas (de arriba hacia abajo) hojas 1, 2,..., *N*. El coeficiente de fricción estática entre las hojas de madera y entre la hoja inferior y la plataforma del camión es μ_s. Si se aplica una fuerza horizontal a las hojas arriba de ella para impedir que se muevan, ¿se puede sacar la hoja *i*-ésima, $1 \leq i < N$, sin que ninguna de las hojas por debajo de ella se mueva? ¿Qué fuerza debe usted aplicar para que dicha hoja empiece a moverse?

10.14 El coeficiente de fricción estática entre las dos cajas y entre la caja inferior y la superficie inclinada es μ_s. ¿Cuál es el máximo ángulo α para el cual la caja inferior no se deslizará?



P10.14

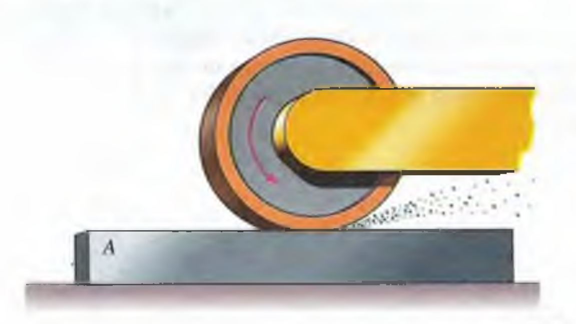
10.15 El coeficiente de fricción estática entre las dos cajas mostradas y entre la caja inferior y la superficie inclinada es μ_s. ¿Qué valor tiene la máxima fuerza F que no ocasionará que las cajas se deslicen?



P10.15

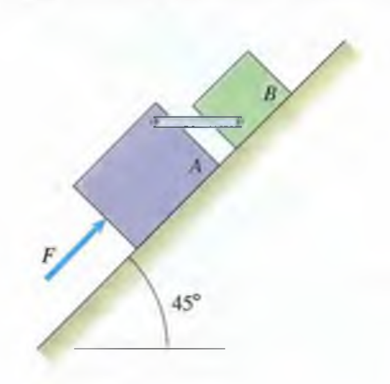
10.16 Considere el sistema del problema 10.15. El coeficiente de fricción estática entre las dos cajas y entre la caja inferior y la superficie inclinada es μ_s. Si $F = 0$, la caja inferior se deslizará hacia abajo sobre la superficie inclinada. ¿Cuál es la fuerza F mínima para la cual las cajas no se deslizarán?

10.17 Una lijadora consiste en un cilindro rotatorio con papel de lija unido a su superficie exterior. La fuerza normal ejercida sobre la pieza de trabajo A por la lijadora es de 30 lb. La pieza de trabajo pesa 50 lb. Los coeficientes de fricción entre la lijadora y la pieza de trabajo A son $\mu_s = 0.65$ y $\mu_k = 0.60$. Los coeficientes de fricción entre la pieza de trabajo A y la mesa son $\mu_s = 0.35$ y $\mu_k = 0.30$. ¿Permanecerá la pieza de trabajo en reposo mientras se lija?



P10.17

10.18 Los bloques A y B de la figura están conectados por una barra horizontal. El coeficiente de fricción estática entre la superficie inclinada y el bloque A de 400 lb es de 0.3. El coeficiente de fricción estática entre la superficie y el bloque B de 300 lb es de 0.5. ¿Cuál es la fuerza F mínima que impedirá que los bloques se deslicen hacia abajo sobre la superficie?



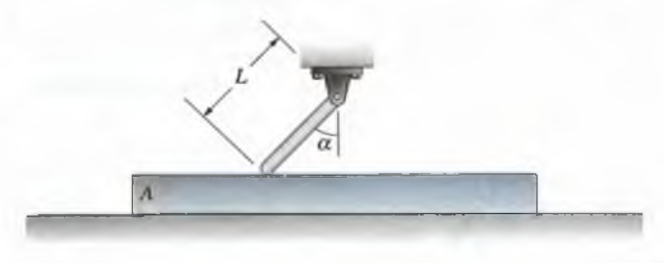
P10.18

10.19 ¿Qué fuerza F es necesaria para que los bloques del problema 10.18 empiecen a deslizarse hacia arriba?

10.20 La barra de longitud L debe actuar como un simple freno que permita a la pieza de trabajo A deslizarse hacia la izquierda pero que impida su deslizamiento hacia la derecha, sin importar cuán grande sea la fuerza que se le aplique. El peso de la barra es W y el coeficiente de fricción estática entre ella y la pieza A es μ_s. Se puede ignorar la fricción entre la pieza de trabajo y la superficie sobre la que descansa.

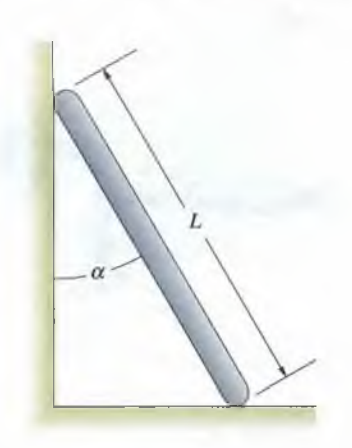
(a) ¿Cuál es el máximo ángulo α para el que la barra impedirá que la pieza de trabajo se mueva hacia la derecha?

(b) Si α tiene el valor determinado en la parte (a), ¿qué fuerza horizontal se necesita para deslizar la pieza de trabajo A hacia la izquierda a velocidad constante?



P10.20

10.21 El coeficiente de fricción estática entre la barra de 20 lb mostrada y el piso es $\mu_s = 0.3$. Ignore la fricción entre la barra y la pared.
(a) Si $\alpha = 20°$, ¿cuál es la magnitud de la fuerza de fricción ejercida por el piso sobre la barra?
(b) ¿Cuál es el valor máximo de α para el cual la barra no se deslizará?



P10.21

10.22 Las masas de la escalera y de la persona de la figura son 18 kg y 90 kg, respectivamente. El centro de masa de la escalera de 4 m de longitud está en su punto medio. Si $\alpha = 30°$, ¿cuál es el coeficiente mínimo de fricción estática entre la escalera y el piso, necesario para que la persona alcance la parte superior de la escalera? Ignore la fricción entre la escalera y la pared.

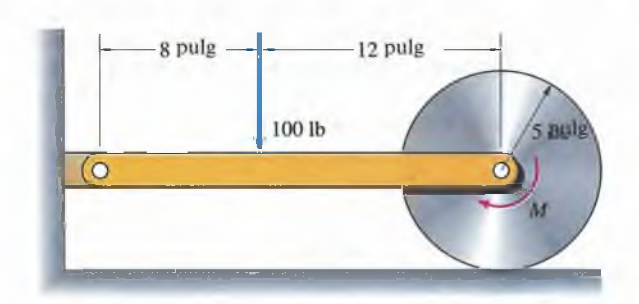


P10.22

10.23 En el problema 10.22 el coeficiente de fricción estática entre la escalera y el piso es $\mu_s = 0.6$. Las masas de la escalera y de la persona son 18 kg y 100 kg respectivamente. El centro de masa de la escalera de 4 m de longitud está en su punto medio. ¿Cuál es el valor máximo de α para el que la persona puede alcanzar la parte superior de la escalera? Ignore la fricción entre la escalera y la pared.

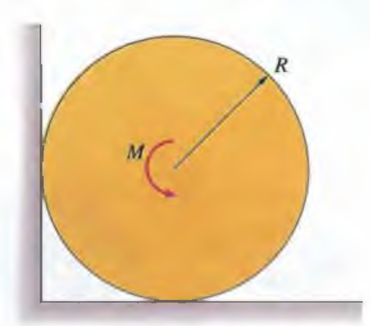
10.24 En el problema 10.22 el coeficiente de fricción estática entre la escalera y el piso es $\mu_s = 0.6$ y $\alpha = 35°$. El centro de masa de la escalera de 4 m de largo está en su punto medio y su masa es de 18 kg. (a) Si una persona con masa de 140 kg intenta subir, ¿qué valor máximo de x alcanzará? Ignore la fricción entre la escalera y la pared. (b) ¿Qué coeficiente de fricción mínimo se requiere para que llegue arriba?

10.25 El disco mostrado pesa 50 lb. Ignore el peso de la barra. Los coeficientes de fricción entre el disco y el piso son $\mu_s = 0.6$ y $\mu_k = 0.4$.
(a) ¿Qué valor tiene el par M máximo que se puede aplicar al disco en reposo sin que éste empiece a girar?
(b) ¿Qué par M es necesario aplicar para que el disco gire con velocidad constante?



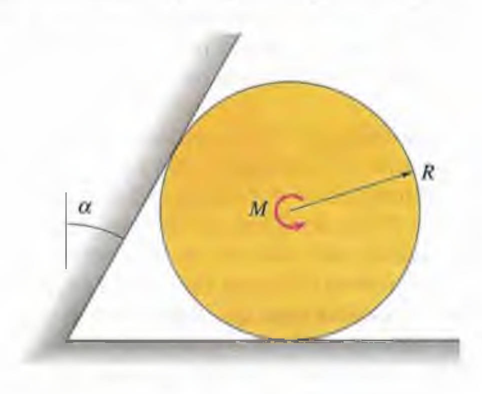
P10.25

10.26 El cilindro mostrado tiene un peso W. El coeficiente de fricción estática entre el cilindro y el piso y entre el cilindro y la pared es μ_s. ¿Qué valor tiene el par M máximo que se puede aplicar al cilindro en reposo sin que éste gire?



P10.26

10.27 El cilindro mostrado tiene un peso W. El coeficiente de fricción estática entre el cilindro y el piso y entre el cilindro y la pared es μ_s. ¿Qué valor tiene el par M máximo que se puede aplicar al cilindro en reposo sin que éste gire?

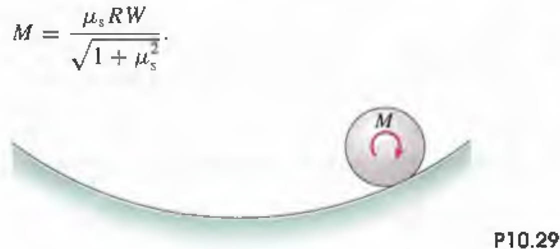


P10.27

10.28 Si en el problema 10.27 $\alpha = 30°$ y se requiere un par $M = 0.5RW$ para hacer girar el cilindro a velocidad constante, ¿qué valor tiene el coeficiente de fricción cinética?

10.29 El disco de peso W y radio R se mantiene en equilibrio mediante un par M. El coeficiente de fricción estática entre el disco y la superficie es μ_s. Demuestre que el valor máximo que M puede tener sin que el disco se deslice es

$$M = \frac{\mu_s RW}{\sqrt{1 + \mu_s^2}}.$$



P10.29

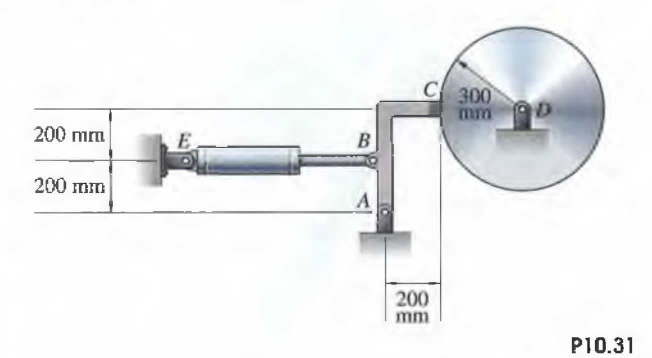
10.30 El coeficiente de fricción estática entre las mordazas de la tenaza de la figura y el objeto sujetado es μ_s. ¿Cuál es el máximo ángulo α para el que el objeto sujetado no se suelte? (Ignore el peso del objeto.)

Estrategia: Dibuje el diagrama de cuerpo libre del objeto sujetado y suponga que el deslizamineto es inminente.



P10.30

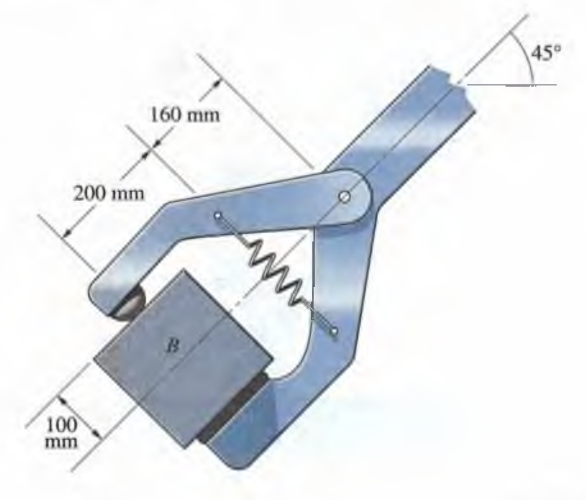
10.31 En la figura P10.31, el disco en reposo de 300 mm de radio está unido a un soporte de pasador en D. El disco es mantenido en posición por el freno ABC en contacto con el disco en C. El actuador hidráulico BE ejerce una fuerza horizontal de 400 N sobre el freno en B. Los coeficientes de fricción entre el disco y el freno son $\mu_s = 0.6$ y $\mu_k = 0.5$. ¿Qué par debe aplicarse al disco en reposo para que se deslice en dirección antihoraria?



P10.31

10.32 ¿Qué par se debe aplicar al disco en reposo del problema 10.31 para que se deslice girando en dirección horaria?

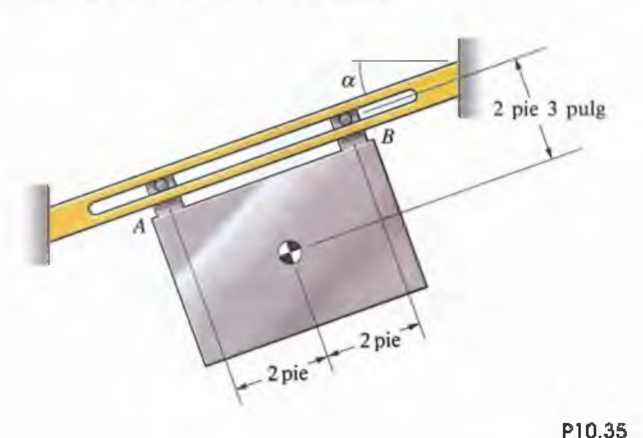
10.33 El bloque mostrado pesa 80 N. El coeficiente de fricción estática entre las superficies de la abrazadera y el bloque es $\mu_s = 0.2$. Cuando la abrazadera está alineada como se muestra, ¿qué fuerza mínima debe ejercer el resorte para impedir que el bloque se deslice?



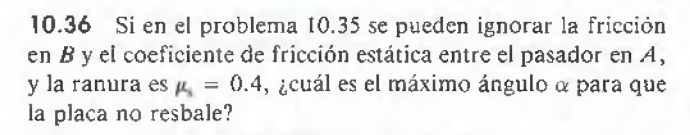
P10.33

10.34 Modificando sus dimensiones, rediseñe la abrazadera del problema 10.33 de manera que la fuerza mínima que el resorte deba ejercer para impedir el deslizamiento del bloque sea de 180 N. Haga un croquis de su nuevo diseño.

10.35 La placa rectangular de 100 lb de peso de la figura está soportada por los pasadores A y B. Si se pueden ignorar la fricción en A y el coeficiente de fricción estática entre el pasador en B, y la ranura es $\mu_s = 0.4$, ¿cuál es el máximo ángulo α para que la placa no resbale?

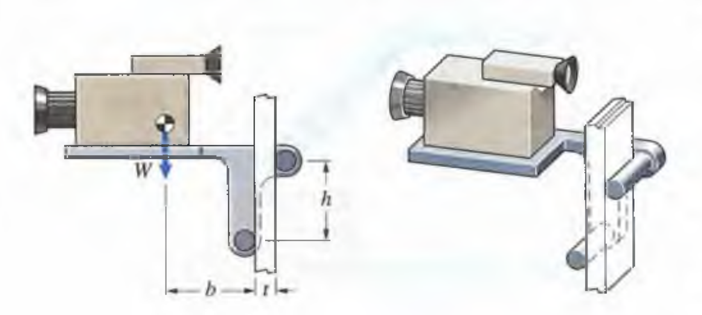


P10.35



10.36 Si en el problema 10.35 se pueden ignorar la fricción en B y el coeficiente de fricción estática entre el pasador en A, y la ranura es $\mu_s = 0.4$, ¿cuál es el máximo ángulo α para que la placa no resbale?

10.37 La ménsula de la figura está diseñada de manera que se puede colocar a cualquier altura sobre la barra vertical. La ménsula está soportada por fricción entre los dos muñones horizontales y la barra vertical. El peso combinado de la ménsula y la cámara es W. Si el coeficiente de fricción estática entre la barra y los muñones es μ_s, ¿cuál es la distancia mínima b necesaria para que la ménsula permanezca en reposo?



P10.37

10.38 El refrigerador pesa 350 lb. Las distancias son: h = 60 pulg y b = 14 pulg. El coeficiente de fricción estática en A y B es $\mu_s = 0.24$.
(a) ¿Qué fuerza F es necesaria para impedir el deslizamiento?
(b) ¿Se volcará el refrigerador antes de deslizarse?

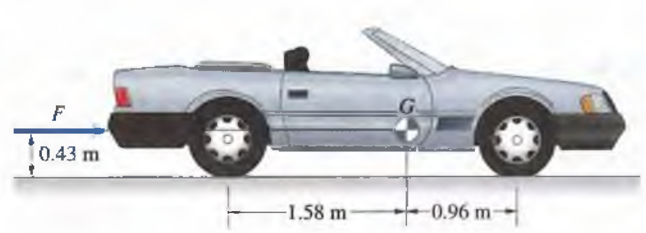


P10.38

10.39 Para que el refrigerador se deslice antes de volcarse, ¿cuál es la máxima altura h a la que se le puede empujar?

10.40 El refrigerador del problema 10.38 pesa 350 lb. Las distancias son: h = 45 pulg y b = 15 pulg. Los coeficientes de fricción estática en A y B son 0.24 y 0.30 respectivamente. (a) ¿Qué fuerza F se necesita para que ocurra un deslizamiento inminente? (b) ¿Se volcará el refrigerador antes?

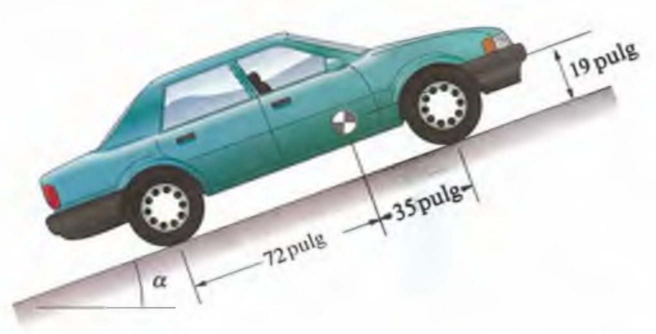
10.41 La masa del Mercedes-Benz 600SL es de 2020 kg, y las cuatro ruedas están bloqueadas. El coeficiente de fricción estática entre los neumáticos y el pavimento es $\mu_s = 0.8$. Determine la fuerza F que se debe ejercer sobre el parachoques trasero para que el automóvil se deslice.



P10.41

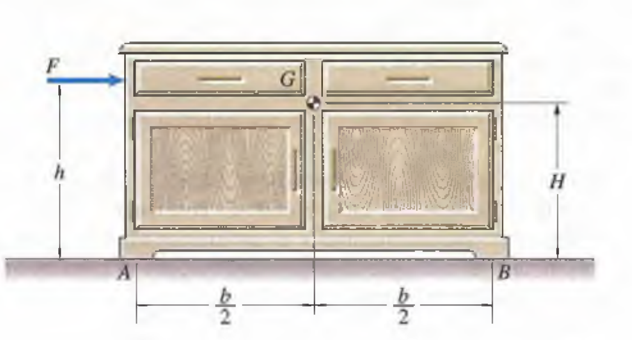
10.42 Determine la fuerza F que se debe aplicar sobre el automóvil del problema 10.41 para que se deslice si: (a) las ruedas traseras están bloqueadas y las delanteras no lo están, (b) las ruedas delanteras están bloqueadas y las traseras no lo están. (Las ruedas que no están bloqueadas no ejercen fuerza de fricción.)

10.43 El coeficiente de fricción estática entre los neumáticos del automóvil de 3000 lb de peso y la carretera es $\mu_s = 0.5$. Determine la pendiente máxima (valor máximo del ángulo α) que el automóvil puede subir a velocidad constante si tiene: (a) tracción en las ruedas posteriores, (b) tracción en las ruedas delanteras y (c) tracción en las cuatro ruedas.



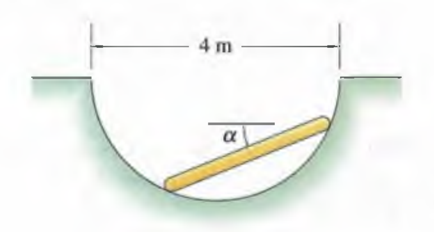
P10.43

10.44 El armario en reposo que se muestra tiene un peso W. Determine la fuerza F que se debe ejercer para que se mueva si: (a) el coeficiente de fricción estática en A y en B es μ_s; (b) el coeficiente de fricción estática en A es μ_{sA} y el coeficiente de fricción estática en B es μ_{sB}.

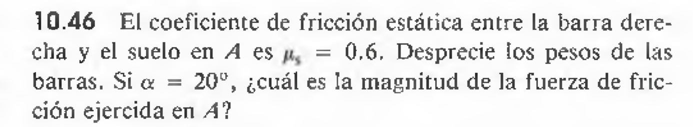


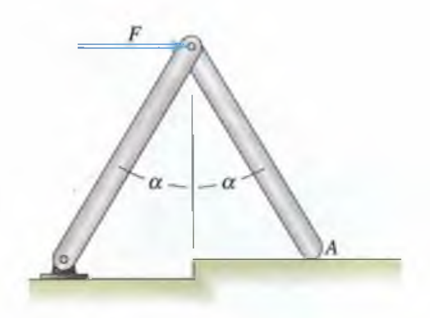
P10.44

10.45 La barra de 3 m de longitud mostrada pesa 200 N. Resbalará si el ángulo α es mayor que 15°. ¿Cuál es el coeficiente de fricción estática entre los extremos de la barra y la superficie circular?



P10.45

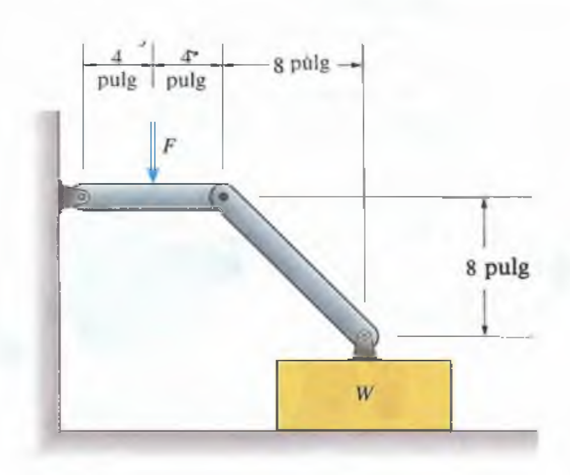

10.46 El coeficiente de fricción estática entre la barra derecha y el suelo en A es $\mu_s = 0.6$. Desprecie los pesos de las barras. Si $\alpha = 20°$, ¿cuál es la magnitud de la fuerza de fricción ejercida en A?



P10.46

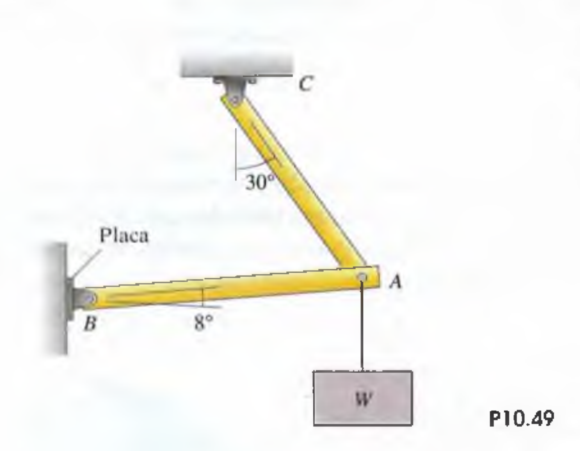
10.47 Considere el sistema del problema 10.46. El coeficiente de fricción estática entre la barra derecha y el piso en A es $\mu_s = 0.6$. Ignore los pesos de las barras. ¿Cuál es el ángulo máximo α para el que la armadura permanecerá en reposo sin resbalar?

10.48 El coeficiente de fricción estática entre la caja y el piso es μ_s. Ignore los pesos de las barras. ¿Qué fuerza F ocasionará que la caja se deslice?



P10.48

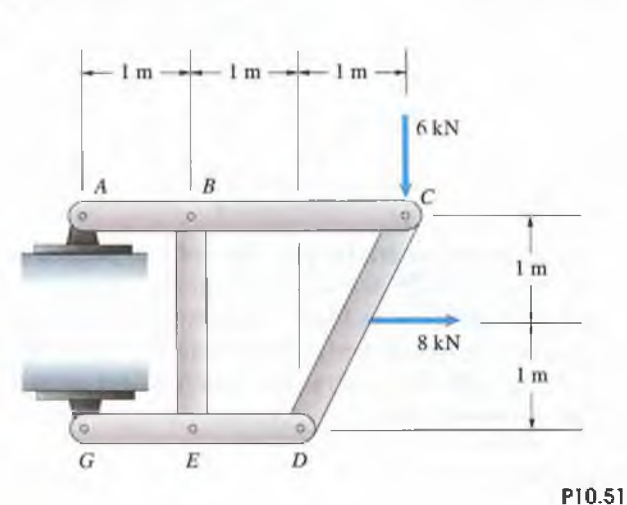
10.49 La estructura de la figura está soportada en B por las fuerzas normal y de fricción ejercidas por la pared sobre la placa. Ignore los pesos de las barras.
(a) ¿Qué magnitud tiene la fuerza de fricción?
(b) ¿Cuál es el coeficiente de fricción estática mínimo necesario para que la estructura permanezca en reposo?



P10.49

10.50 Suponga que las barras AB y AC del problema 10.49 tienen igual longitud L y que cada una tiene un peso $W/2$.
(a) ¿Cuál es la magnitud de la fuerza de fricción en B?
(b) ¿Cuál es el coeficiente de fricción estática mínimo necesario para que la estructura permanezca en reposo?

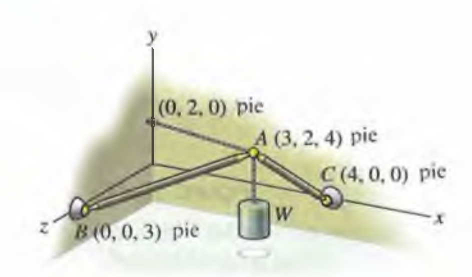
10.51 El bastidor de la figura está soportado por las fuerzas normal y de fricción ejercidas por las superficies fijas sobre las placas en A y G. El coeficiente de fricción estática en A es $\mu_s = 0.6$. ¿Se deslizará el bastidor en A cuando se someta a las cargas mostradas?



P10.51

10.52 El bastidor del problema 10.51 está soportado por las fuerzas normal y de fricción ejercidas sobre las placas en A y G por las superficies fijas. El coeficiente de fricción estática en G es $\mu_s = 0.25$. ¿Se deslizará el bastidor en G cuando se someta a las fuerzas mostradas?

10.53 El peso suspendido es $W = 600$ lb. Las barras AB y AC tienen soportes de bola y cuenca en cada extremo. Suponga que se quiere que la bola y cuenca en B se mantenga en su posición de reposo mediante las fuerzas normal y de fricción entre el soporte y la pared. ¿Qué coeficiente de fricción mínimo se requiere?



P10.53

10.54 En el problema 10.53, ¿qué fuerza de fricción es ejercida por la pared sobre el soporte en B?

10.2 Aplicaciones

Los efectos de fuerzas de fricción como el desgaste, pérdida de energía y generación de calor suelen ser indeseables, aunque muchos dispositivos no funcionan bien sin ellas, o se han diseñado para generarlas. Los frenos de un auto ejercen fuerzas de fricción sobre las ruedas, y sus neumáticos se diseñan para maximizar las que éstos ejercen sobre el piso. Aquí analizaremos casos en los que las fuerzas de fricción son importantes.

Cuñas

Una **cuña** es una herramienta bifacial cuyas caras forman un pequeño ángulo agudo (Figs. 10.12a y b). Cuando una cuña se empuja hacia adelante, sus caras ejercen grandes fuerzas laterales como resultado del pequeño ángulo entre ellas (Fig. 10.12c). Las cuñas se usan de varias maneras en muchas aplicaciones de ingeniería.

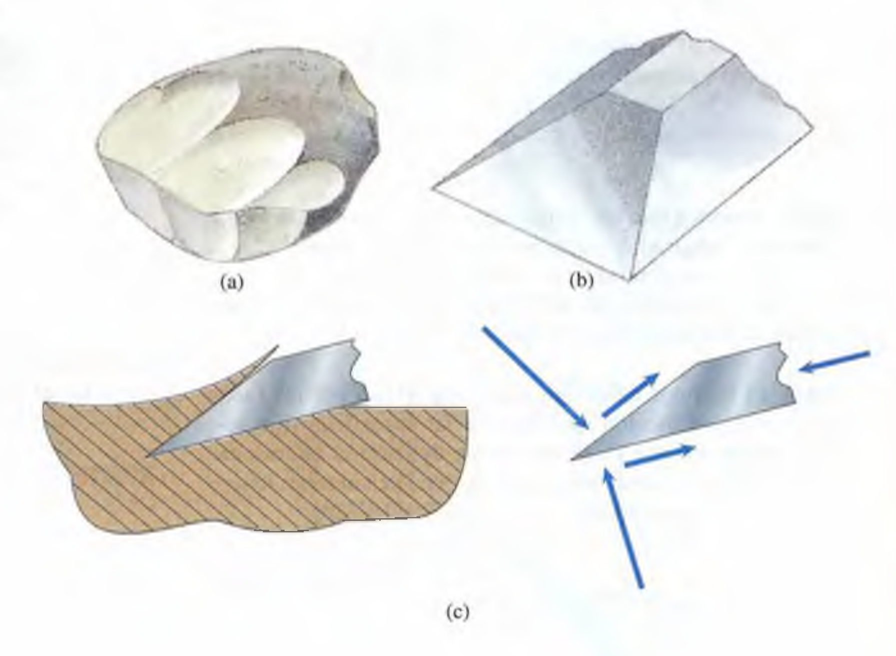


Figura 10.12

(a) Cuña primitiva o "tajador" bifacial del valle Rift en África Oriental.
(b) Cincel moderno.
(c) Las caras de una cuña ejercen grandes fuerzas laterales.

Las grandes fuerzas laterales generadas por una cuña se pueden usar para elevar una carga (Fig. 10.13a). Sea W_L el peso de la carga y W_W el peso de la cuña. A fin de determinar la fuerza T necesaria para empezar a elevar la carga, suponemos que el deslizamiento de la carga y de la cuña es inminente (Fig. 10.13b). Del diagrama de cuerpo libre de la carga obtenemos las ecuaciones de equilibrio

$$\Sigma F_x = Q - N \operatorname{sen} \alpha - \mu_s N \cos \alpha = 0,$$

$$\Sigma F_y = N \cos \alpha - \mu_s N \operatorname{sen} \alpha - \mu_s Q - W_L = 0.$$

Del diagrama de cuerpo libre de la cuña obtenemos las ecuaciones

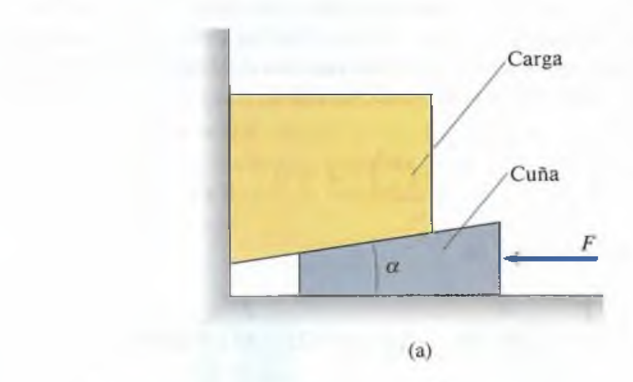
$$\Sigma F_x = N \operatorname{sen} \alpha + \mu_s N \cos \alpha + \mu_s P - F = 0,$$

$$\Sigma F_y = P - N \cos \alpha + \mu_s N \operatorname{sen} \alpha - W_W = 0.$$

Estas cuatro ecuaciones determinan las fuerzas normales Q, N y P y la fuerza F. La solución para F es

$$F = \mu_s W_W + \left[\frac{(1 - \mu_s^2) \tan \alpha + 2\mu_s}{(1 - \mu_s^2) - 2\mu_s \tan \alpha} \right] W_L. \qquad (10.7)$$

Supongamos que $W_W = 0.2 W_L$ y $\alpha = 10°$. Si $\mu_s = 0$, la fuerza necesaria para elevar la carga es sólo $0.176 W_L$; pero si $\mu_s = 0.2$, la fuerza resulta de $0.680 W_L$ y si $\mu_s = 0.4$, la fuerza requerida es de $1.44 W_L$. Desde este punto de vista, la fricción es indeseable. No obstante, si no hubiese fricción, la cuña no podría permanecer en su posición cuando se retirase la fuerza F.



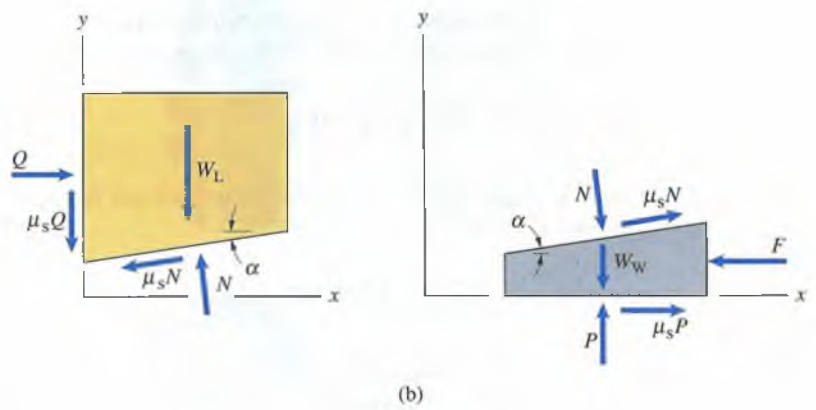


Figura 10.13
(a) Elevación de una carga por medio de una cuña.
(b) Diagramas de cuerpo libre de la carga y de la cuña cuando el deslizamiento es inminente.

Ejemplo 10.4





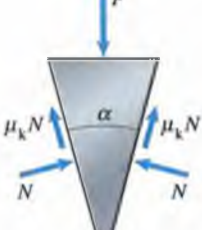
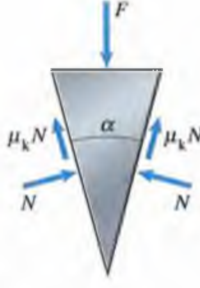
Figura 10.14

Aunque partir un tronco (Fig. 10.14) es un proceso dinámico (la cuña penetra en la madera con golpes de martillo), un análisis estático puede revelarnos las fuerzas que intervienen. Sea $\alpha = 10°$ y los coeficientes de fricción entre las superficies de la cuña y el tronco $\mu_s = 0.22$ y $\mu_k = 0.20$. Ignore el peso de la cuña. (a) Si la cuña penetra en el tronco con velocidad constante por una fuerza vertical F, ¿qué magnitud tienen las fuerzas normales ejercidas por la cuña sobre el tronco? (b) ¿Permanecerá la cuña en reposo dentro del tronco cuando se retire la fuerza?

ESTRATEGIA

(a) Las fuerzas de fricción se oponen a la penetración de la cuña y son iguales a $\mu_k N$, donde N es la fuerza normal del tronco en las caras de la cuña. Con las ecuaciones de equilibrio se determina N en función de F.
(b) Si la cuña está a punto de deslizarse hacia afuera, determinamos el valor mínimo de μ_s necesario para que la cuña permanezca en su sitio.

SOLUCIÓN

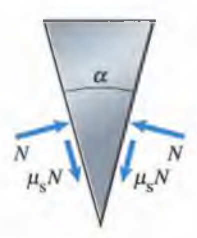
(a) Diagrama de cuerpo libre de la cuña con una fuerza F vertical aplicada sobre ella.

(a) Dibujamos el diagrama de cuerpo libre de la cuña (Fig. a) al introducirse en el tronco mediante una fuerza F. Las caras de las cuñas están sometidas por el tronco a fuerzas normales y de fricción. Éstas últimas se oponen a la penetración de la cuña. De la ecuación de equilibrio

$$2N \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right) + 2\mu_k N \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) - F = 0,$$

obtenemos la fuerza normal N:

$$N = \frac{F}{2[\operatorname{sen}(\alpha/2) + \mu_k \cos(\alpha/2)]} = \frac{F}{2[\operatorname{sen}(10°/2) + (0.20)\cos(10°/2)]} = 1.75F.$$



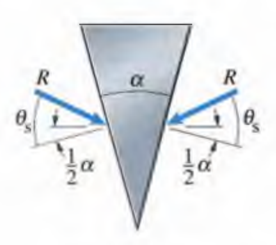
(b) Diagrama de cuerpo libre de la cuña cuando está a punto de deslizarse.

(b) En la figura (b) dibujamos el diagrama de cuerpo libre cuando $F = 0$ y la cuña está a punto de deslizarse hacia afuera. De la ecuación de equilibrio

$$2N \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right) - 2\mu_s N \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 0,$$

obtenemos el coeficiente de fricción mínimo necesario para que la cuña permanezca en su posición en reposo:

$$\mu_s = \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \tan\left(\frac{10°}{2}\right) = 0.087.$$



(c) Representación de las reacciones mediante una sola fuerza.

Podemos también obtener este resultado representando con una sola fuerza (Fig. c) la reacción ejercida por el tronco sobre la cuña. Cuando la cuña está a punto de deslizarse hacia afuera, el ángulo de fricción es el ángulo de fricción estática θ_s. La suma de las fuerzas en la dirección vertical es nula sólo si

$$\theta_s = \arctan(\mu_s) = \frac{\alpha}{2} = 5°,$$

y $\mu_s = \tan 5° = 0.087$. Entonces, la cuña permanecerá en su sitio.

Roscas

Usted está familiarizado con las roscas que se usan en tornillos para madera, en tornillos de máquinas y en otros elementos de máquinas. De la figura 10.15(a) se muestra un eje con roscas cuadradas. La distancia axial p de una rosca a la siguiente se llama **paso** de la rosca, y el ángulo α es su **pendiente**. Consideraremos sólo el caso en que el eje tiene una sola rosca continua, en la cual la relación entre el paso y la pendiente es

$$\tan\alpha = \frac{p}{2\pi r}, \qquad (10.8)$$

donde r es el radio medio de la rosca.

Supongamos que el eje roscado está sujeto por un manguito fijo con ranura casante y sometido a una fuerza axial F (Fig. 10.15b). La aplicación de un par M en la dirección mostrada ocasionará que el eje empiece a girar y se mueva en la dirección axial opuesta a F. Nuestro objetivo es determinar el par M necesario para que el eje empiece a girar.

En la figura 10.15(c) dibujamos el diagrama de cuerpo libre de un elemento diferencial de la rosca de longitud dL, representando con la fuerza dR la reacción ejercida por la ranura casante. Si el eje está a punto de girar, dR resiste el movimiento inminente y el ángulo de fricción es el ángulo de fricción estática θ_s. La componente vertical de la reacción sobre el elemento es $dR\cos(\theta_s + \alpha)$. Para determinar la fuerza vertical total sobre la rosca, debemos integrar esta expresión sobre la longitud L de la rosca. Por equilibrio, el resultado debe ser igual a la fuerza axial F que actúa sobre el eje.

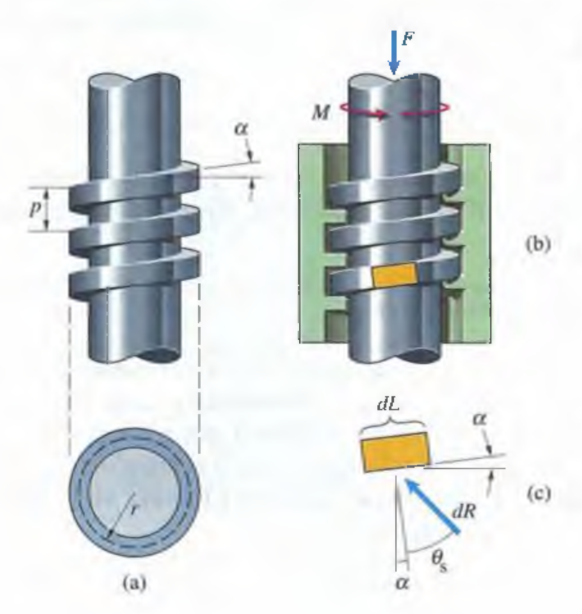


Figura 10.15
(a) Árbol con rosca cuadrada.
(b) El árbol dentro de un manguito con ranura casante. La dirección de M que ocasiona que el árbol comience a moverse en la dirección axial opuesta a F.
(c) Elemento diferencial de la rosca cuando el deslizamiento es inminente.

$$\cos(\theta_s + \alpha) \int_L dR = F. \tag{10.9}$$

El momento respecto al centro del eje debido a la reacción sobre el elemento es rdR sen $(\theta_s + \alpha)$. El momento total debe ser igual al par M ejercido sobre el eje:

$$r \operatorname{sen}(\theta_s + \alpha) \int_L dR = M. \tag{10.10}$$

Dividiendo esta ecuación entre la ecuación (10.9), obtenemos el par M necesario para que el eje esté a punto de girar y moverse en la dirección axial opuesta a F:

$$M = rF \tan(\theta_s + \alpha). \tag{10.11}$$

Sustituyendo el ángulo de fricción estática θ_s en esta expresión por el ángulo de fricción cinética θ_k, obtenemos el par requerido para que el eje gire con velocidad constante.

Si el par M se aplica al eje en la dirección opuesta (Fig. 10.16a), éste tiende a girar y moverse en la dirección axial de la carga F. La figura 10.16(b) es la reacción sobre un elemento diferencial de la rosca de longitud dL cuando el deslizamiento es inminente. La dirección de la reacción se opone al giro del eje. Aquí, la componente vertical de la reacción sobre el elemento es dR cos $(\theta_s - \alpha)$. Por equilibrio se requiere que

$$\cos(\theta_s - \alpha) \int dR = F. \tag{10.12}$$

El momento respecto al centro del eje debido a la reacción es rdR sen $(\theta_s - \alpha)$, por lo que

$$r \operatorname{sen}(\theta_s - \alpha) \int_L dR = M. \tag{10.13}$$

Dividiendo esta ecuación entre la ecuación (10.12) obtenemos el par M necesario para que el eje esté a punto de girar y moverse en la dirección de la fuerza F:

$$M = rF \tan(\theta_s - \alpha). \tag{10.14}$$

Sustituyendo θ_s por θ_k en la ecuación (10.14) obtenemos el par necesario para que el eje gire con velocidad constante.

Observe en la ecuación (10.14) que el par requerido para un movimiento inminente es nulo cuando $\theta_s = \alpha$. Si el ángulo de fricción estática es menor que este valor, el eje girará y se moverá en la dirección de la fuerza F sin ningún par aplicado.

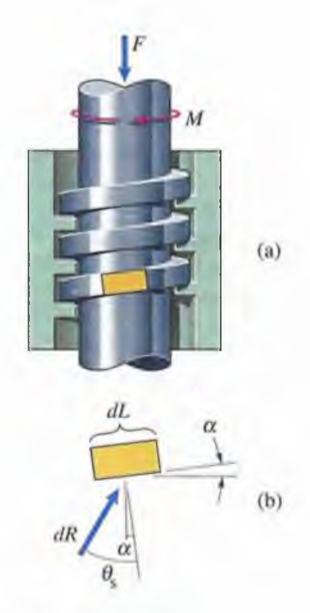


Figura 10.16
(a) La dirección de M que puede causar que el árbol se mueva en la dirección axial de F.
(b) Elemento diferencial de la rosca.

Ejemplo 10.5

El extremo derecho de la barra AB de la figura 10.17 está conectado al collarín B sin rosca que descansa sobre el collarín C. El collarín C tiene una ranura que casa con la rosca del árbol. El radio medio de la rosca es $r = 1.5$ pulg y su paso es $p = 0.2$ pulg. El coeficiente de fricción estática entre el collarín C y el árbol roscado es $\mu_s = 0.25$. El peso W de 400 lb se puede subir o bajar haciendo girar el collarín C. (a) ¿Qué par se debe aplicar al collarín C para que el peso empiece a moverse hacia arriba? (b) ¿Permanecerá el peso en la posición mostrada cuando no se ejerza ningún par sobre el collarín C?

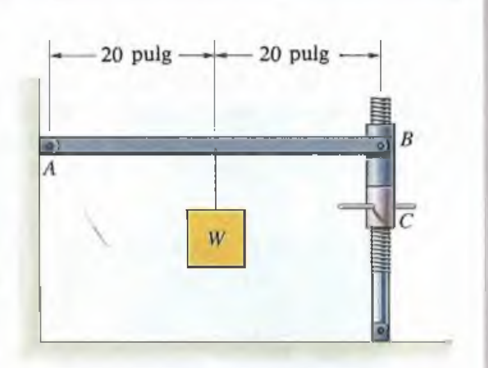


Figura 10.17

ESTRATEGIA

(a) Dibujando el diagrama de cuerpo libre de la barra y el collarín B, podemos determinar la fuerza axial ejercida sobre el collarín C. Luego podemos usar la ecuación (10.11) para determinar el par requerido.
(b) La pregunta es si el collarín roscado C se moverá hacia abajo debido a la acción de la carga axial ejercida sobre él por el collarín B cuando ningún par se ejerza sobre el collarín C. Podemos dilucidar esto con la ecuación (10.14).



SOLUCIÓN

(a) En la figura (a) dibujamos el diagrama de cuerpo libre de la barra y el collarín B, donde F es la fuerza ejercida sobre el collarín B por el collarín C. De la ecuación de equilibrio

$$\Sigma M_{(\text{punto } A)} = (40)F - (20)W = 0,$$

obtenemos $F = \frac{1}{2}W = 200$ lb. Ésta es la carga axial ejercida sobre el collarín C (Fig. b). De la ecuación (10.11), el par necesario para tener un movimiento inminente hacia arriba del collarín C es



(a) Diagrama de cuerpo libre de la barra AB y del collarín B.

$$M = rF\tan(\theta_s + \alpha).$$

El ángulo α está relacionado con el paso y el radio medio de la rosca por la ecuación (10.8):

$$\tan\alpha = \frac{p}{2\pi r} = \frac{0.2}{2\pi(1.5)} = 0.0212.$$

Así, $\alpha = \arctan(0.0212) = 1.22°$. El ángulo de fricción estática es

$$\theta_s = \arctan(\mu_s) = \arctan(0.25) = 14.04°.$$

Con estos valores, el momento es

$$M = rF\tan(\theta_s + \alpha) = \left(\frac{1.5}{12}\right)(200)\tan(14.04° + 1.22°) = 6.82 \text{ lb-pie}.$$

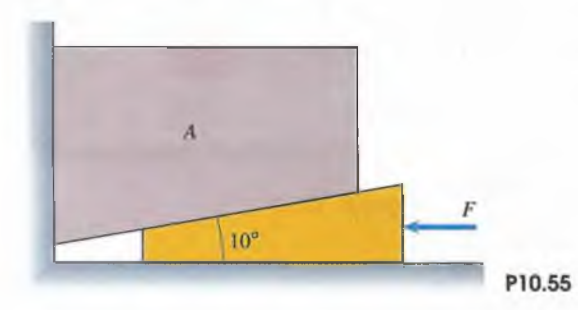


(b) Árbol roscado y collarín C.

(b) La ecuación (10.14) indica que el par requerido para el movimiento inminente es igual a cero cuando $\theta_s = \alpha$. Si el ángulo de fricción estática es menor que este valor, el árbol girará y se moverá en la dirección de la fuerza F sin ningún par aplicado. Aquí, $\theta_s = 14.04°$ es mayor que $\alpha = 1.22°$, y el peso permancerá en su posición al no aplicar un par al collarín C.

Problemas

10.55 En la figura P10.55, para elevar A con velocidad constante se requiere una fuerza $F = 200$ N. Para todas las superficies en contacto, $\mu_s = 0.25$ y $\mu_k = 0.20$. El peso de la cuña es despreciable. ¿Cuál es el peso de A?



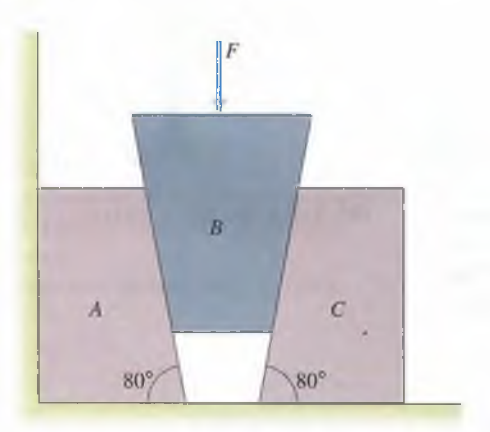
P10.55

10.56 Suponga que en el problema 10.55 A pesa 1000 lb. Para todas las superficies en contacto, $\mu_s = 0.25$ y $\mu_k = 0.20$. Ignore el peso de la cuña.
(a) ¿Qué fuerza F se necesita para que la cuña empiece a moverse hacia la izquierda?
(b) Si se retira F ¿permanecerá la cuña en reposo?

Estrategia: Para resolver la parte (b), suponga que el deslizamiento de la cuña hacia la derecha es inminente y determine el valor mínimo de μ_s necesario para el equilibrio.

10.57 Suponga que en el problema 10.55 A pesa 1000 lb y la cuña 200 lb. Para todas las superficies en contacto, $\mu_s = 0.25$ y $\mu_k = 0.20$. ¿Qué fuerza se requiere para elevar A a velocidad constante?

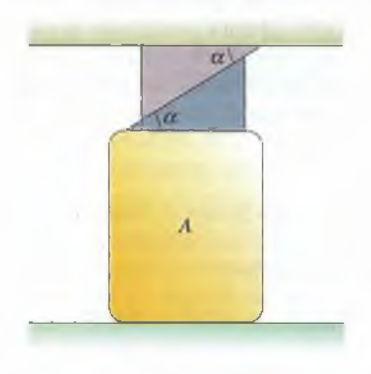
10.58 Cada uno de los bloques en reposo A, B y C pesa 2 kN. Para todas las superficies en contacto, $\mu_s = 0.6$. ¿Qué fuerza F es necesaria para que B empiece a moverse hacia abajo?



P10.58

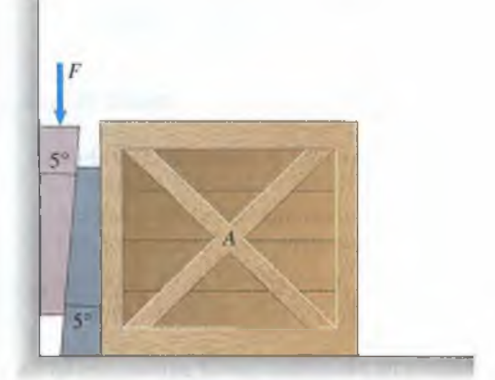
10.59 Suponga que en el problema 10.58 la fuerza $F = 1$ kN y que A, B y C pesan 2 kN cada uno. El coeficiente de fricción estática para todas las superficies en contacto es μ_s. ¿Cuál es el mínimo valor de μ_s para que los bloques permanezcan en reposo?

10.60 El objeto A es mantenido en su sitio por dos cuñas. El coeficiente de fricción estática para todas las superficies en contacto es μ_s. Ignore los pesos de las cuñas. ¿Cuál es el máximo ángulo α en que las cuñas permanecerán en su sitio?



P10.60

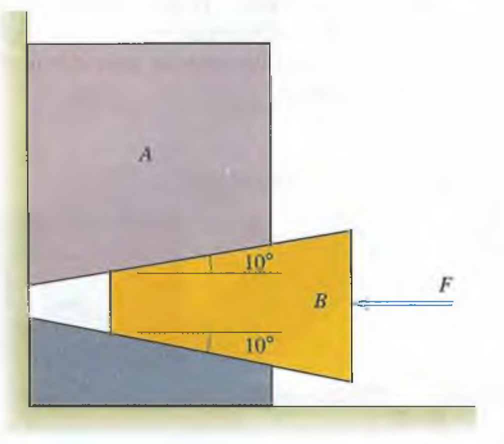
10.61 La caja A mostrada pesa 600 lb. Para todas las superficies en contacto, $\mu_s = 0.32$ y $\mu_k = 0.30$. Ignore los pesos de las cuñas. ¿Qué fuerza F se requiere para mover A hacia la derecha con velocidad constante?



P10.61

10.62 Suponga que entre todas las superficies en contacto del problema 10.61, $\mu_s = 0.32$ y $\mu_k = 0.30$. Ignore los pesos de las cuñas de 5°. Si se requiere una fuerza $F = 800$ N para mover A hacia la derecha con velocidad constante, ¿cuál es el peso de A?

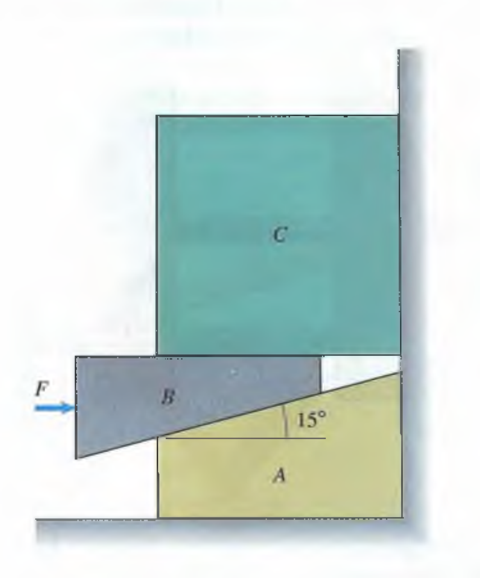
10.63 La caja A de la figura pesa 800 N y la cuña B pesa 400 N. Para todas las superficies en contacto, $\mu_s = 0.15$ y $\mu_k = 0.12$. ¿Qué fuerza F se requiere para elevar A con velocidad constante?



P10.63

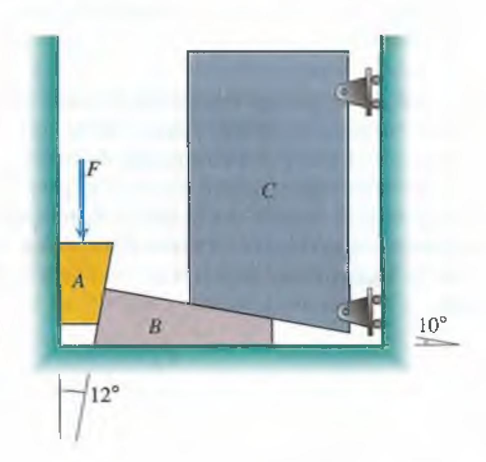
10.64 Suponga que en el problema 10.63 A pesa 800 lb y B pesa 400 lb. Los coeficientes de fricción entre todas las superficies en contacto son $\mu_s = 0.15$ y $\mu_k = 0.12$. ¿Permanecerá B en posición si se retira la fuerza F?

10.65 Entre A y B de la figura, $\mu_s = 0.20$, y entre B y C, $\mu_s = 0.18$. Entre C y la pared, $\mu_s = 0.30$. Los pesos $W_B = 20$ lb y $W_C = 80$ lb. ¿Qué fuerza F se requiere para que C empiece a moverse hacia arriba?



P10.65

10.66 En la figura P10.66 las masas de A, B y C son de 8 kg, 12 kg y 80 kg respectivamente. Para todas las superficies en contacto, $\mu_s = 0.4$. ¿Qué fuerza F se requiere para que C empiece a moverse hacia arriba?

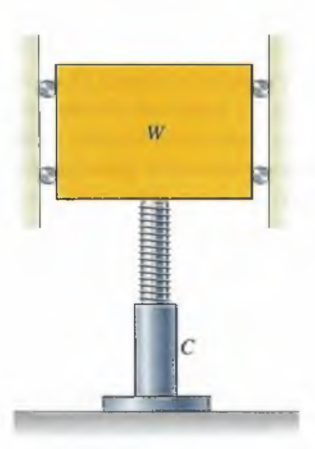


P10.66

10.67 El eje vertical roscado de la figura embona en una ranura casante en el tubo C. El paso de la rosca es $p = 0.1$ pulg y el radio medio de la rosca es $r = 0.5$ pulg. Los coeficientes de fricción entre la rosca y la ranura casante son $\mu_s = 0.15$ y $\mu_k = 0.10$. El peso $W = 200$ lb. Ignore el peso del eje roscado.

(a) ¿Soportará el eje roscado en reposo el peso si no se aplica ningún par al eje?

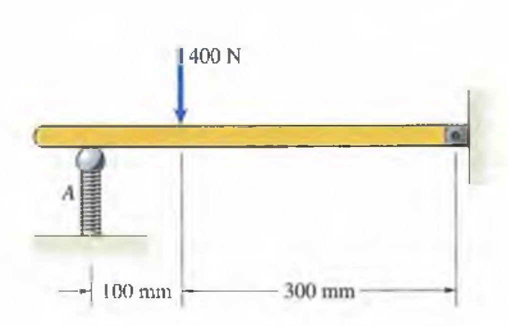
(b) ¿Qué par se debe aplicar al eje roscado para elevar el peso con velocidad constante?



P10.67

10.68 Suponga que en el problema 10.67 el paso de la rosca es $p = 2$ mm y que el radio medio de la rosca es $r = 20$ mm. Los coeficientes de fricción entre la rosca y la ranura casante son $\mu_s = 0.22$ y $\mu_k = 0.20$, y $W = 500$ N. Ignore el peso del eje roscado. ¿Qué par debe aplicarse al eje para bajar el peso a velocidad constante?

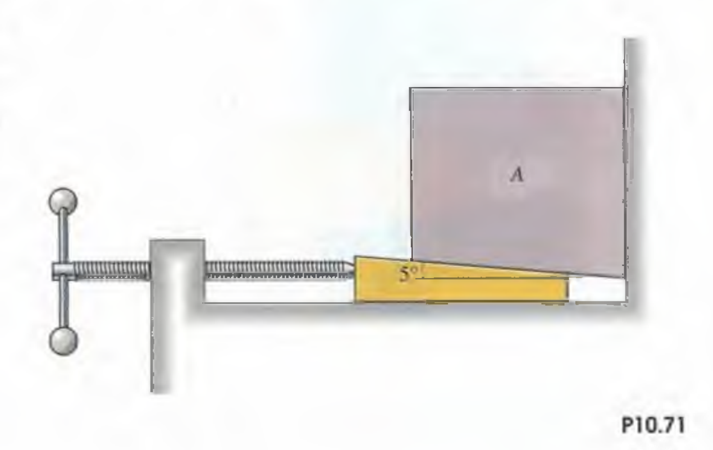
10.69 La posición de la viga horizontal se puede ajustar haciendo girar el tornillo A. Ignore el peso de la viga. El paso del tornillo es $p = 1$ mm y el radio medio de la rosca es $r = 4$ mm. Los coeficientes de fricción entre la rosca y la ranura casante son $\mu_s = 0.20$ y $\mu_k = 0.18$. Si el sistema está inicialmente en reposo, determine el par que se debe aplicar al tornillo para que la viga empiece a moverse: (a) hacia arriba, (b) hacia abajo.



P10.69

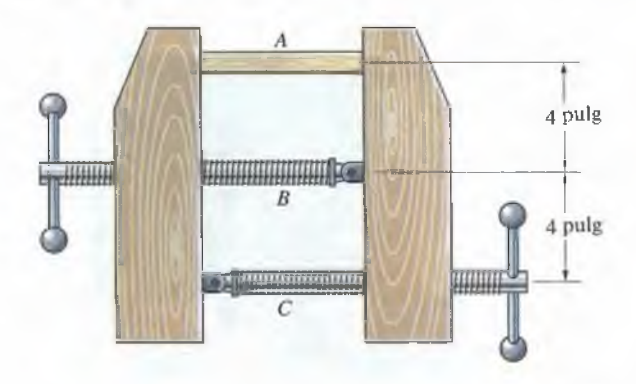
10.70 Suponga que en el problema 10.69 el paso del tornillo es $p = 1$ mm y el radio medio de la rosca es $r = 4$ mm. ¿Qué valor mínimo del coeficiente de fricción estática entre la rosca y la ranura casante es necesario para que la viga permanezca en la posición mostrada sin aplicar ningún par al tornillo?

10.71 El bloque A mostrado pesa 600 N. Ignore el peso de la cuña de 5°. El coeficiente de fricción cinética entre las superficies en contacto del bloque A, la cuña, la mesa y la pared es $\mu_k = 0.4$. El paso del tornillo roscado es de 5 mm, el radio medio de la rosca es de 15 mm y el coeficiente de fricción cinética entre la rosca y la ranura casante es de 0.2. ¿Qué par debe ejercerse sobre el tornillo roscado para elevar el bloque A con velocidad constante?



P10.71

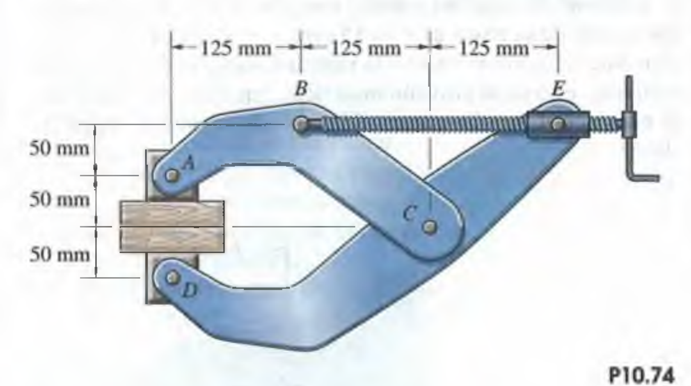
10.72 La prensa de tornillo mostrada ejerce fuerzas de 80 lb sobre A. Los tornillos roscados están sometidos sólo a cargas axiales por las mordazas de la prensa. El paso de sus roscas es $p = 1/8$ pulg, el radio medio de las roscas es $r = 1$ pulg y el coeficiente de fricción estática entre las roscas y las ranuras casantes es 0.2. Suponga que se quiere aflojar la prensa haciendo girar uno de los tornillos. Determine el par que se debe aplicar: (a) al tornillo B, (b) al tornillo C.



P10.72

10.73 Suponga que se quiere apretar la prensa del problema 10.72 haciendo girar uno de los tornillos. Determine el par que se debe aplicar: (a) al tornillo B, (b) al tornillo C.

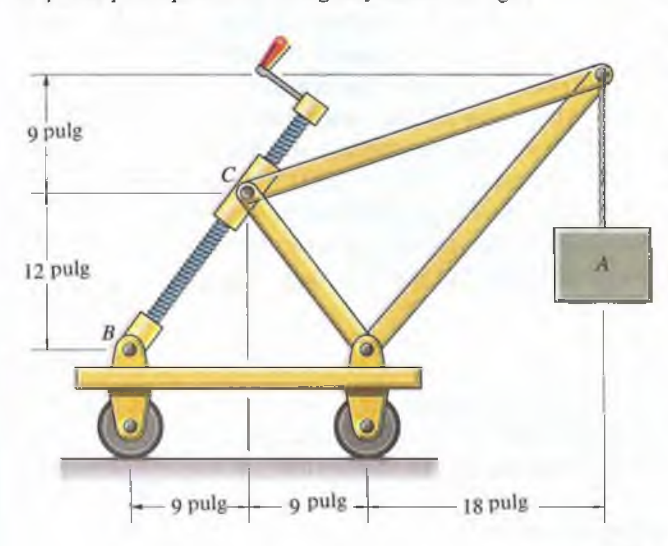
10.74 La abrazadera mostrada comprime dos piezas de madera entre sí. El paso de las roscas es $p = 2$ mm, el radio medio de la rosca es $r = 8$ mm y el coeficiente de fricción cinética entre la rosca y la ranura casante es 0.24. ¿Qué par debe aplicarse al tornillo roscado para que comprima las piezas de madera con una fuerza de 200 N?



P10.74

10.75 Suponga que en el problema 10.74 el coeficiente de fricción estática entre la rosca y la ranura casante es 0.3. Si la abrazadera comprime las piezas de madera con una fuerza de 200 N, ¿qué par debe aplicarse al tornillo roscado para que la abrazadera empiece a aflojarse?

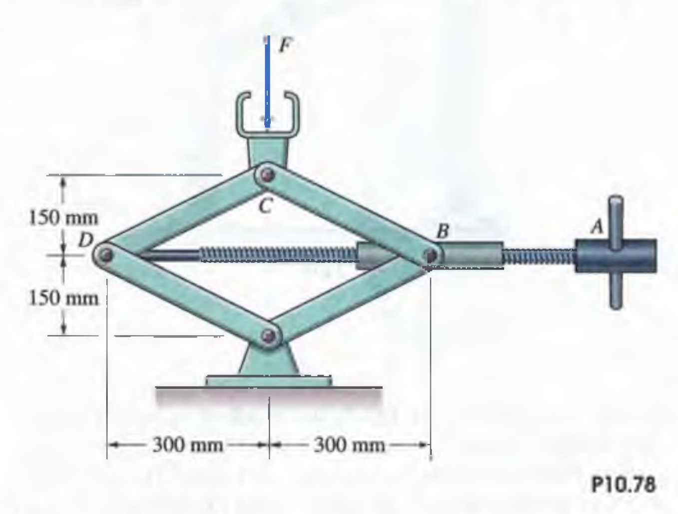
10.76 El tornillo roscado de la figura tiene un soporte de bola y cuenca en B. La carga A de 400 lb puede subirse o bajarse haciendo girar el tornillo, lo cual ocasiona que el collar roscado en C se mueva con respecto al tornillo. Ignore los pesos de los elementos. El paso de la rosca es $p = \frac{1}{4}$ pulg, el radio medio de la rosca es $r = 1$ pulg y el coeficiente de fricción estática entre la rosca y la ranura casante es 0.24. Si el sistema está en reposo en la posición mostrada, ¿qué par se requiere para que el tornillo gire y eleve la carga?



P10.76

10.77 En el problema 10.76, si el sistema está en reposo en la posición mostrada, ¿qué par se necesita para que el tornillo empiece a girar y baje la carga?

10.78 El gato de automóvil funciona haciendo girar el tornillo roscado en A, que embona en una ranura casante del collar en B, de modo que el collar se mueve respecto al tornillo conforme éste gira. En consecuencia, los puntos B y D se acercan o se alejan, causando que el punto C (donde el automóvil está en contacto con el gato) se mueva hacia arriba o hacia abajo. El paso del tornillo roscado es $p = 5$ mm, el radio medio de la rosca es $r = 10$ mm y el coeficiente de fricción cinética entre la rosca y la ranura casante es 0.15. ¿Qué par se necesita para que el tornillo gire a velocidad constante y eleve el gato cuando éste se halla en la posición mostrada y $F = 6.5$ kN?



P10.78

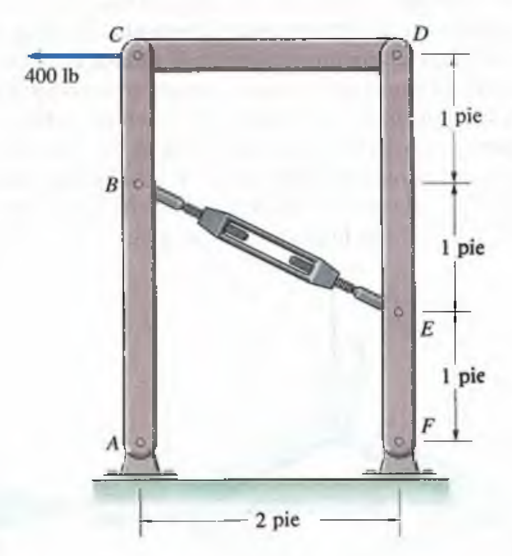
10.79 (Véase P10.78.) ¿Qué par se necesita para hacer girar el tornillo roscado con velocidad constante y que el gato descienda desde la posición mostrada si la fuerza $F = 6.5$ kN?

10.80 Un templador como el mostrado se usa para ajustar la tensión en una barra o cable. El eslabón central tiene roscas en ambos extremos. Al hacer girar el templador los extremos roscados se acercan o se alejan uno del otro. Suponga que el paso de las roscas es $p = \frac{1}{8}$ pulg, su radio medio es $r = 1$ pulg y el coeficiente de fricción estática entre las roscas y las ranuras casantes es 0.24. Si $T = 200$ lb, ¿qué par debe ejercerse sobre el templador para que éste empiece a apretar?



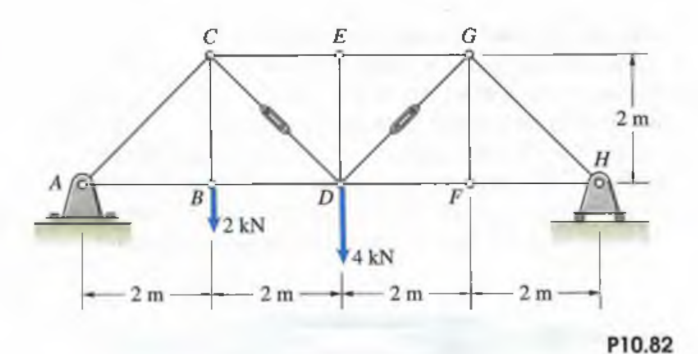
P10.80

10.81 El elemento *BE* del bastidor mostrado tiene un templador (véase el Problema 10.80). Las roscas tienen un paso $p = \frac{1}{32}$ pulg, el radio medio de las roscas es $r = \frac{1}{4}$ pulg y el coeficiente de fricción estática entre las roscas y las ranuras casantes es 0.2. ¿Qué par debe aplicarse al templador para que empiece a aflojar?



P10.81

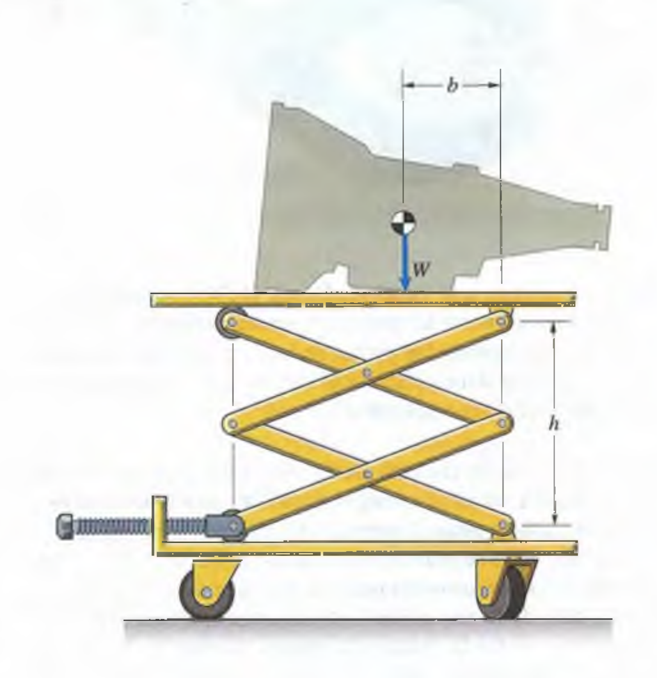
10.82 Las barras *CD* y *DG* de la armadura mostrada tienen templadores (véase el Problema 10.80). El paso de las roscas es $p = 4$ mm, su radio medio es $r = 10$ mm y el coeficiente de fricción estática entre las roscas y las ranuras casantes es 0.18. ¿Qué par se debe aplicar al templador de la barra *CD* para que empiece a aflojar?



P10.82

10.83 En el problema 10.82, ¿qué par debe aplicarse al templador de la barra *DG* para que empiece a aflojar?

10.84 La carga $W = 800$ N puede subirse o bajarse haciendo girar el tornillo roscado. Las distancias son $b = 75$ mm y $h = 200$ mm. Las barras de pasador tienen cada una 300 mm de longitud. El paso del tornillo roscado es $p = 5$ mm, el radio medio de la rosca es $r = 15$ mm y el coeficiente de fricción cinética entre la rosca y la ranura casante es 0.2. Cuando el sistema está en la posición mostrada, ¿qué par debe aplicarse para que el tornillo gire a velocidad constante y la carga se eleve?



P10.84

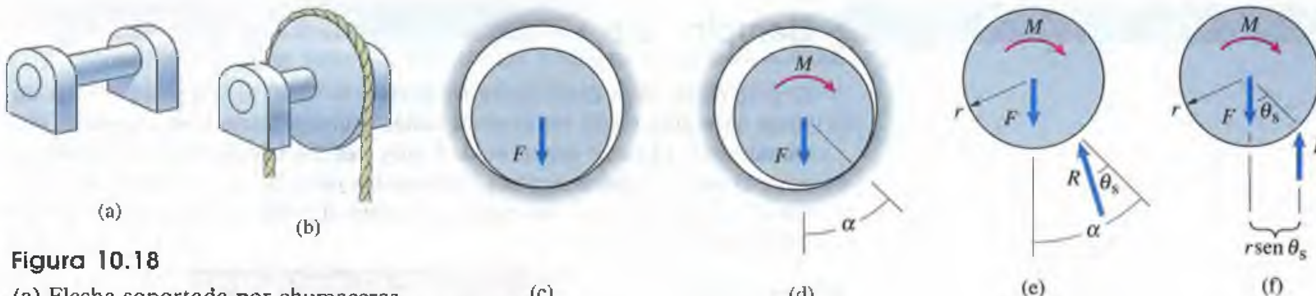


Figura 10.18

(a) Flecha soportada por chumaceras.
(b) Polea soportada por la flecha.
(c) La flecha y la chumacera cuando ningún par está aplicado al árbol.
(d) Un par ocasiona que la flecha ruede dentro de la chumacera.
(e) Diagrama de cuerpo libre de la flecha.
(f) Las dos fuerzas sobre la flecha deben ser iguales y opuestas.

Chumaceras

Una **chumacera** es un soporte diseñado para permitir que el objeto soportado se mueva. Por ejemplo, en la figura 10.18(a) una flecha horizontal está soportada por 2 chumaceras que permiten que la flecha gire. La flecha puede entonces soportar una carga perpendicular a su eje, como en el caso de una carga sujeta por una polea (Fig. 10.18b).

Aquí analizaremos chumaceras que consisten en ménsulas con agujeros a través de los cuales pasa la flecha. El radio de la flecha es ligeramente menor que el de los agujeros de las chumaceras. El objetivo es determinar el par que se debe aplicar a la flecha para que gire en las chumaceras. Sea F la carga total soportada por la flecha, incluido el peso ésta. Cuando no se aplica ningún par sobre la flecha, la fuerza F presiona las chumaceras (Fig. 10.18c). Cuando se ejerce un par M sobre la flecha, ésta rueda sobre las superficies de las chumaceras (Fig. 10.18d). El término α es el ángulo entre el punto original de contacto de la flecha y su punto de contacto cuando se aplica M.

La figura 10.18(e) es el diagrama de cuerpo libre de la flecha cuando M es lo bastante grande para que el deslizamiento sea inminente. La fuerza R es la reacción total ejercida por las dos chumaceras. Como R y F son las únicas fuerzas que actúan sobre la flecha, el equilibrio requiere que $\alpha = \theta_s$ y $R = F$ (Fig. 10.18f). La reacción ejercida sobre la flecha por las chumaceras se desplaza r sen θ_s de la línea vertical que pasa por el centro de la flecha. Sumando momentos respecto al centro de la flecha, obtenemos el par M que hace que la flecha esté a punto de deslizarse:

$$M = rF \operatorname{sen} \theta_s. \tag{10.15}$$

Éste es el máximo par que se puede ejercer sobre la flecha sin que ésta empiece a girar. Reemplazando θ_s en esta expresión por el ángulo de fricción cinética θ_k, obtenemos el par necesario para que la flecha gire con velocidad constante.

La chumacera que hemos descrito es muy primitiva. Las superficies donde la flecha y la chumacera están en contacto se desgastaría rápidamente. Por lo general, los proyectistas incorporan "bolas" o "baleros" en las chumaceras para minimizar la fricción (Fig. 10.19).

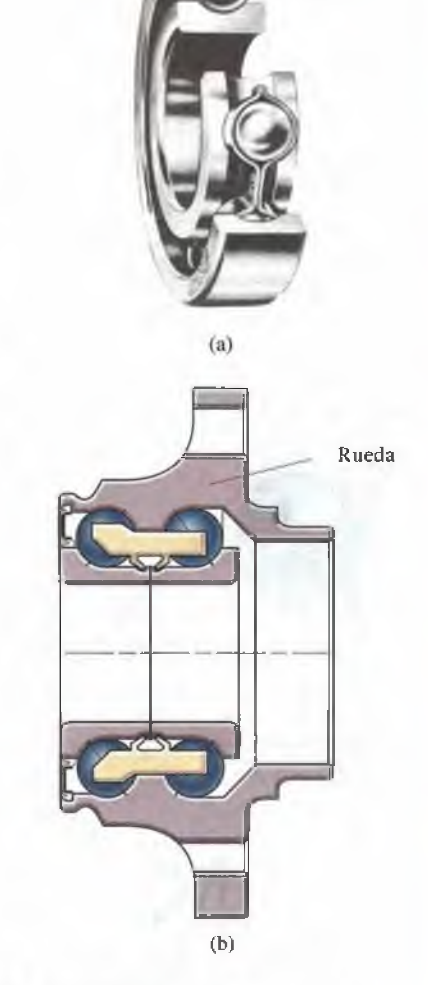


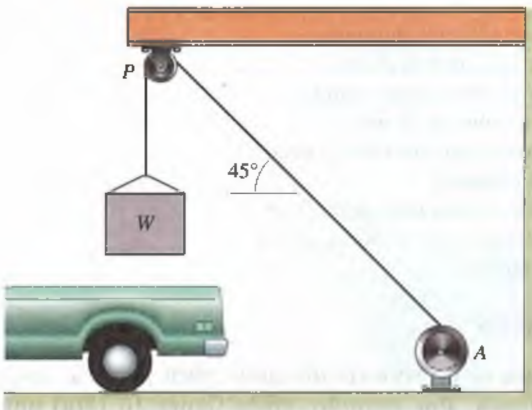
Figura 10.19

(a) Chumacera con una hilera de baleros.
(b) Chumacera de la rueda de un automóvil. Tiene dos hileras de baleros entre la rueda rotatoria y el cilindro interior fijo.

Ejemplo 10.6

El peso de la carga de la figura 10.20 es $W = 1000$ lb. La polea P tiene un radio de 6 pulg y está rígidamente unida a un eje horizontal soportado por chumaceras. El radio del eje es de $\frac{1}{2}$ pulg y el coeficiente de fricción cinética entre el eje y la chumacera es μ_k. Ignore los pesos de la polea y el eje. ¿Qué tensión debe ejercer el cabrestante A sobre el cable para elevar la carga a velocidad constante?

Figura 10.20



ESTRATEGIA

La ecuación (10.15) con θ_s reemplazada por θ_k relaciona el par M requerido para que la polea gire a velocidad constante con la fuerza total F sobre el eje. Expresando M y F en función de la carga y de la tensión ejercida por el cabrestante, podemos obtener una ecuación para la tensión.

SOLUCIÓN

Sea T la tensión ejercida por el cabrestante (Fig. a). Calculando la magnitud de la suma de las fuerzas ejercidas por la tensión y la carga, obtenemos una expresión para la fuerza total F sobre el eje que soporta la polea (Fig. b):

$$F = \sqrt{(W + T \operatorname{sen} 45^\circ)^2 + (T \cos 45^\circ)^2}.$$

El par ejercido sobre la polea por la tensión y la carga es

$$M = (0.5 \text{ pie})\, T - (0.5 \text{ pie})\, W.$$

El radio del eje es $r = \frac{1}{2}$ pulg $= 0.0417$ pies, y el ángulo de fricción cinética es $\theta_k = \arctan(\mu_k) = \arctan(0.2) = 11.31°$. De la Ec. (10.15), el par M necesario para que la polea gire a velocidad constante se da en función de F por

$$M = rF \operatorname{sen} \theta_k.$$

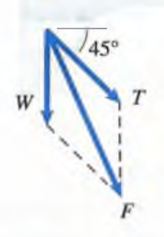
Sustituyendo nuestras expresiones para F y M en función de la tensión T y la carga W en esta ecuación, obtenemos

$$(0.5)T - (0.5)W = (0.0417)\operatorname{sen}(11.31°)\sqrt{(W + T \operatorname{sen} 45°)^2 + (T \cos 45°)^2}.$$

Despejando de esta ecuación la tensión, obtenemos $T = 1030.7$ lb.



(a) Diagrama de cuerpo libre de la polea.



(b) La fuerza F total sobre el árbol.

Cojinetes de empuje y embragues

Un **cojinete de empuje** soporta una flecha rotatoria sometida a carga axial. En el tipo mostrado en las figuras 10.21(a) y (b), el extremo cónico de la flecha es presionado contra la cavidad cónica casante por una carga axial F. Hallemos el par M necesario para hacer girar la flecha.

El elemento diferencial de área dA de la figura 10.21(c) es

$$dA = 2\pi r\, ds = 2\pi r \frac{dr}{\cos\alpha}.$$

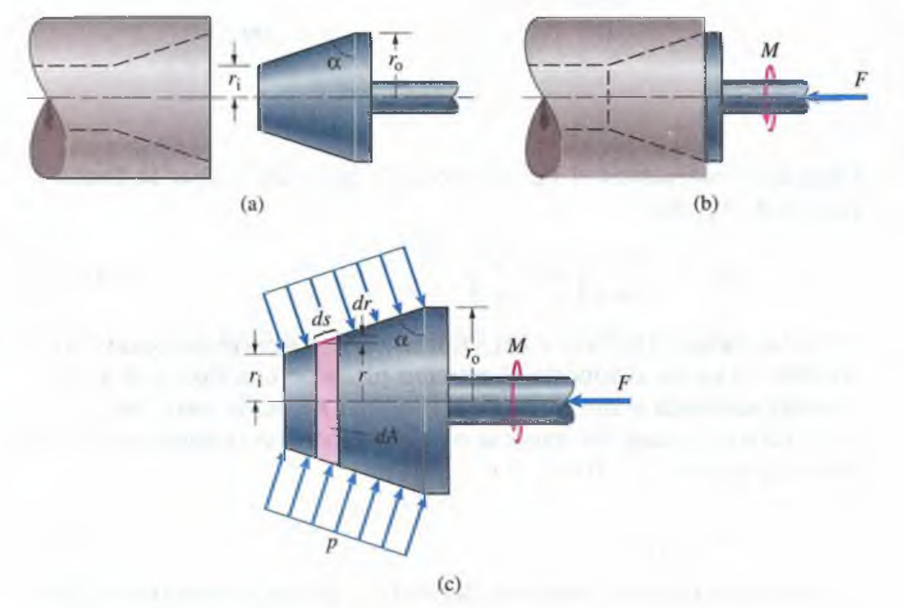


Figura 10.21

(a), (b) Un cojinete de empuje soporta una flecha sometida a una carga axial.
(c) El elemento diferencial dA y la presión uniforme p ejercida por la cavidad.

Integrando esta expresión de $r = r_i$ a $r = r_o$, obtenemos el área de contacto

$$A = \frac{\pi(r_o^2 - r_i^2)}{\cos\alpha}.$$

Si suponemos que la superficie casante ejerce una presión p uniforme, la componente axial de la fuerza total debida a p debe ser igual a F, es decir $pA \cos\alpha = F$. Por tanto, la presión es

$$p = \frac{F}{A\cos\alpha} = \frac{F}{\pi(r_o^2 - r_i^2)}.$$

Conforme la flecha gira alrededor de su eje, el momento respecto al eje debido a la fuerza de fricción sobre el elemento dA es $r\mu_k\,(p dA)$. La suma de los momentos respecto al eje debe ser cero:

$$M = \int_A \mu_k r p\, dA = \int_{r_i}^{r_o} \mu_k r \frac{F}{\pi(r_o^2 - r_i^2)} \frac{2\pi r\, dr}{\cos\alpha}.$$

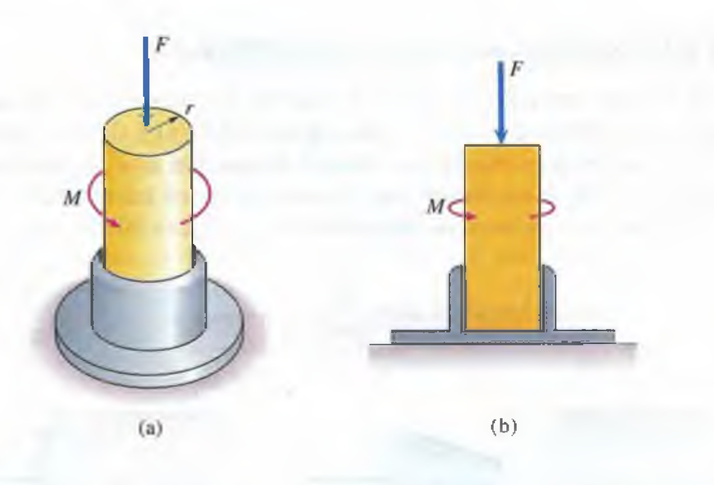


Figura 10.22
Cojinete de empuje que soporta una flecha de extremo plano.

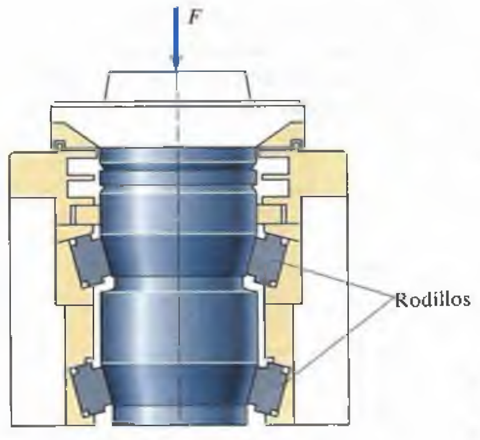


Figura 10.23
Cojinete de empuje con dos hileras de rodillos cilíndricos entre el eje y el soporte fijo.

Integrando obtenemos el par M necesario para hacer girar la flecha a velocidad constante:

$$M = \frac{2\mu_k F}{3\cos\alpha}\left(\frac{r_o^3 - r_i^3}{r_o^2 - r_i^2}\right). \qquad (10.16)$$

En las figuras 10.22(a) y (b) se muestra un cojinete de empuje más sencillo. El pedestal soporta el extremo plano de una flecha de radio r que está sometida a una carga axial F. El par necesario para hacer girar la flecha a velocidad constante se puede obtener con la ecuación (10.16) haciendo $\alpha = 0$, $r_i = 0$ y $r_o = r$:

$$M = \frac{2}{3}\mu_k F r. \qquad (10.17)$$

Aunque son buenos ejemplos del análisis de las fuerzas de fricción, estos cojinetes de empuje se desgastarían muy rápidamente usándolos en casi cualquier aplicación. El proyectista del cojinete de empuje de la figura 10.23 minimiza la fricción incorporando "rodillos" al diseño.

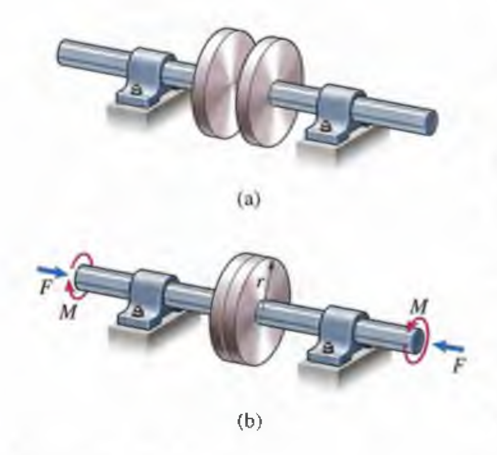


Figura 10.24
Embrague.
(a) Posición desacoplada.
(b) Posición acoplada.

Un **embrague** es un dispositivo usado para conectar y desconectar dos flechas coaxiales en rotación. El tipo mostrado en las figuras 10.24(a) y (b) consiste en discos de radio r unidos a los extremos de flechas. Cuando los discos se separan (Fig. 10.24a), el embrague está **desacoplado** y las flechas pueden girar libremente una respecto a la otra. Cuando el embrague está acoplado, oprimiéndose los discos uno contra el otro con fuerzas F (Fig. 10.24b), las flechas pueden soportar un par M debido a las fuerzas de fricción entre los discos. Si el par M es muy grande, el embrague desliza.

Las fuerzas de fricción ejercidas sobre una cara del embrague por la otra cara son idénticas a las fuerzas de fricción ejercidas por el pedestal de la figura 10.22 sobre el extremo plano de una flecha. Podemos entonces determinar el máximo par que el embrague puede soportar sin deslizamiento, reemplazando μ_s por μ_k en la ecuación (10.17):

$$M = \frac{2}{3}\mu_s F r. \qquad (10.18)$$

Ejemplo 10.7

La lijadora manual de la figura 10.25 tiene un disco rotatorio D de 4 pulg de radio, con papel de lija unido a ella. La fuerza total hacia abajo ejercida por el operador y el peso de la lijadora alcanzan las 15 lb. El coeficiente de fricción cinética entre la lija y la superficie es $\mu_k = 0.6$. ¿Qué par M debe ejercer el motor para hacer girar la lijadora a velocidad constante?

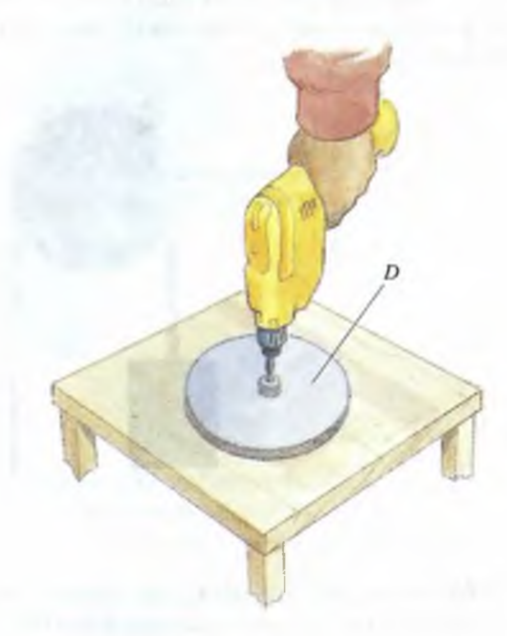


Figura 10.25

ESTRATEGIA

Al girar el disco D queda sujeto a fuerzas de fricción análogas a las fuerzas de fricción ejercidas por la placa de base de la figura 10.22 sobre el árbol de extremo plano. El par requerido para hacer girar el disco D a velocidad constante se puede determinar con la ecuación (10.17).

SOLUCIÓN

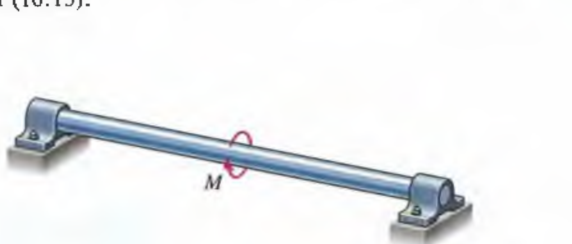
El par requerido para hacer girar el disco a velocidad constante es

$$M = \frac{2}{3}\mu_k r F = \frac{2}{3}(0.6)(4/12)(15) = 2 \text{ lb-pie}.$$

Problemas

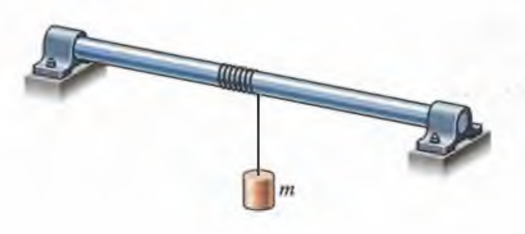
10.85 Un árbol horizontal está soportado por dos chumaceras. El coeficiente de fricción cinética entre el árbol y las chumaceras es $\mu_k = 0.2$. El radio del árbol es de 20 mm y su masa de 5 kg. Determine el par M necesario para hacer girar el árbol a velocidad constante.

Estrategia: A fin de obtener el par necesario para hacer girar el árbol a velocidad constante, reemplace θ_s por θ_k en la ecuación (10.15).



P10.85

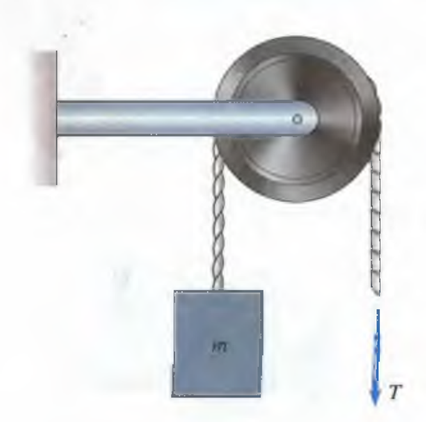
10.86 Un árbol horizontal está soportado por dos chumaceras. El coeficiente de fricción estática entre el árbol y las chumaceras es $\mu_s = 0.3$. El radio del árbol es de 20 mm y su masa de 5 kg. Determine la máxima masa m que se puede suspender como se muestra sin que el árbol en reposo se deslice en las chumaceras.



P10.86

10.87 Suponga que en el problema 10.86 la masa $m = 8$ kg y el coeficiente de fricción cinética entre el árbol y las chumaceras es $\mu_k = 0.26$. ¿Qué par debe aplicarse al árbol para elevar la masa a velocidad constante?

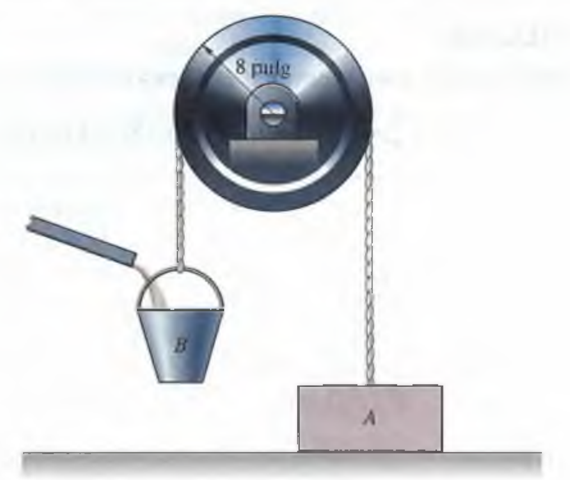
10.88 Una polea está montada sobre un eje horizontal soportado por chumaceras. El coeficiente de fricción cinética entre el eje y las chumaceras es $\mu_k = 0.3$. El radio del eje es de 20 mm y el radio de la polea es de 150 mm. La masa $m = 10$ kg. Ignore las masas de la polea y del eje. ¿Qué fuerza T debe aplicarse al cable para mover la masa hacia arriba a velocidad constante?



P10.88

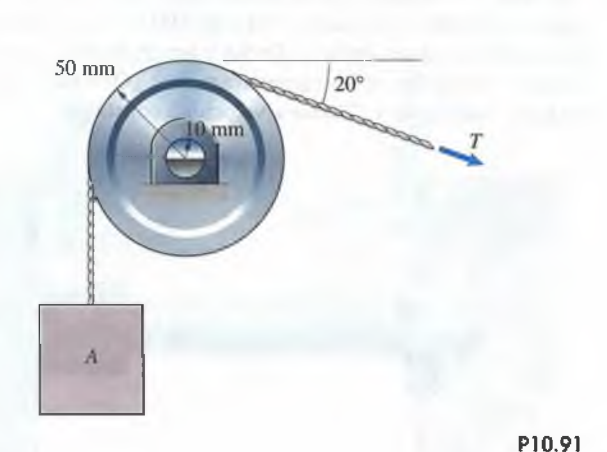
10.89 En el problema 10.88, ¿qué fuerza T debe aplicarse al cable para que la masa descienda a velocidad constante?

10.90 Una polea de 8 pulg de radio está montada sobre un eje de 1 pulg de radio. El eje está soportado por dos chumaceras. El coeficiente de fricción estática entre las chumaceras y el eje es $\mu_s = 0.15$. Ignore los pesos de la polea y del eje. El bloque A de 50 lb de peso descansa sobre el piso. Si se agrega lentamente arena a la cubeta B, ¿qué peso tiene ésta junto con la arena cuando el eje se desliza en las chumaceras?



P10.90

10.91 Una polea de 50 mm de radio está montada sobre un eje de 10 mm de radio. El eje está soportado por dos chumaceras. La masa del bloque A es de 8 kg. Ignore los pesos de la polea y del eje. Si se necesita una fuerza $T = 84$ N para levantar el bloque A a velocidad constante, ¿cuál es el coeficiente de fricción cinética entre el eje y las chumaceras?



P10.91

10.92 (Véase P10.91.) El coeficiente de fricción cinética entre el eje y las chumaceras es $\mu_k = 0.18$. ¿Qué fuerza T se necesita para levantar el bloque A a velocidad constante?

10.93 (Véase P10.91.) El coeficiente de fricción cinética entre el eje y las chumaceras es $\mu_k = 0.24$. ¿Qué fuerza T se necesita para bajar el bloque a velocidad constante?

10.94 Las dos poleas tienen radios de 4 pulg y están montadas sobre ejes de 1 pulg de radio soportados por chumaceras. Ignore los pesos de las poleas y los ejes. La tensión en el resorte es de 40 lb. El coeficiente de fricción cinética entre los ejes y las chumaceras es $\mu_k = 0.3$. ¿Qué par M se requiere para hacer girar la polea izquierda a velocidad constante?



P10.94

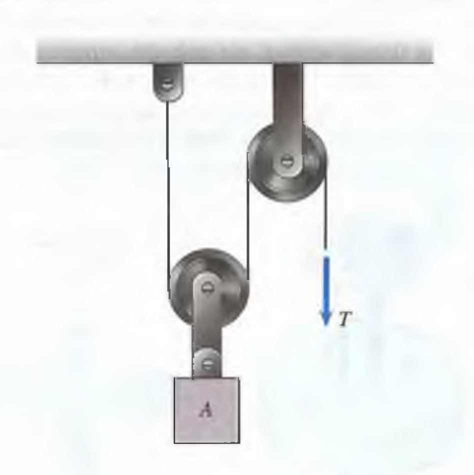
10.95 Las dos poleas mostradas tienen radios de 6 pulg y están montadas sobre ejes de 1 pulg de radio soportados por chumaceras. Ignore los pesos de las poleas y de los ejes. El coeficiente de fricción cinética entre los ejes y las chumaceras es $\mu_k = 0.2$. Si se requiere una fuerza $T = 200$ lb para elevar a una persona a velocidad constante, ¿cuál es el peso de ésta?



P10.95

10.96 Si la persona del problema 10.95 pesa 160 lb, ¿qué fuerza T se necesita para bajarlo a velocidad constante?

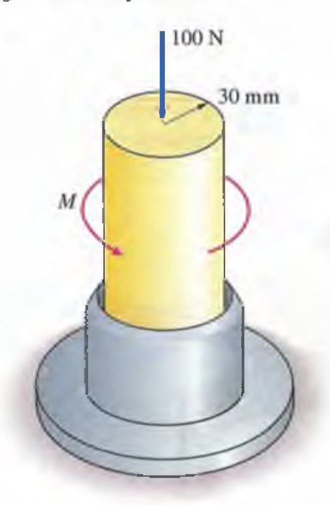
10.97 Cada una de las poleas de la figura tiene un radio de 100 mm y una masa de 2 kg. Están montadas sobre ejes de 5 mm de radio soportados por chumaceras. El coeficiente de fricción cinética entre los ejes y las chumaceras es $\mu_k = 0.18$. La masa de A es de 14 kg. ¿Qué fuerza T se requiere para elevar A con velocidad constante?



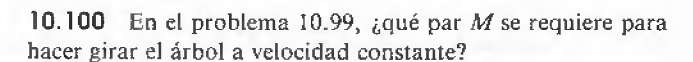
P10.97

10.98 En el problema 10.97, ¿qué fuerza T se necesita para bajar A a velocidad constante?

10.99 El árbol circular de extremos planos de la figura es empujado en el cojinete de empuje por una carga axial de 100 N. Ignore el peso del árbol. Los coeficientes de fricción entre el extremo del árbol y el cojinete son $\mu_s = 0.20$ y $\mu_k = 0.15$. ¿Cuál es el máximo par M que se puede aplicar al árbol en reposo sin que gire en el cojinete?



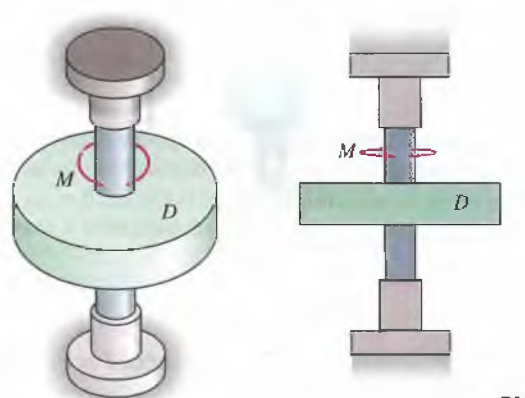
P10.99



10.100 En el problema 10.99, ¿qué par M se requiere para hacer girar el árbol a velocidad constante?

10.101 En P10.99, el extremo del árbol está soportado por un cojinete de empuje como el de la figura 10.21, donde r_o = 30 mm, r_i = 10 mm, $\alpha = 30°$ y $\mu_k = 0.15$. ¿Qué par M se requiere para hacer girar el árbol a velocidad constante?

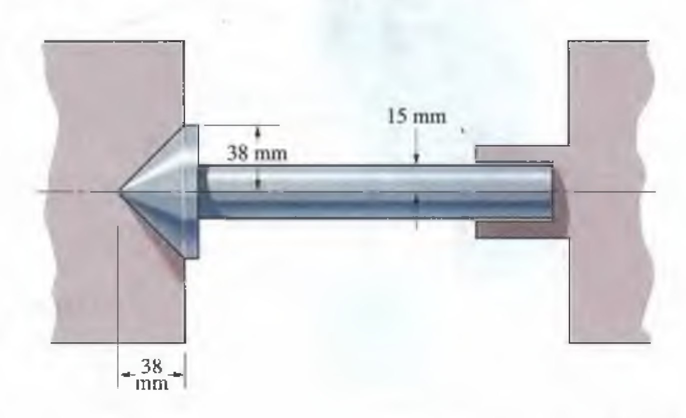
10.102 El disco D está rígidamente unido al eje vertical, que tiene extremos planos soportados por cojinetes de empuje. El disco y el eje pesan juntos 500 lb y el eje tiene 2 pulg de diámetro. La fuerza vertical del cojinete superior en el extremo del eje es de 100 lb. El coeficiente de fricción cinética entre los extremos del eje y los cojinetes es $\mu_k = 0.25$. ¿Qué par M se requiere para hacer girar el eje a velocidad constante?



P10.102

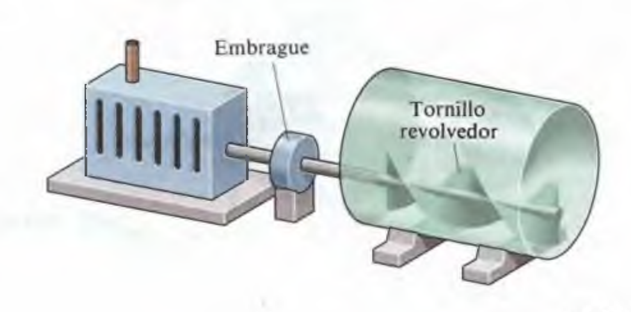
10.103 Suponga que los extremos del eje del problema 10.102 están soportados por cojinetes de empuje como los de la figura 10.21, donde r_o = 1 pulg, $r_i = \frac{1}{4}$ pulg, $\alpha = 45°$ y $\mu_k = 0.25$. ¿Qué par M se requiere para hacer girar el eje a velocidad constante?

10.104 La flecha está soportada por cojinetes de empuje que la someten a una carga axial de 800 N. Los coeficientes de fricción cinética entre la flecha y los cojinetes izquierdo y derecho son 0.20 y 0.26, respectivamente. ¿Qué par se requiere para hacer girar la flecha a velocidad constante?



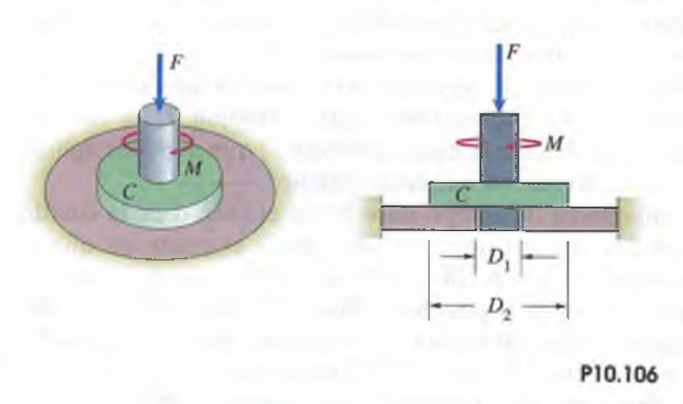
P10.104

10.105 Un motor hace girar un tornillo revolvedor que mezcla productos químicos. La flecha del motor está acoplada al tornillo por medio de un embrague de fricción del tipo mostrado de la figura 10.24. El radio de los discos del embrague es de 120 mm y el coeficiente de fricción estática entre ellos es de 0.6. Si el motor transmite un par máximo de 15 N-m al tornillo, ¿qué fuerza normal mínima entre las placas del embrague se necesita para impedir el deslizamiento?



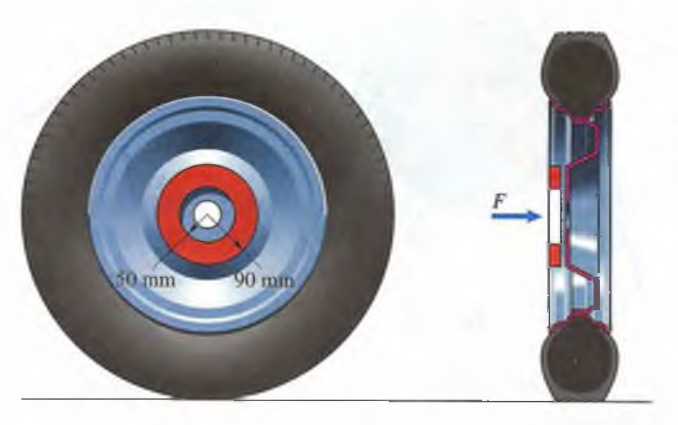
P10.105

10.106 El cojinete de empuje de la figura está soportado por el contacto del collar C con una placa fija. El área de contacto es un anillo con diámetro interior $D_1 = 40$ mm y diámetro exterior $D_2 = 120$ mm. El coeficiente de fricción cinética entre el collar y la placa es $\mu_k = 0.3$. La fuerza $F = 400$ N. ¿Qué par M se requiere para hacer girar el árbol a velocidad constante?



P10.106

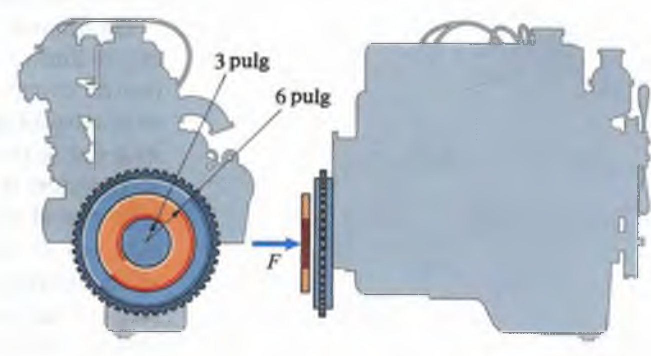
10.107 Un diseño experimental de freno de automóvil funciona oprimiendo una placa anular contra la rueda giratoria. Si $\mu_k = 0.6$, ¿qué fuerza F debe presionar la placa contra la rueda para ejercer en ésta un par de 200 N-m?



P10.107

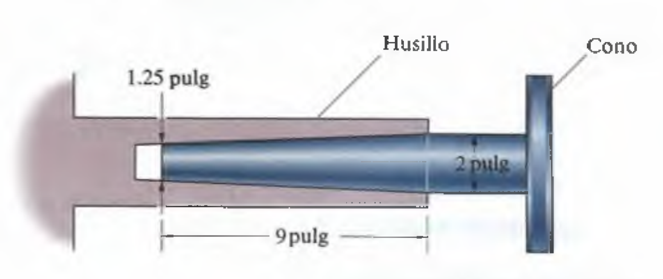
10.108 En P10.107, $\mu_k = 0.65$ y la fuerza que oprime la placa contra la rueda es $F = 2$ kN.
(a) ¿Qué par se ejerce sobre la rueda?
(b) ¿Qué porcentaje de incremento se obtiene en el par ejercido sobre la rueda si el radio exterior del freno aumenta de 90 mm a 100 mm?

10.109 El coeficiente de fricción estática entre los discos del embrague de un automóvil es $\mu_s = 0.8$. Si los discos se oprimen con una fuerza $F = 600$ lb, ¿cuál es el par máximo que el embrague puede soportar sin deslizarse?



P10.109

10.110 El "cono Morse" se usa para sostener la pieza de trabajo sobre un torno. El cono se empuja dentro del husillo y se mantiene en su posición debido a la fricción. Si el husillo ejerce una presión uniforme $p = 15$ lb/pulg^2 sobre el cono y $\mu_s = 0.2$, ¿qué par se debe ejercer respecto al eje del cono para aflojarlo?



P10.110



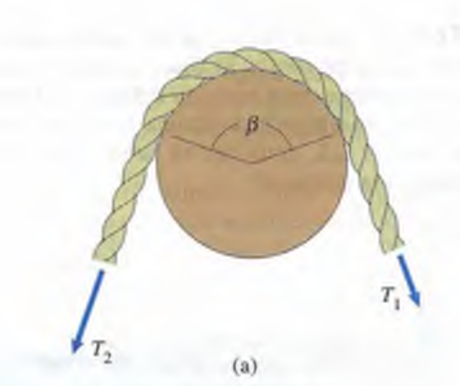
Figura 10.26
Cuerda enrollada alrededor de un poste.

Fricción en bandas

Es un hecho que si se enrolla una cuerda en un poste fijo (Fig. 10.26), una gran fuerza T_2 ejercida en un extremo de la cuerda puede ser soportada por una fuerza T_1 relativamente pequeña en el otro extremo. En la presente sección analizamos este fenómeno, conocido como **fricción en bandas** porque se puede usar un procedimiento similar para analizar las bandas utilizadas en maquinarias, como las bandas que impulsan los alternadores y otros dispositivos de un automóvil.

Consideremos una cuerda alrededor de un ángulo β alrededor de un cilindro fijo (Fig. 10.27a). Supondremos que la tensión T_1 se conoce. Nuestro objetivo es determinar la máxima fuerza T_2 que se puede aplicar al otro extremo de la cuerda sin que ésta se deslice.

Dibujamos el diagrama de cuerpo libre de un elemento de la cuerda cuyos límites son los ángulos α y $\alpha + \Delta\alpha$, desde el punto en que la cuerda entra en contacto con el cilindro (Figs. 10.27b y c). La fuerza T es la tensión en la cuerda en la posición definida por el ángulo α. Sabemos que la tensión en la cuerda varía con la posición, porque crece de T_1 la posición $\alpha + \Delta\alpha$ como $T + \Delta T$. La fuerza ΔN es la normal ejercida por el cilindro sobre el elemento. Como queremos determinar el cida por el cilindro sobre el elemento. Como queremos determinar el valor máximo de T_2 que no ocasionará que la cuerda se deslice, supondremos que la fuerza de fricción es igual a su valor máximo posible $\mu_s \Delta N$, donde μ_s es el coeficiente de fricción estática entre la cuerda y el cilindro.



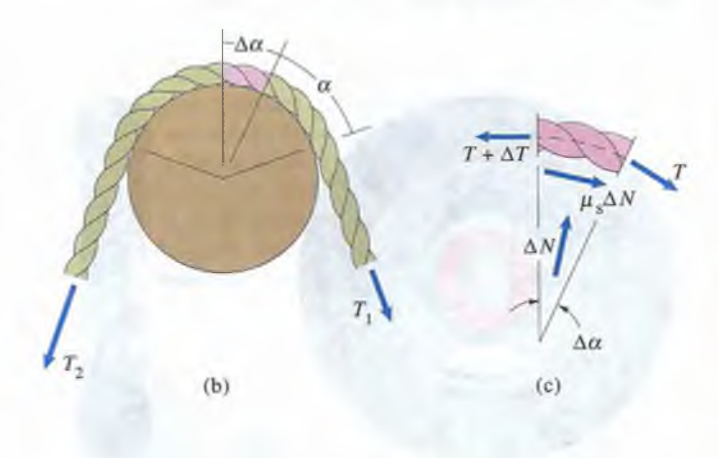


Figura 10.27
(a) Cuerda enrollada alrededor de un cilindro fijo.
(b) Elemento diferencial con límites en los ángulos α y $\alpha + \Delta\alpha$.
(c) Diagrama de cuerpo libre del elemento.

Las ecuaciones de equilibrio en las direcciones tangencial y normal a la línea central de la cuerda son

$$\Sigma F_{(\text{tangencial})} = \mu_s \Delta N + T \cos\left(\frac{\Delta\alpha}{2}\right) - (T + \Delta T)\cos\left(\frac{\Delta\alpha}{2}\right) = 0,$$

(10.19)

$$\Sigma F_{(\text{normal})} = \Delta N - (T + \Delta T)\operatorname{sen}\left(\frac{\Delta\alpha}{2}\right) - T \operatorname{sen}\left(\frac{\Delta\alpha}{2}\right) = 0.$$

Despejando ΔN, podemos escribir la ecuación resultante como

$$\left[\cos\left(\frac{\Delta\alpha}{2}\right) - \mu_s \operatorname{sen}\left(\frac{\Delta\alpha}{2}\right)\right]\frac{\Delta T}{\Delta\alpha} - \mu_s T \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\Delta\alpha}{2}\right)}{\left(\frac{\Delta\alpha}{2}\right)} = 0. \quad (10.20)$$

En el límite, cuando $\Delta\alpha \to 0$,

$$\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\Delta\alpha}{2}\right)}{\left(\frac{\Delta\alpha}{2}\right)} \to 1,$$

obtenemos la ecuación

$$\frac{dT}{d\alpha} - \mu_s T = 0. \quad (10.21)$$

Esta ecuación diferencial rige la variación de la tensión en la cuerda. Separando variables,

$$\frac{dT}{T} = \mu_s \, d\alpha,$$

podemos integrar para determinar la tensión T_2 en función de la tensión T_1 y el ángulo β:

$$\int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T} = \int_0^{\beta} \mu_s \, d\alpha.$$

Obtenemos así la máxima fuerza T_2 que se puede aplicar sin que la cuerda se deslice cuando la fuerza en el otro extremo es T_1:

$$\boxed{T_2 = T_1 e^{\mu_s \beta}.} \quad (10.22)$$

El ángulo β debe expresarse en radianes. Reemplazando μ_s por el coeficiente de fricción cinética μ_k obtenemos la fuerza T_2 que ocasiona que la cuerda se deslice a velocidad constante.

La ecuación (10.22) explica por qué una gran fuerza puede ser soportada por una fuerza relativamente pequeña cuando se enrolla una cuerda alrededor de un soporte fijo. La fuerza requerida para que la cuerda se deslice crece exponencialmente en función del ángulo a través del cual la cuerda está enrollada. Supongamos que $\mu_s = 0.3$. Cuando la cuerda está enrollada una vuelta completa alrededor del poste ($\beta = 2\pi$), la razón $T_2/T_1 = 6.59$. Cuando la cuerda está enrollada cuatro vueltas completas alrededor del poste ($\beta = 8\pi$), la razón $T_2/T_1 = 1881$.

Ejemplo 10.8

Figura 10.28

La caja de 50 kg de la figura 10.28 está suspendido de una cuerda que pasa sobre dos cilindros fijos. El coeficiente de fricción estática es de 0.2 entre la cuerda y el cilindro izquierdo y de 0.4 entre la cuerda y el cilindro derecho. ¿Cuál es la fuerza mínima que la persona puede ejercer para soportar la caja?

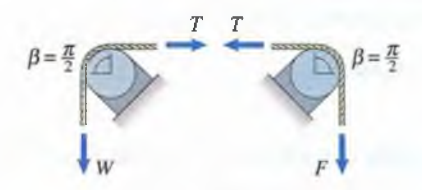
ESTRATEGIA

La persona ejerce la mínima fuerza posible cuando el deslizamiento de la cuerda sobre ambos cilindros es inminente. Si conocemos el peso de la caja, con la ecuación (10.22) se determina la tensión en la cuerda entre los dos cilindros, y se replantea para determinar la fuerza que la persona ejerce.

SOLUCIÓN

El peso de la caja es $W = (50)(9.81) = 490.5$ N. Sea T la tensión en la cuerda entre los dos cilindros (Fig. a). La cuerda está enrollada alrededor del cilindro izquierdo un ángulo $\beta = \pi/2$ rad. La tensión T necesaria para impedir que la cuerda se deslice sobre el cilindro izquierdo está relacionada con W por

$$W = Te^{\mu_s \beta} = Te^{(0.2)(\pi/2)}.$$



(a) Tensiones en la cuerda.

Despejando T obtenemos

$$T = We^{-(0.2)(\pi/2)} = (490.5)e^{-(0.2)(\pi/2)} = 358.3 \text{ N}.$$

La cuerda también está enrollada alrededor del cilindro derecho un ángulo $\beta = \pi/2$ rad. La fuerza F que la persona debe ejercer para impedir que la cuerda se deslice sobre el cilindro derecho está relacionada con T por

$$T = Fe^{\mu_s \beta} = Fe^{(0.4)(\pi/2)}.$$

La solución para F es

$$F = Te^{-(0.4)(\pi/2)} = (358.3)e^{-(0.4)(\pi/2)} = 191.1 \text{ N}.$$

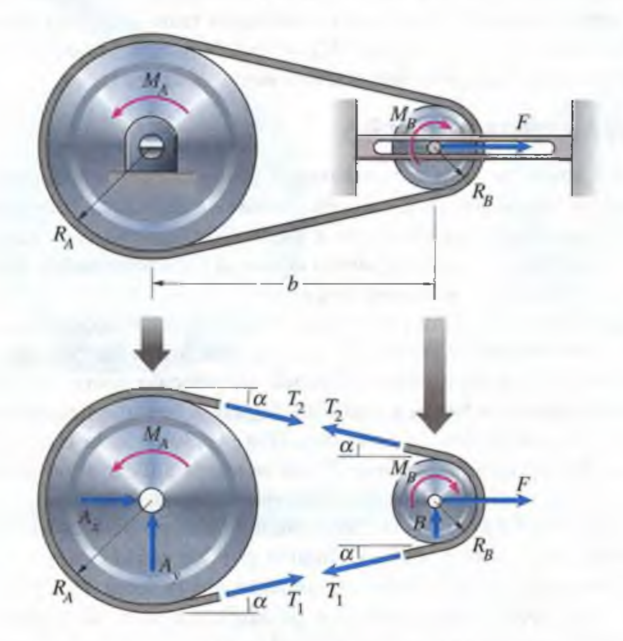
Ejemplo 10.9

Aplicación a la ingeniería

Bandas y poleas

Las poleas de la figura 10.29 giran a velocidad constante. La grande está unida a un soporte fijo, y la otra está soportada por una ranura horizontal lisa y es jalada hacia la derecha por la fuerza $F = 200$ N. El coeficiente de fricción estática entre las poleas y la banda es $\mu_s = 0.8$, la longitud $b = 500$ mm y los radios de las poleas $R_A = 200$ mm y $R_B = 100$ mm. ¿Qué valores máximos tienen los pares M_A y M_B para los cuales la banda no se deslizará?

Figura 10.29



(a) Diagrama de cuerpo libre de la polea grande. (b) Diagrama de cuerpo libre de la polea chica.

ESTRATEGIA

Con los diagramas de cuerpo libre de las poleas podemos usar las ecuaciones de equilibrio para relacionar las tensiones en la banda con M_A y M_B y obtener una relación entre las tensiones en la banda y la fuerza F. Cuando el deslizamiento es inminente, las tensiones también están relacionadas por la ecuación (10.22). Con esas ecuaciones podemos determinar M_A y M_B.

SOLUCIÓN

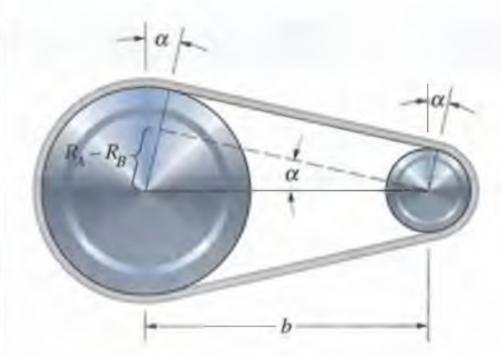
Del primer diagrama (Fig. a) obtenemos la ecuación de equilibrio

$$M_A = R_A(T_2 - T_1), \quad (10.23)$$

y del diagrama de cuerpo libre de la polea pequeña (Fig. b) obtenemos

$$F = (T_1 + T_2)\cos\alpha, \quad (10.24)$$

$$M_B = R_B(T_2 - T_1). \quad (10.25)$$



(c) Determinación del ángulo α.

La banda está en contacto con la polea pequeña sobre el ángulo $\pi - 2\alpha$ (Fig. c). Por la línea discontinua vemos que el ángulo α satisface la relación

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{R_A - R_B}{b} = \frac{200 - 100}{500} = 0.2.$$

Por consiguiente, $\alpha = 11.5° = 0.201$ radianes. Si el deslizamiento es inminente entre la polea pequeña y la banda, la ecuación (10.22) establece que

$$T_2 = T_1 e^{\mu_s \beta} = T_1 e^{0.8(\pi - 2\alpha)} = 8.95 T_1.$$

Resolvemos esta ecuación junto con la ecuación (10.24) para las dos tensiones y obtenemos $T_1 = 20.5$ N y $T_2 = 183.6$ N. Luego, de las ecuaciones (10.23) y (10.24), los pares son $M_A = 32.6$ N-m y $M_B = 16.3$ N-m.

Si suponemos que el deslizamiento es inminente entre la polea grande y la banda, obtenemos $M_A = 36.3$ N-m y $M_B = 18.1$ N-m, por lo que la banda se desliza sobre la polea pequeña para valores menores de los pares.

CONSIDERACIONES DE DISEÑO

Las bandas y poleas se usan para transmitir potencia en automóviles y muchos otros tipos de máquinas. Como dos poleas de diámetros diferentes conectadas por una banda están sujetas a pares diferentes y tienen diferentes velocidades angulares de rotación, sirven como un "transformador" mecánico para alterar el par o la velocidad de giro.

Aquí supusimos que la banda era plana, pero en muchas aplicaciones (Fig. 10.30a) se usan a menudo "bandas V", que se ajustan en las ranuras casantes de las poleas. Esto mantiene a la banda en posición sobre las poleas y reduce la tendencia de la banda a resbalar. Suponga que una banda V se enrolla un ángulo β alrededor de una polea (Fig. 10.30b). Si la tensión T_1 es conocida, ¿cuál es la tensión máxima T_2 que se puede aplicar al otro extremo de la banda sin que ésta resbale o se deslice respecto a la polea?

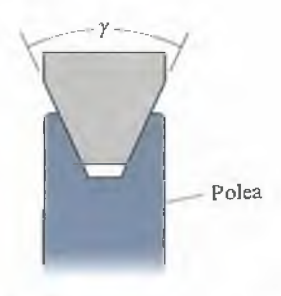
De la figura 10.30(c) dibujamos el diagrama de cuerpo libre de un elemento de la banda cuyos límites están definidos por los ángulos α y $\alpha + \Delta\alpha$, desde el punto en que la banda entra en contacto con la polea. (Compare esta figura con la Fig. 10.27c.) Las ecuaciones de equilibrio en las direcciones tangencial y normal a la línea central de la banda son

$$\Sigma F_{\text{(tangencial)}} = 2\mu_s \Delta N + T\cos\left(\frac{\Delta\alpha}{2}\right) - (T + \Delta T)\cos\left(\frac{\Delta\alpha}{2}\right) = 0,$$

(10.26)

$$\Sigma F_{\text{(normal)}} = 2\Delta N \operatorname{sen}(\gamma/2) - (T + \Delta T)\operatorname{sen}\left(\frac{\Delta\alpha}{2}\right) - T\operatorname{sen}\left(\frac{\Delta\alpha}{2}\right) = 0.$$

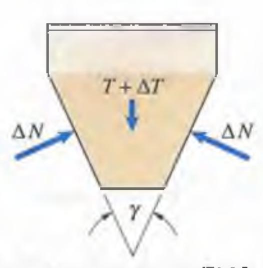
Figura 10.30

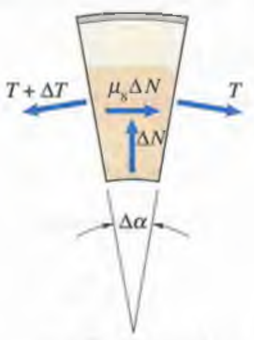


(a) Vista de la sección transversal de una banda V y la polea.



(b) Banda V enrollada alrededor de la polea.





(c) Diagrama de cuerpo libre de un elemento de la banda.

Tal como se llegó de las Ecs. (10.19) a la (10.22), se puede demostrar que

$$T_2 = T_1 e^{[\mu_s \beta\ \mathrm{sen}(\gamma/2)]}. \qquad (10.27)$$

Por tanto, al usar una banda V se incrementa el coeficiente de fricción entre la banda y la polea por el factor $1/\mathrm{sen}\,(\gamma/2)$.

Cuando es esencial que la banda no se deslice con respecto a la polea, se puede usar una banda con dientes y una polea casante (Fig. 10.31a) o una cadena y una rueda de engranes (Fig. 10.31b). Las cadenas y las ruedas de engranes en bicicletas y motocicletas son ejemplos de esta aplicación.

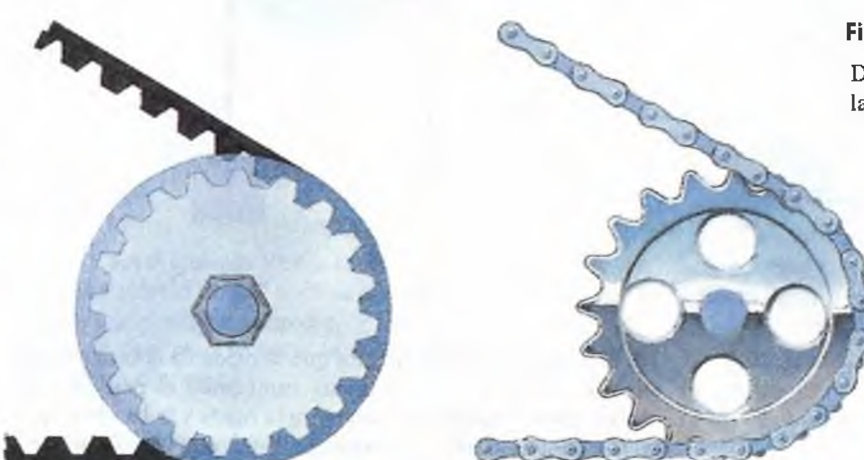


Figura 10.31

Diseños que impiden el deslizamiento de la banda respecto a la polea.

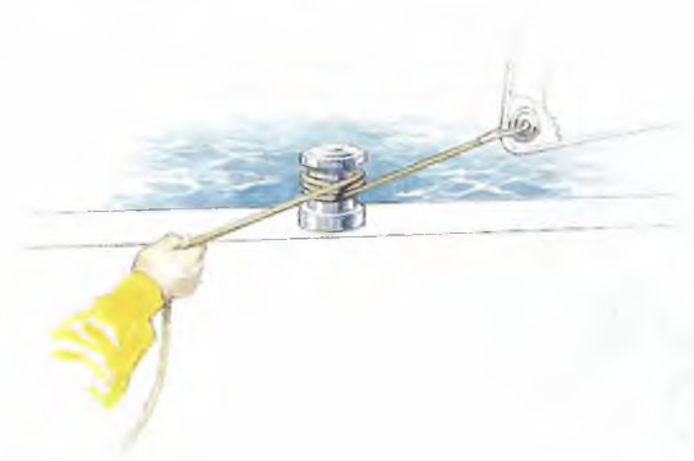
Problemas

10.111 Suponga que se quiere levantar del suelo una caja de 50 lb pasando una cuerda sobre la rama de un árbol, como se muestra. El coeficiente de fricción estática entre la cuerda y la rama es 0.4 y la cuerda está enrollada 120° alrededor de la rama. ¿Qué fuerza se debe ejercer para levantar la caja?



P10.111

10.112 Los cabrestantes se usan en los veleros para ayudar a soportar las cuerdas que mantienen en posición a las velas. El cabrestante simple mostrado es un poste que gira en sentido horario (visto desde arriba) pero no en sentido antihorario. La vela ejerce una fuerza de 800 N sobre la cuerda, que está enrollada tres vueltas completas alrededor del cabrestante. El coeficiente de fricción estática entre la cuerda y el cabrestante es $\mu_s = 0.2$. Determine la fuerza que el tripulante debe ejercer sobre el extremo de la cuerda para impedir que ésta se deslice sobre el cabrestante.



P10.112

10.113 El bloque A mostrado pesa 30 lb. La cuerda está enrollada $1\frac{1}{4}$ vueltas alrededor del poste fijo. Los coeficientes de fricción entre el poste fijo y la cuerda son $\mu_s = 0.2$ y $\mu_k = 0.15$.

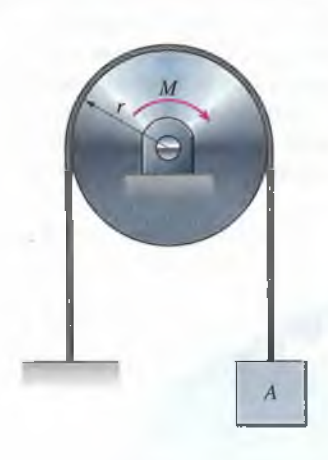
(a) ¿Cuál es la mínima fuerza que la persona debe ejercer para soportar el bloque en reposo?

(b) ¿Qué fuerza debe la persona ejercer para levantar el bloque a velocidad constante?



P10.113

10.114 El peso del bloque A mostrado es W. El disco está soportado por una chumacera lisa. El coeficiente de fricción cinética entre el disco y la banda es μ_k. ¿Qué par es necesario para hacer girar el disco a velocidad constante?



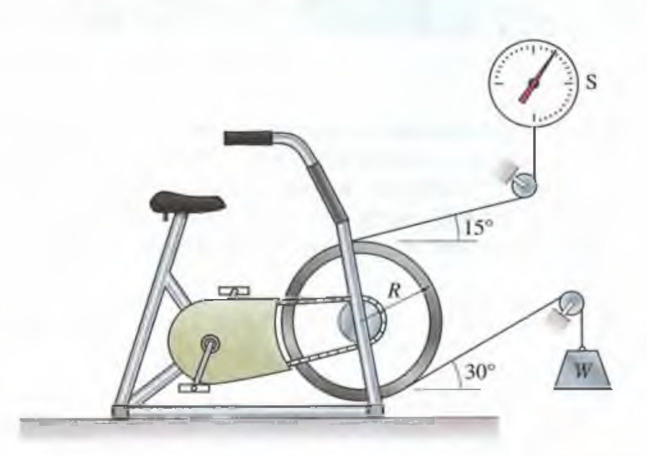
P10.114

10.115 El par requerido para que la rueda de la bicicleta de ejercicio mostrada gire se ajusta cambiando el peso W. El coeficiente de fricción cinética entre la rueda y la banda es μ_k.

(a) Demuestre que el par M requerido para que la rueda gire es

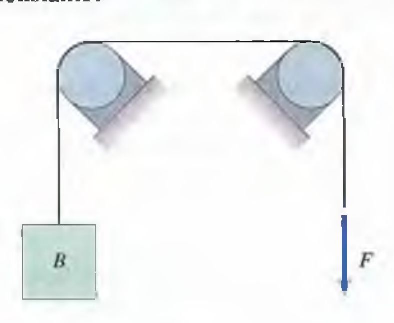
$$M = WR(1 - e^{-3.4\mu_k}).$$

(b) Si $W = 40$ lb y $\mu_k = 0.2$, ¿qué fuerza indicará la báscula S cuando la bicicleta esté en uso?



P10.115

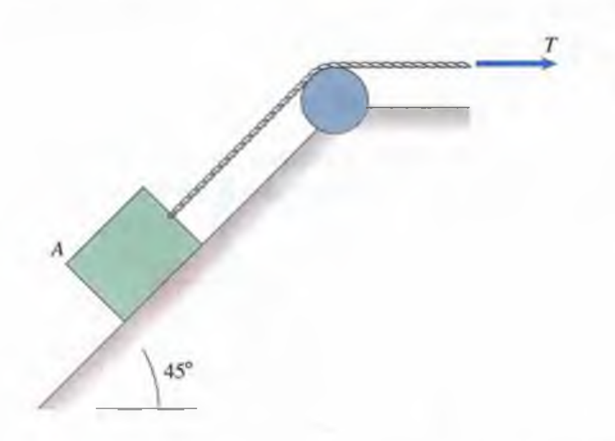
10.116 La caja B mostrada pesa 50 lb. Los coeficientes de fricción entre el cable y los soportes redondos fijos son $\mu_s = 0.4$ y $\mu_k = 0.3$.
(a) ¿Cuál es la fuerza mínima F requerida para soportar la caja?
(b) ¿Qué fuerza F se requiere para mover la caja hacia arriba a velocidad constante?



P10.116

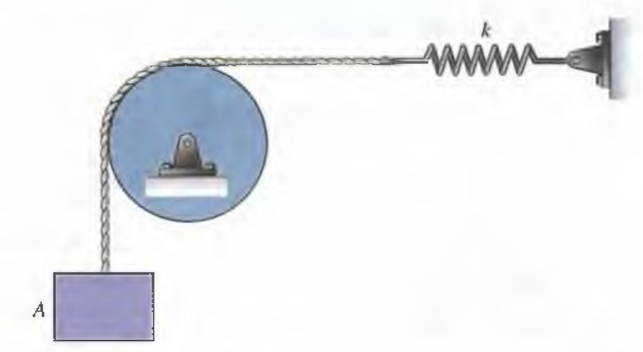
10.117 En el ejemplo 10.8 el coeficiente de fricción cinética es de 0.16 entre el cable y el cilindro izquierdo, y de 0.34 entre la cuerda y el cilindro derecho. ¿Qué fuerza tiene que ejercer la persona para levantar la caja a velocidad constante? ¿Necesitará ella ayuda?

10.118 El bloque A pesa 200 N. El coeficiente de fricción estática entre el bloque y la superficie inclinada es de 0.3, y el coeficiente de fricción estática entre el cable y el cilindro fijo es de 0.2. ¿Para qué intervalo de valores de la tensión T permanecerá en reposo el bloque?



P10.118

10.119 El bloque A mostrado pesa 30 lb. El coeficiente de fricción cinética entre la cuerda y el cilindro es de 0.2. Si el cilindro gira a velocidad constante, primero en sentido antihorario y luego en sentido horario, la diferencia en la altura del bloque A es de 1 pie. ¿Cuál es la constante k del resorte?



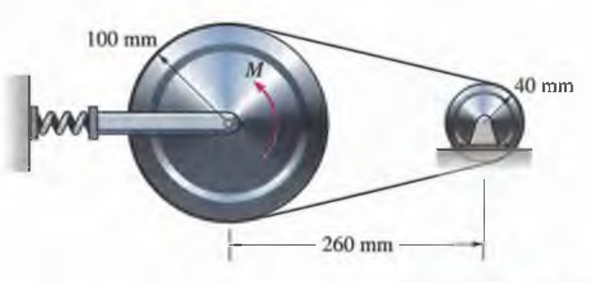
P10.119

Los problemas 10.120 a 10.124 están relacionados con el ejemplo 10.9.

10.120 Si la fuerza F del ejemplo 10.9 se incrementa a 400 N, ¿cuáles son los valores máximos de los pares M_A y M_B para los cuales la banda no se deslizará?

10.121 Si la banda del ejemplo 10.9 es una banda V con ángulo $\gamma = 45°$, ¿cuáles son los valores máximos de los pares M_A y M_B para los cuales la banda no se deslizará?

10.122 El resorte de la figura ejerce una fuerza de 320 N sobre la polea izquierda. El coeficiente de fricción estática entre la banda plana y las poleas es $\mu_s = 0.5$. La polea derecha no puede girar. ¿Cuál es el par máximo M que se puede ejercer sobre la polea izquierda sin que la banda se deslice?



P10.122

10.123 La banda del problema 10.122 es una banda V con ángulo $\gamma = 30°$. ¿Cuál es el par máximo M que se puede ejercer sobre la polea izquierda sin que la banda se deslice?

10.124 Partiendo de las ecuaciones (10.26), deduzca la ecuación (10.27):

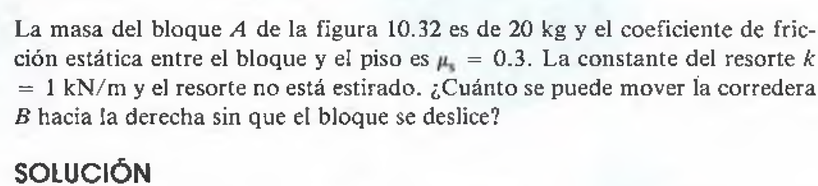
$$T_2 = T_1 e^{[\mu_s \beta \ \mathrm{sen}(\gamma \ 2)]}.$$



Ejemplos con computador

El siguiente ejemplo y los problemas están diseñados para resolverse con ayuda de una calculadora programable o de un computador.

Ejemplo 10.10



La masa del bloque A de la figura 10.32 es de 20 kg y el coeficiente de fricción estática entre el bloque y el piso es $\mu_s = 0.3$. La constante del resorte $k = 1$ kN/m y el resorte no está estirado. ¿Cuánto se puede mover la corredera B hacia la derecha sin que el bloque se deslice?

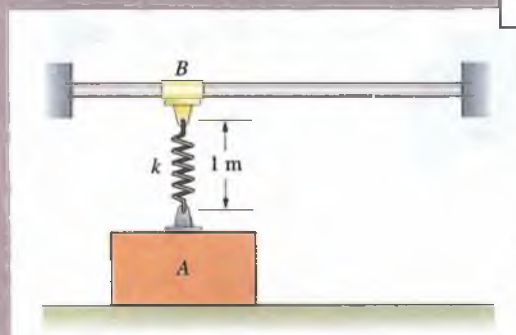


Figura 10.32

SOLUCIÓN

Suponga que al mover la corredera B una distancia x hacia la derecha se tiene el deslizamiento inminente del bloque (Fig. a). El alargamiento del resorte es $\sqrt{1 + x^2} - 1$ m, y la magnitud de la fuerza ejercida sobre el bloque es

$$F_s = k\left(\sqrt{1+x^2} - 1\right). \qquad (10.28)$$

Del diagrama de cuerpo libre del bloque (Fig. b), obtenemos las ecuaciones de equilibrio

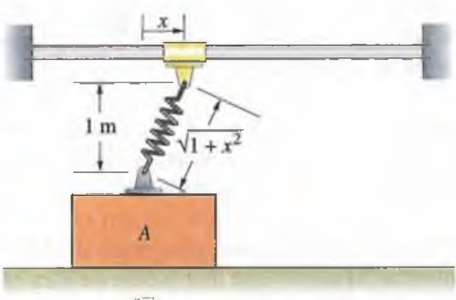
$$\Sigma F_x = \left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) F_s - \mu_s N = 0,$$

$$\Sigma F_y = \left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right) F_s + N - mg = 0.$$

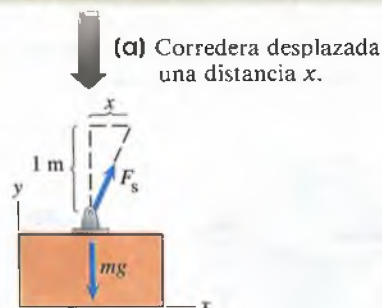
Sustituyendo la ecuación (10.28) en estas dos ecuaciones y eliminando M, podemos escribir la ecuación resultante en la forma

$$h(x) = k(x + \mu_s)\left(\sqrt{1+x^2} - 1\right) - \mu_s mg\sqrt{1+x^2} = 0.$$

Debemos obtener la raíz de esta función para determinar el valor de x correspondiente al deslizamiento inminente del bloque. De la gráfica de $h(x)$ de la



(a) Corredera desplazada una distancia x.



(b) Diagrama de cuerpo libre del bloque cuando el deslizamiento es inminente.

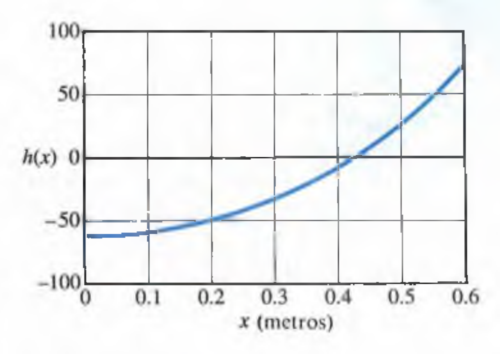


Figura 10.33
Gráfica de la función $h(x)$.

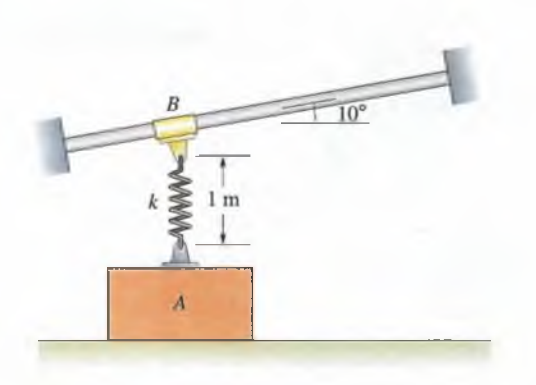
figura 10.33, calculamos que $h(x) = 0$ en $x = 0.43$ m. Examinando los resultados calculados en las proximidades de este valor de x,

x, m	$h(x)$
0.4281	−0.1128
0.4282	−0.0777
0.4283	−0.0425
0.4284	−0.0074
0.4285	0.0278
0.4286	0.0629
0.4287	0.0981

vemos que $h(x) = 0$, y que el deslizamiento es inminente cuando x es aproximadamente igual a 0.4284 m.

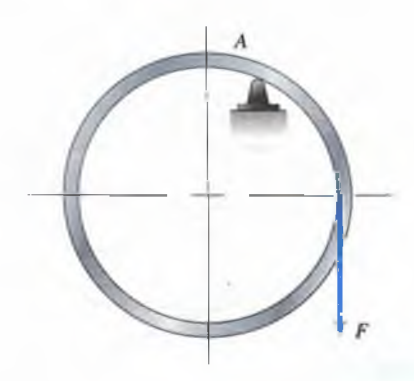
Problemas

10.125 La masa del bloque A mostrado es de 20 kg, y el coeficiente de fricción estática entre el bloque y el piso es $\mu_s = 0.3$. La constante de resorte $k = 1$ kN/m y el resorte no está estirado. ¿Cuánto puede moverse el deslizador B hacia la derecha sin que el bloque se deslice?



P10.125

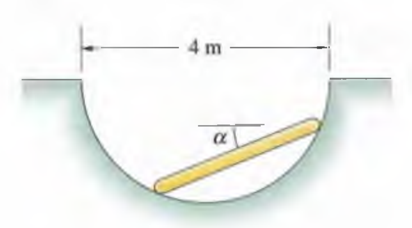
10.126 El anillo circular esbelto de peso W de la figura está soportado en A por las fuerzas normal y de fricción. Si el deslizamiento es inminente cuando la fuerza vertical $F = 0.4\ W$, ¿cuál es el coeficiente de fricción estática entre el anillo y el soporte?



P10.126

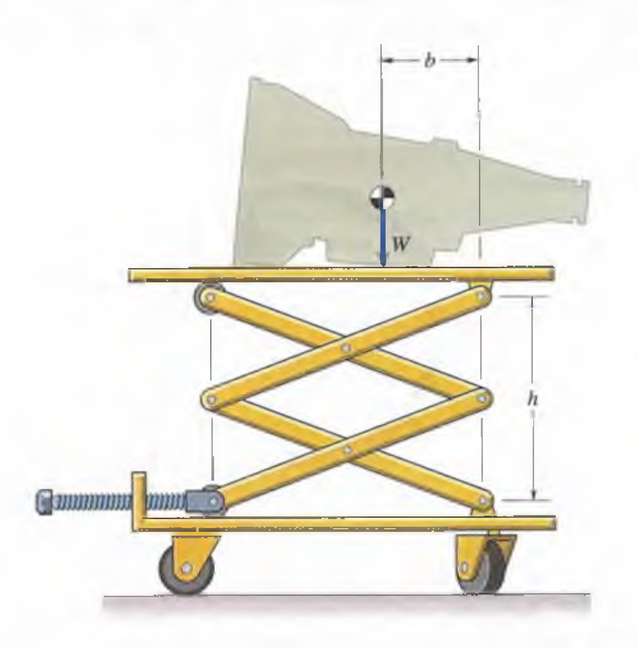
10.127 Suponga que la fuerza vertical sobre el anillo del problema 10.126 es $F = KW$ y que el deslizamiento es inminente. Dibuje una gráfica de K en función del coeficiente de fricción estática entre el anillo y el soporte para $0 \leq \mu_s \leq 1$.

10.128 La barra de 3 m de longitud mostrada pesa 200 N, y el coeficiente de fricción estática entre los extremos de la barra y la superficie circular es $\mu_s = 0.3$. ¿Cuál es el valor máximo del ángulo α para el cual la barra no resbalará?



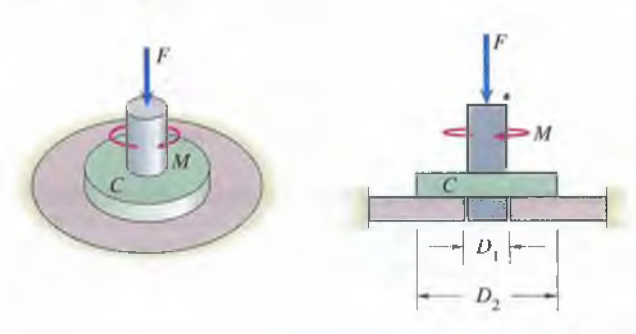
P10.128

10.129 La carga $W = 800$ N puede subirse y bajarse haciendo girar el eje roscado. La distancia $b = 75$ mm, y cada una de las barras articuladas tiene 300 mm de longitud. El paso del eje roscado es $p = 5$ mm, el radio medio de la rosca es $r = 15$ mm y el coeficiente de fricción cinética entre la rosca y la ranura casante es de 0.2. Dibuje un diagrama del momento que debe ejercerse para que el eje roscado gire a velocidad constante y la carga se eleve, en función de la altura h de $h = 100$ mm a $h = 400$ mm.



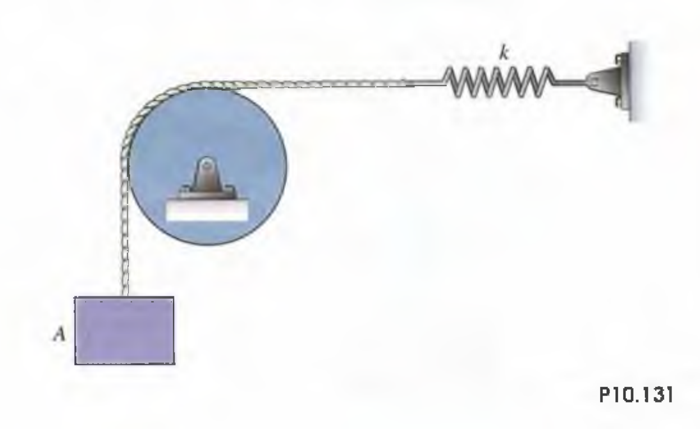
P10.129

10.130 El cojinete de empuje de la figura está soportado por contacto del collar C con una placa fija. El área de contacto es un anillo con diámetro interior D_1 y diámetro exterior D_2. Suponga que, debido a las restricciones térmicas, se quiere que el área de contacto sea de 0.02 m^2. El coeficiente de fricción cinética entre el collar y la placa es $\mu_k = 0.3$. La fuerza $F = 600$ N y el par M requerido para hacer girar el eje a velocidad constante es de 10 N-m. ¿Qué tamaño tienen los diámetros D_1 y D_2?



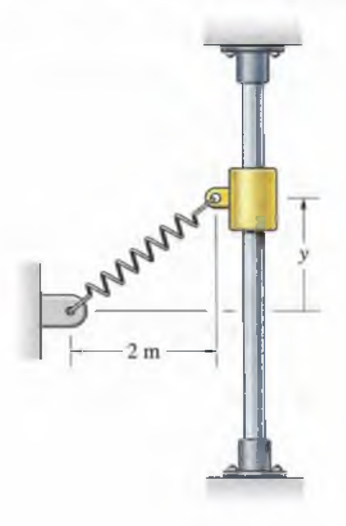
P10.130

10.131 El bloque A pesa 30 lb y la constante de resorte k = 30 lb/pie. Cuando el cilindro gira a velocidad constante, primero en sentido antihorario y luego en sentido horario, la diferencia en la altura del bloque A es de 2 pies. ¿Cuál es el coeficiente de fricción cinética entre la cuerda y el cilindro?



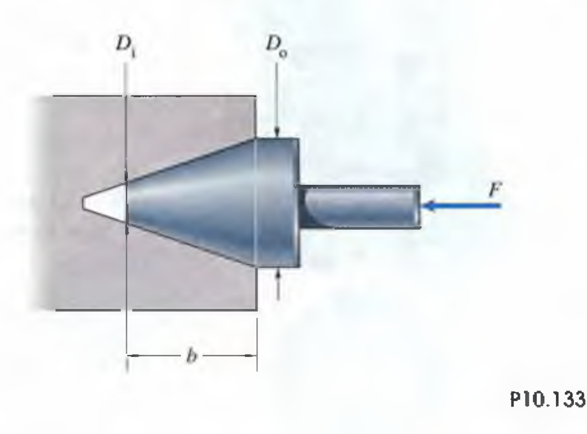
P10.131

10.132 El coeficiente de fricción estática entre el deslizador de 1 kg de masa y la barra vertical es $\mu_s = 0.6$. La constante del resorte es $k = 20$ N/m y su longitud no estirada mide 1 m. Determine el intervalo de valores de y para los cuales el deslizador permanecerá en reposo sobre la barra.



P10.132

10.133 La fuerza axial sobre el cojinete de empuje es $F = 200$ lb y la dimensión es $b = 6$ pulgadas. La presión uniforme ejercida por la superficie casante es $p = 7$ lb/pulg^2, y el coeficiente de fricción cinética es $\mu_k = 0.28$. Si se requiere un par $M = 360$ lb-pulg para hacer girar la flecha, ¿qué valor deben tener las dimensiones D_o y D_i?



P10.133

Resumen del capítulo

Fricción seca

Las fuerzas que resultan del contacto de dos superficies planas se pueden expresar en función de la fuerza normal N y de la fuerza de fricción f, o de la magnitud R y del ángulo de fricción θ.

Si el deslizamiento es inminente, la magnitud de la fuerza de fricción es

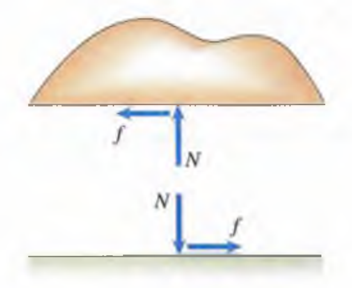
$$f = \mu_s N \qquad \text{Ec. (10.1)}$$

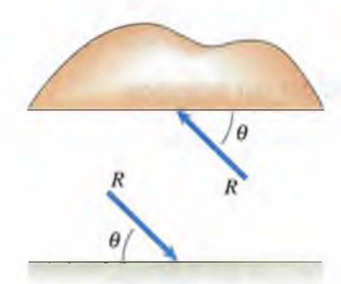
y su dirección se opone al deslizamiento inminente. El ángulo de fricción es igual al ángulo de fricción estática $\theta_s = \arctan(\mu_s)$.

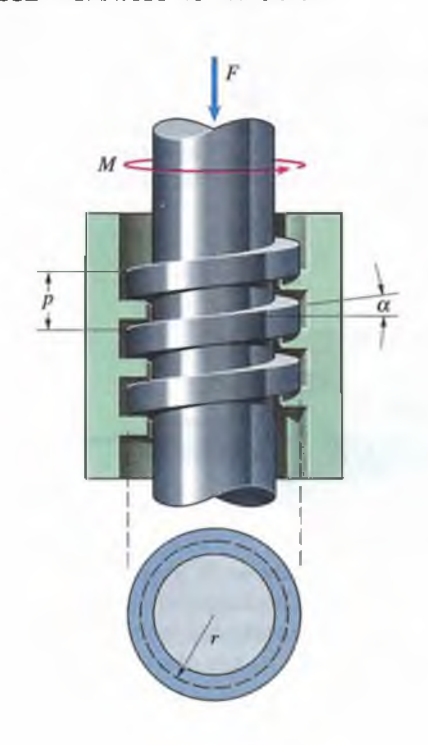
Si las superficies están deslizándose una con respecto a la otra, la magnitud de la fuerza de fricción es

$$f = \mu_k N \qquad \text{Ec. (10.2)}$$

y su dirección se opone al movimiento relativo. El ángulo de fricción es igual al ángulo de fricción cinética $\theta_k = \arctan(\mu_k)$.









Roscas

La pendiente α de la rosca está relacionada con su paso p por

$$\tan\alpha = \frac{p}{2\pi r}. \qquad \text{Ec. (10.8)}$$

El par requerido para un giro inminente y un movimiento axial opuesto a la dirección de F es

$$M = rF\tan(\theta_s + \alpha), \qquad \text{Ec. (10.11)}$$

y el par requerido para un giro inminente y un movimiento axial del eje en la dirección de F es

$$M = rF\tan(\theta_s - \alpha). \qquad \text{Ec. (10.14)}$$

Cuando $\theta_s < \alpha$, el eje girará y se moverá en la dirección de la fuerza F sin ningún par aplicado.

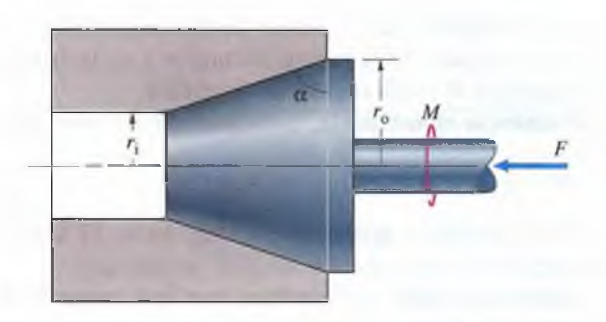
Chumaceras



El par requerido para el deslizamiento inminente del árbol circular es

$$M = rF\operatorname{sen}\theta_s, \qquad \text{Ec. (10.15)}$$

donde F es la carga total sobre el árbol.

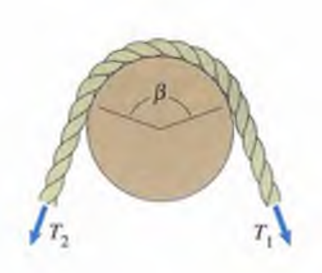


Cojinetes de empuje y embragues

El par requerido para hacer girar el árbol a velocidad constante es

$$M = \frac{2\mu_k F}{3\cos\alpha}\left(\frac{r_o^3 - r_i^3}{r_o^2 - r_i^2}\right). \qquad \text{Ec. (10.16)}$$

Fricción en bandas



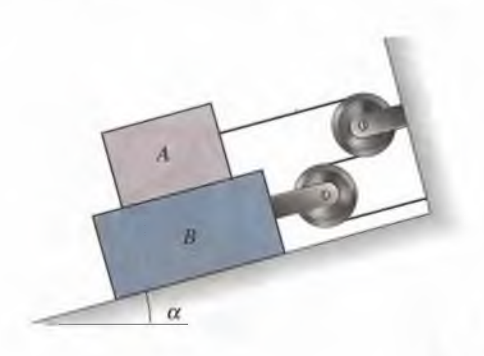
La fuerza T_2 requerida para el deslizamiento inminente en la dirección de T_2 es

$$T_2 = T_1 e^{\mu_s \beta}, \qquad \text{Ec. (10.22)}$$

donde β está en radianes.

Problemas de repaso

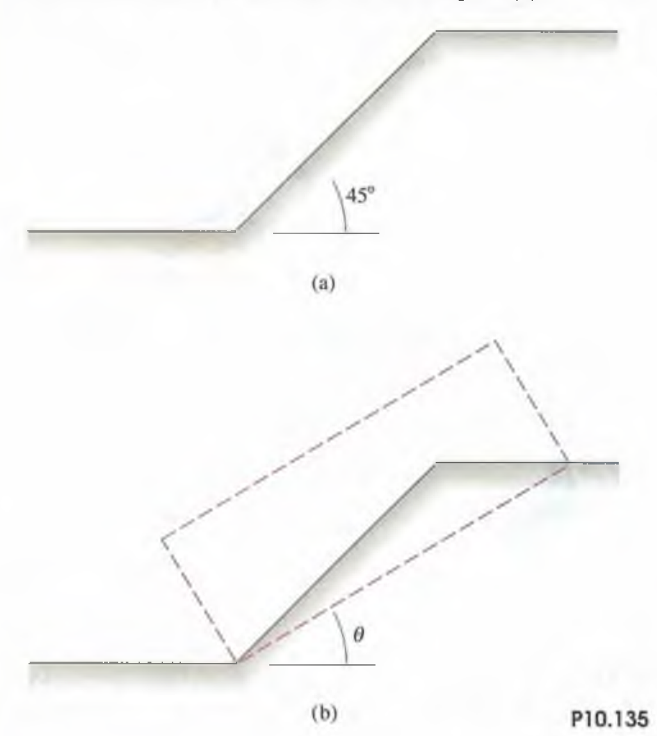
10.134 Las masas de las cajas A y B mostradas son de 25 kg y 30 kg respectivamente. El coeficiente de fricción estática entre las superficies de contacto es $\mu_s = 0.34$. ¿Cuál es el valor máximo de α para el cual las cajas permanecerán en equilibrio?



P10.134

10.135 La ladera de un terraplén tiene una pendiente de 45° (Fig. a). Si el coeficiente de fricción estática de suelo sobre suelo es $\mu_s = 0.6$, ¿será estable el terraplén o se desplomará? Si se desploma, ¿cuál es la pendiente mínima para la que es estable?

Estrategia: Dibuje un diagrama de cuerpo libre aislando parte del terraplén como se muestra de la figura (b).



P10.135

10.136 La masa de la camioneta es de 2250 kg y el coeficiente de fricción estática entre sus ruedas y el pavimento es de 0.6. Si sus ruedas frontales están bloqueadas pero las traseras no, ¿cuál es el máximo valor de α para el cual puede permanecer en equilibrio?

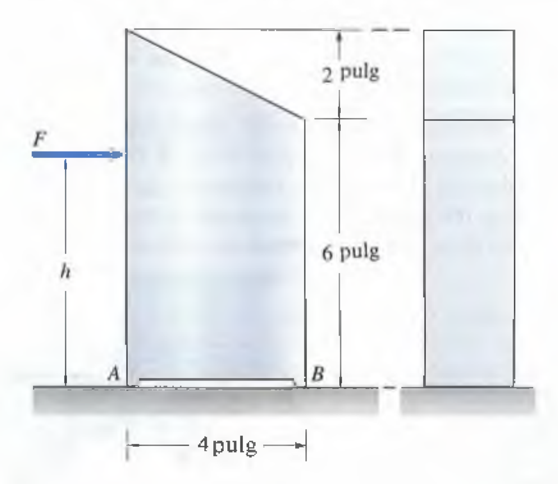


P10.136

10.137 ¿Cuál es el valor máximo de α en el cual la camioneta puede permanecer en equilibrio si apunta hacia arriba?

10.138 En el problema 10.136, suponga que una caja de 300 kg se carga en la camioneta. El centro de masa de la caja está a 0.5 m frente al eje trasero y 1.5 m sobre el nivel de la calle. ¿Cuál es el valor máximo de α para el cual la camioneta puede permanecer en equilibrio?

10.139 El cuerpo homogéneo de 20 lb está soportado en A y B. h = 4 pulg, la fricción puede ignorarse en B y el coeficiente de fricción estática en A es 0.4. Determine la fuerza máxima F que se puede ejercer sin que el cuerpo se deslice.



P10.139

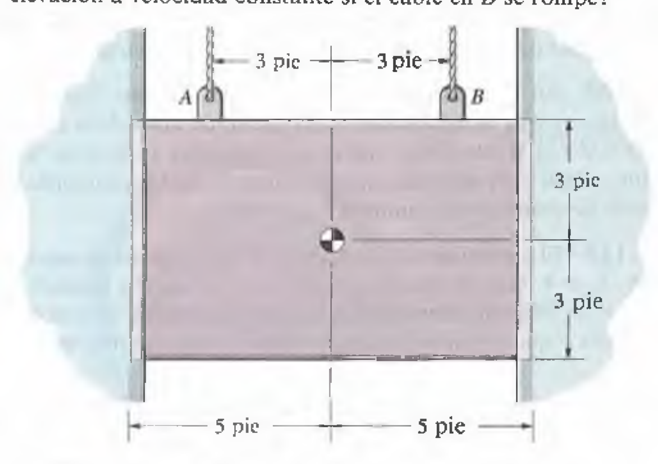
10.140 En el problema 10.139, suponga que el coeficiente de fricción estática en B es 0.36. ¿Cuál es el valor máximo de h para el cual el cuerpo se deslizará antes de volcarse?

10.141 El alpinista pesa 180 lb y está soportado por las fuerzas normal y de fricción sobre sus zapatos y su espalda. Los coeficientes de fricción estática entre sus zapatos y la pared y entre su espalda y la pared son 0.8 y 0.6, respectivamente. ¿Cuál es la fuerza normal mínima que sus zapatos deben ejercer?

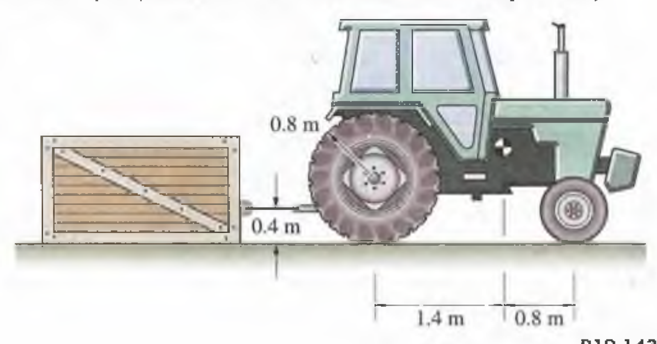


P10.141

10.142 Los cables en A y B elevan la compuerta de 200 lb (que entra holgadamente en las ranuras) a velocidad constante. El coeficiente de fricción cinética entre puerta y ranuras es $\mu_k = 0.3$. ¿Qué fuerza debe ejercerse en A para mantener la elevación a velocidad constante si el cable en B se rompe?



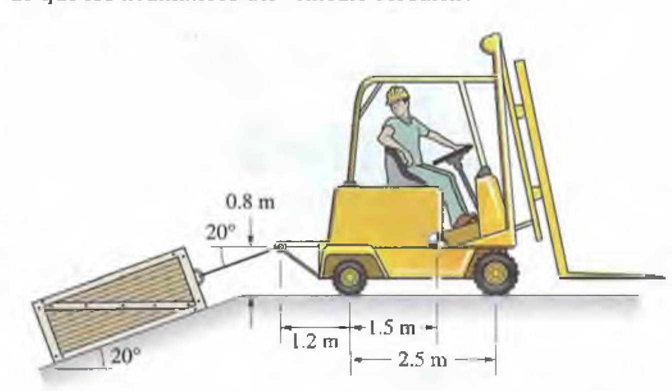
10.143 El coeficiente de fricción estática entre los neumáticos del tractor (1000 kg) y el piso es 0.8, y entre la caja (450 kg) y el piso es 0.3. Partiendo del reposo, ¿qué par debe ejercer el motor del tractor sobre las ruedas posteriores para mover la caja? (Las ruedas delanteras no están bloqueadas.)



P10.143

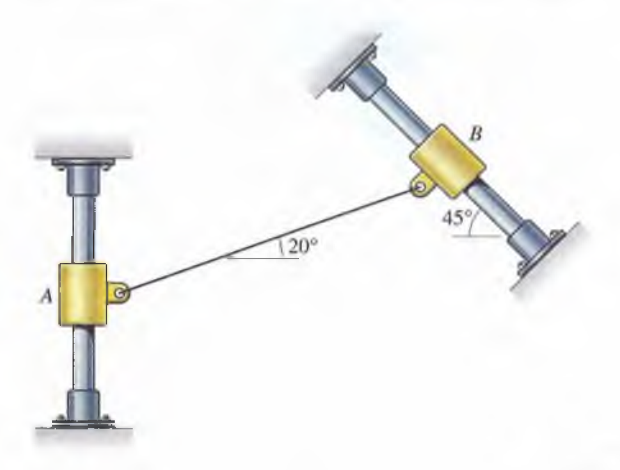
10.144 En P10.143, ¿cuál es la de mayor masa que el tractor puede mover partiendo del reposo si su motor puede ejercer un par lo bastante grande? ¿Qué par se necesita?

10.145 El vehículo de 900 kg tiene tensión en sus ruedas posteriores y el coeficiente de fricción estática entre sus neumáticos y el suelo es de 0.65, y entre la caja y el suelo es 0.4. Si el vehículo intenta jalar la caja a lo largo de la superficie inclinada, ¿cuál es la máxima masa que la caja puede tener para deslizarse hacia arriba sobre la superficie inclinada antes de que los neumáticos del vehículo resbalen?



P10.145

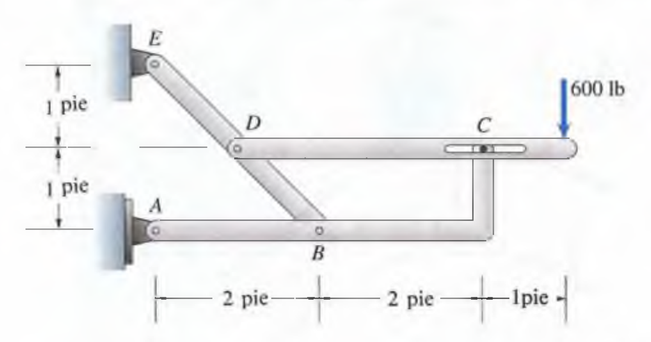
10.146 Los collarines A y B mostrados tienen cada uno una masa de 2 kg. Si la fricción entre el collarín B y la barra se puede ignorar, ¿cuál es el coeficiente mínimo de fricción estática entre el collarín A y la barra, necesario para que los collarines permanezcan en equilibrio en la posición mostrada?



P10.146

10.147 En el problema 10.146, si el coeficiente de fricción estática tiene el mismo valor μ_s entre los collarines A y B y las barras, ¿qué valor mínimo de μ_s es necesario para que los collarines permanezcan en equilibrio en la posición mostrada?

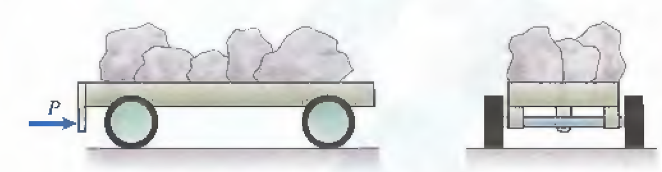
10.148 El bastidor está soportado por las fuerzas normal y de fricción ejercidas en A por la superficie fija. El coeficiente de fricción estática entre la placa y la pared es $\mu_s = 0.5$. ¿Se deslizará el bastidor en A al someterlo a la carga de 600 lb?



P10.148

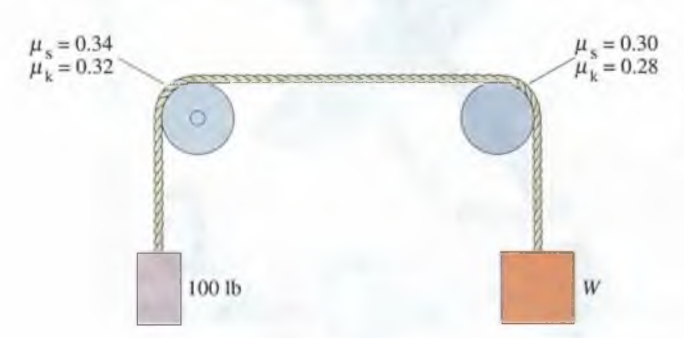
10.149 En el problema 10.53, W = 600 lb y las barras AB y AC tienen soportes de bola y cuenca en cada extremo. Se quiere que el soporte en C se mantenga en posición mediante las fuerzas normal y de fricción entre el soporte y la pared. ¿Qué coeficiente mínimo de fricción se requiere?

10.150 Los ejes del remolque de la figura están soportados por chumaceras. El radio de las ruedas es de 75 mm, el radio de los ejes es de 15 mm y el coeficiente de fricción cinética entre los ejes y las chumaceras es $\mu_k = 0.14$. La masa del remolque y su carga es de 160 kg. Si el peso del remolque y su carga está igualmente repartido entre los ejes, ¿qué fuerza P se necesita para empujar el remolque a velocidad constante?



P10.150

10.151 Si los dos cilindros se mantienen fijos, ¿en qué intervalo de valores de W los dos pesos permanecerán en reposo?



P10.151

10.152 En el problema 10.151, si el sistema está inicialmente en reposo y el cilindro izquierdo se hace girar con lentitud, determine el máximo peso que puede (a) subirse y (b) bajarse.

10.153 La barra de ejercicio mostrada se apoya en el marco de la puerta, sobre la cual ejerce una fuerza mediante el giro del collar roscado C. El paso de la rosca es p = 0.1 pulg y su radio medio es r = 0.5 pulg. Los coeficientes de fricción entre la rosca y la ranura casante son $\mu_s = 0.30$ y $\mu_k = 0.24$. El coeficiente de fricción estática entre el marco de la puerta y los extremos de la barra es 0.8. ¿Qué par debe aplicarse al collar C para que la barra pueda soportar una carga vertical de 400 lb sin deslizarse en el marco de la puerta?



P10.153

10.154 En el problema 10.153, ¿qué par debe aplicarse al collar roscado C para aflojarlo?

Proyecto 10.1 Usando el procedimiento descrito en el problema 10.5, mida el coeficiente de fricción estática para las siguientes parejas de materiales:

(a) Papel sobre papel
(b) Metal sobre metal
(c) Madera sobre madera
(d) Metal sobre madera

Escriba un breve informe que describa su procedimiento, comparando sus resultados con los valores típicos dados en la tabla 10.1, y comente acerca de las posibles fuentes de error.



El análisis de estructuras con muchos elementos constituyentes, como esta plataforma extensible, puede ser tedioso y consumir mucho tiempo. En ciertos casos, las estructuras en equilibrio se pueden analizar con mayor facilidad sometiéndolas a desplazamientos hipotéticos y calculando el trabajo hecho por las fuerzas y los pares externos. Este método, llamado principio del trabajo virtual, es el tema del presente capítulo.

Capítulo 11

Trabajo virtual y energía potencial

CUANDO se estira un resorte, el trabajo que se efectúa se almacena en el resorte como energía potencial. Al elevar una plataforma extensible se incrementa su energía potencial gravitatoria. En este capítulo definimos el trabajo y la energía potencial y presentamos un poderoso método basado en el principio del trabajo virtual. En algunos casos, este principio se puede usar para analizar cuerpos y estructuras en equilibrio con mayor facilidad que dibujando diagramas de cuerpo libre y planteando las ecuaciones de equilibrio. El principio del trabajo virtual se usa en gran medida en aplicaciones avanzadas de mecánica, especialmente en el análisis de elementos y estructuras deformables.

11.1 Trabajo virtual

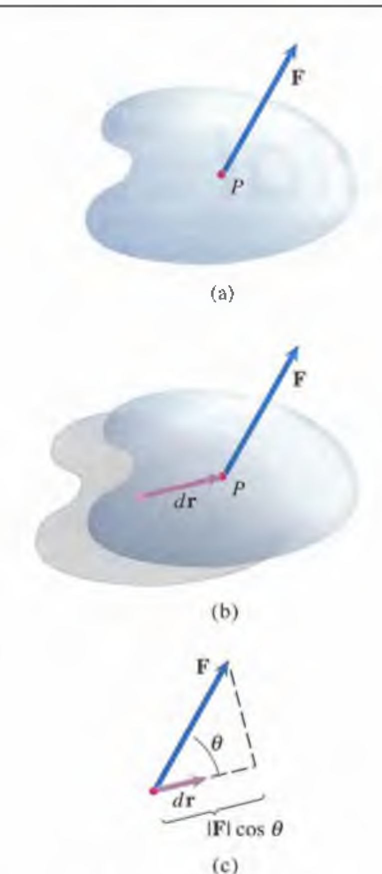


Figura 11.1
(a) Fuerza **F** actuando sobre un cuerpo.
(b) Desplazamiento $d\mathbf{r}$ de P.
(c) Trabajo $dU = (|\mathbf{F}| \cos \theta)\,|d\mathbf{r}|$.

El principio del trabajo virtual es un enunciado sobre el trabajo efectuado por fuerzas y pares cuando un cuerpo o estructura está sometido a movimientos. Antes de estudiarlo, definamos el concepto de trabajo.

Trabajo

Consideremos una fuerza que actúa sobre un cuerpo en un punto P (Fig. 11.1a). Supongamos que el cuerpo sufre un movimiento infinitesimal, de modo que P tiene un desplazamiento diferencial $d\mathbf{r}$ (Fig. 11.1b). El **trabajo** dU de **F** como resultado del desplazamiento $d\mathbf{r}$ se define como

$$dU = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}. \qquad (11.1)$$

De la definición del producto punto, $dU = (|\mathbf{F}| \cos \theta)|d\mathbf{r}|$, donde θ es el ángulo entre **F** y $d\mathbf{r}$ (Fig. 11.1c). El trabajo es igual al producto de la componente de **F** en la dirección de $d\mathbf{r}$ y la magnitud de $d\mathbf{r}$. Note que si la componente de **F** paralela a $d\mathbf{r}$ apunta en la dirección opuesta a $d\mathbf{r}$, el trabajo es negativo. También, si **F** es perpendicular a $d\mathbf{r}$, el trabajo es nulo. Las dimensiones del trabajo son (fuerza) × (longitud).

Consideremos ahora un par que actúa sobre un cuerpo (Fig. 11.2a). El momento debido al par es $M = Fh$ en sentido antihorario. Si el cuerpo gira un ángulo $d\alpha$ infinitesimal antihorario (Fig. 11.2b), los puntos de aplicación de las fuerzas se desplazan distancias diferenciales $\frac{1}{2}h\, d\alpha$. Entonces, el trabajo total realizado es $dU = F(\frac{1}{2}h\, d\alpha) + F(\frac{1}{2}h\, d\alpha) = M\, d\alpha$.

Vemos que cuando un cuerpo sobre el que actúa un par M gira un ángulo $d\alpha$ en el mismo sentido que el par (Fig. 11.2c), el trabajo resultante es



$$dU = M\, d\alpha. \qquad (11.2)$$

Si el sentido del par es opuesto al sentido de $d\alpha$, el trabajo es negativo.

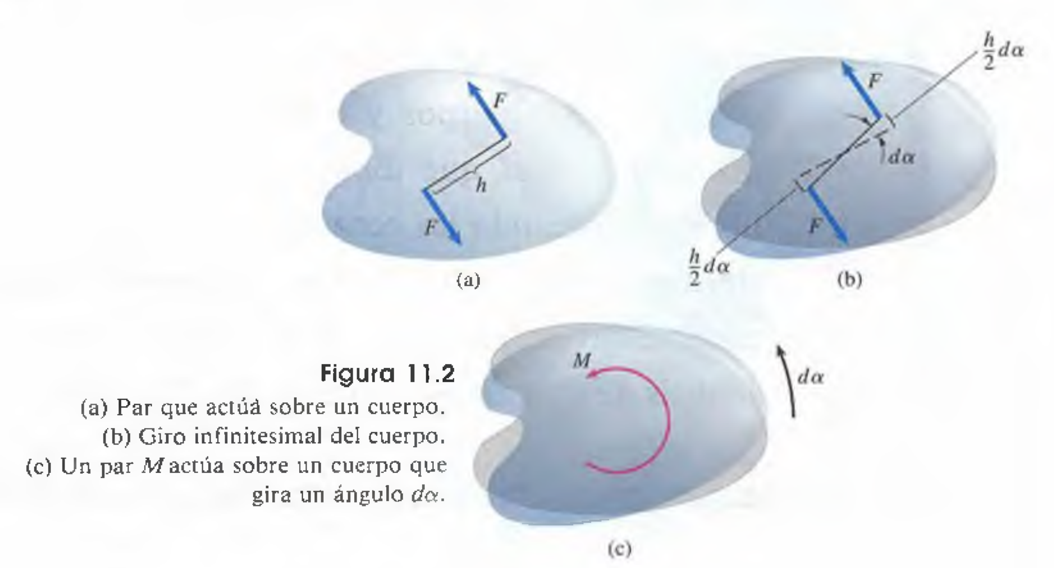


Figura 11.2
(a) Par que actúa sobre un cuerpo.
(b) Giro infinitesimal del cuerpo.
(c) Un par M actúa sobre un cuerpo que gira un ángulo $d\alpha$.

Principio del trabajo virtual

Ya que hemos definido el trabajo efectuado por fuerzas y pares, podemos establecer el principio del trabajo virtual. Pero antes analizaremos un ejemplo para dar un contexto que facilite su comprensión.

La barra homogénea (a) está soportada por la pared y el soporte de pasador en A, y cargada por un par M. El diagrama de cuerpo libre de la barra es la figura 11.3(b). Las ecuaciones de equilibrio son

$$\Sigma F_x = A_x - N = 0, \qquad (11.3)$$

$$\Sigma F_y = A_y - W = 0, \qquad (11.4)$$

$$\Sigma M_{(\text{punto } A)} = NL \text{ sen } \alpha - W\frac{1}{2}L\cos\alpha - M = 0. \qquad (11.5)$$

Con estas tres ecuaciones podemos encontrar las reacciones A_x, A_y y N. Sin embargo, nuestro objetivo es otro.

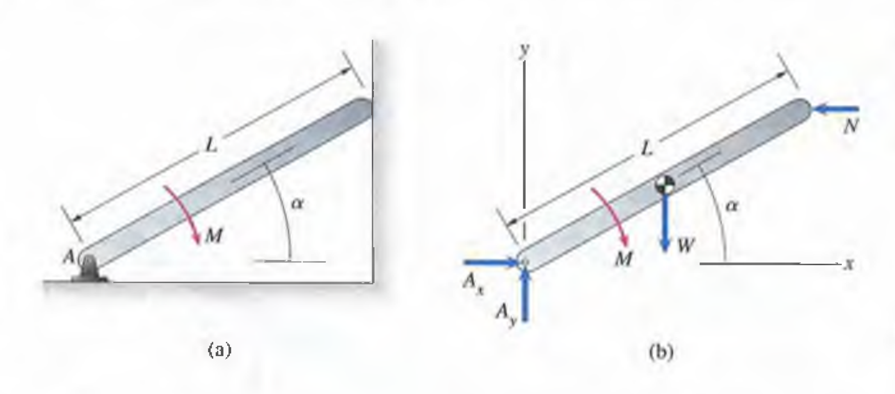


Figura 11.3
(a) Barra sometida a un momento M.
(b) Diagrama de cuerpo libre de la barra.

Hagamos la siguiente pregunta: si las fuerzas y el par de la figura 11.3(b) actúan sobre la barra, y ésta se somete a una traslación infinitesimal *hipotética* en la dirección x, como se muestra en la figura 11.4, ¿qué trabajos efectúa? El desplazamiento hipotético δx se llama **desplazamiento virtual** de la barra, y el trabajo resultante δU se llama **trabajo virtual**. El soporte de pasador y la pared impiden que la barra se desplace en la dirección x; el desplazamiento virtual es un artificio teórico. Nuestro objetivo es calcular el trabajo virtual resultante:

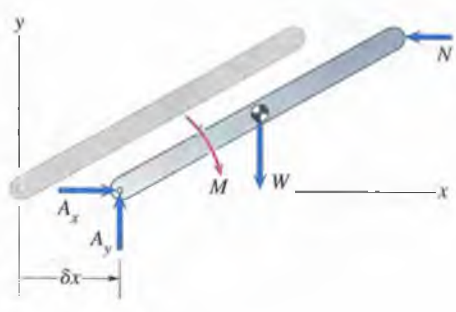


Figura 11.4
Desplazamiento virtual δx.

$$\delta U = A_x\,\delta x + (-N)\,\delta x = (A_x - N)\,\delta x. \qquad (11.6)$$

Las fuerzas A_y y W no trabajan porque son perpendiculares a los desplazamientos de sus puntos de aplicación. El momento M tampoco trabaja porque la barra no gira. Comparando esta ecuación con la ecuación (11.3), encontramos que *el trabajo virtual es igual a cero*.

A continuación, damos a la barra una traslación virtual en la dirección y (Fig. 11.5). El trabajo virtual resultante es

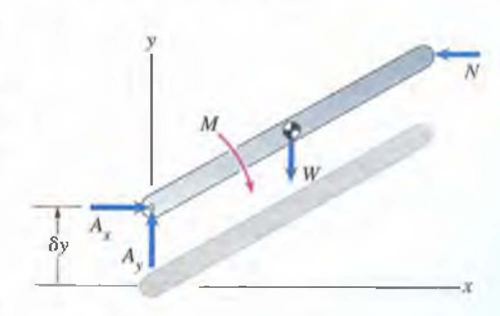


Figura 11.5
Desplazamiento virtual δy.

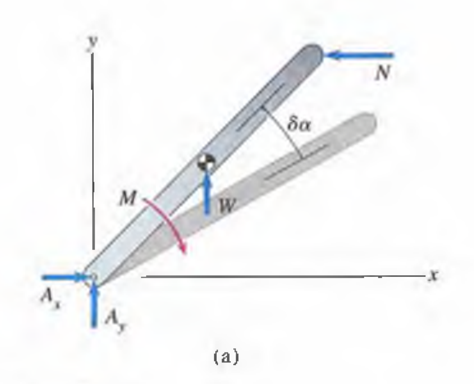
$$\delta U = A_y\,\delta y + (-W)\,\delta y = (A_y - W)\,\delta y. \qquad (11.7)$$

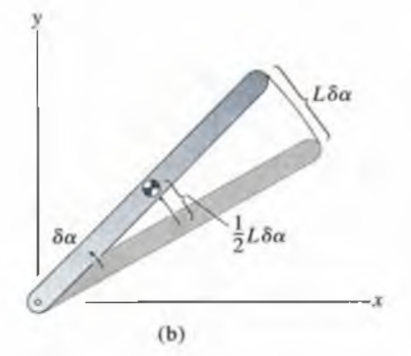
Según la ecuación (11.4), de nuevo el trabajo virtual es igual a cero.

Finalmente, damos a la barra un giro virtual manteniendo el punto A fijo (11.6a). Las fuerzas A_x y A_y no trabajan porque sus puntos de aplicación no se desplazan. El trabajo efectuado por el par M es $-M\,\delta\alpha$ porque su sentido es opuesto al del giro. En la figura 11.6(b) se muestran los desplazamientos de los puntos de aplicación de las fuerzas N y W, y en la figura 11.6(c) aparecen las componentes de las fuerzas en la dirección de los desplazamientos. El trabajo efectuado por N es $(N \operatorname{sen}\alpha)(L\,\delta\alpha)$, y el trabajo efectuado por W es $(-W\cos\alpha)\,(\frac{1}{2}L\,\delta\alpha)$. El trabajo total es

$$\begin{aligned}\delta U &= (N \operatorname{sen}\alpha)(L\,\delta\alpha) + (-W\cos\alpha)\left(\frac{1}{2}L\,\delta\alpha\right) - M\,\delta\alpha \\ &= \left(NL\operatorname{sen}\alpha - W\frac{1}{2}L\cos\alpha - M\right)\delta\alpha.\end{aligned} \tag{11.8}$$

De la ecuación (11.5), el trabajo virtual debido al giro virtual es también igual a cero.





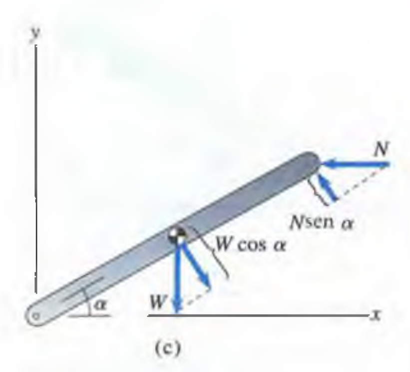


Figura 11.6
(a) Giro virtual $\delta\alpha$.
(b) Desplazamientos de los puntos de aplicación de N y W.
(c) Componentes de N y W en las direcciones de los desplazamientos.

Se mostró que para tres desplazamientos virtuales de la barra, el trabajo virtual es cero. Estos resultados son ejemplos de una forma del principio del trabajo virtual:

> Si un cuerpo está en equilibrio, el trabajo virtual efectuado por las fuerzas y los pares externos que actúan sobre él es cero para cualquier traslación o giro virtual:

$$\delta U = 0. \tag{11.9}$$

Como lo ilustra nuestro ejemplo, este principio se puede utilizar para deducir las ecuaciones de equilibrio de un cuerpo. Sometiendo la barra a traslaciones virtuales δx y δy y a un giro virtual $\delta\alpha$, se obtienen las ecuaciones (11.6)-(11.8). Como el trabajo virtual debe ser igual a cero en cada caso, obtenemos las ecuaciones (11.3)-(11.5). Sin embargo, no obtenemos ninguna ventaja con este método, comparado con simplemente dibujar el diagrama de cuerpo libre y aplicarle las ecuaciones de equilibrio en la forma usual. Las ventajas del principio del trabajo virtual serán evidentes cuando consideremos estructuras.

Aplicación a estructuras

El principio del trabajo virtual enunciado en la sección anterior se aplica a cada elemento de una estructura. Sometiendo ciertos tipos de estructuras en equilibrio a desplazamientos virtuales y calculando el trabajo virtual total, podemos determinar las reacciones desconocidas en sus soportes, así como las fuerzas internas en sus elementos. El procedimiento implica encontrar un desplazamiento virtual que dé origen a la realización de trabajo virtual por parte de las cargas conocidas y por parte de una fuerza o un par desconocido.

Supongamos que queremos determinar la carga axial en la barra BD de la armadura de la figura 11.7(a). Las otras barras de la armadura están sometidas a la carga de 4 kN y a las fuerzas ejercidas sobre ellas por la barra BD (Fig. 11.7b). Si damos a la estructura un giro virtual $\delta\alpha$ como se muestra en la figura 11.7(c), entonces la fuerza T_{BD} que actúa en B y la carga de 4kN que actúa en C realizarán un trabajo virtual. Además, el trabajo virtual hecho por esas dos fuerzas es el trabajo virtual total hecho sobre los elementos de la estructura, porque el trabajo virtual realizado por las fuerzas internas entre sí se cancela. Por ejemplo, consideremos la junta C (Fig. 11.7d). La fuerza T_{BC} es la carga axial en el elemento BC. El trabajo virtual realizado en C sobre el elemento BC es T_{BC} (1.4 m) $\delta\alpha$. Cuando sumamos el trabajo virtual realizado sobre los elementos para obtener el trabajo virtual total sobre la estructura, el trabajo virtual debido a la fuerza interna T_{BC} se cancela. (Si los elementos ejercen un *par* interno entre sí en C, por ejemplo como resultado de la fricción en el soporte de pasador, el trabajo virtual no se cancelaría.)

Por consiguiente, podemos ignorar las fuerzas internas al calcular el trabajo virtual total sobre la estructura, obteniendo

$$\delta U = (T_{BD}\cos\theta)(1.4\text{ m})\delta\alpha + (4\text{ kN})(1.4\text{ m})\delta\alpha = 0.$$

El ángulo θ = arctan (1.4/1) = 54.5°. Resolviendo esta ecuación, obtenemos: T_{BD} = −6.88 kN.

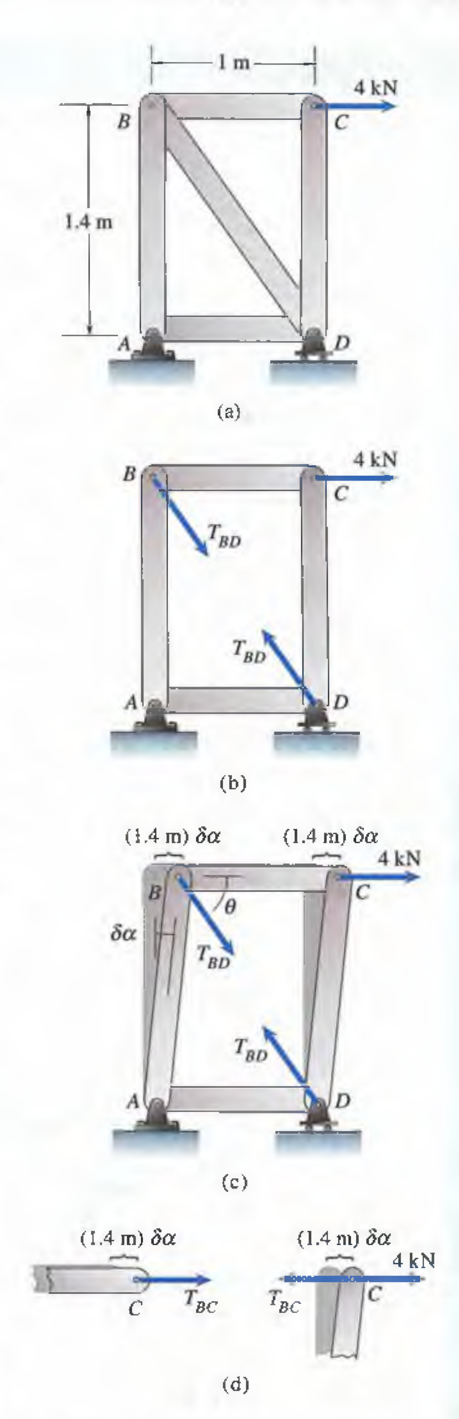


Figura 11.7
(a) Armadura con una carga de 4 kN.
(b) Fuerzas ejercidas por la barra BD.
(c) Desplazamiento virtual de la estructura.
(d) Cálculo del trabajo virtual sobre las barras BC y CD en la junta C.

En el ejemplo siguiente usamos el trabajo virtual para determinar las reacciones en un soporte de una estructura. Este método consta de dos pasos:

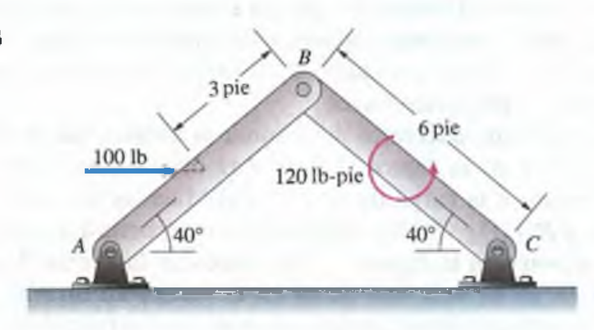
1. Escoger un desplazamiento virtual. *Identifique un desplazamiento virtual que dé lugar a la realización de trabajo virtual por parte de las cargas conocidas y de una fuerza o par desconocido que se quiera determinar.*

2. Determinar el trabajo virtual. *Calcule el trabajo virtual total que resulta del desplazamiento virtual, a fin de obtener una ecuación para la fuerza o par desconocido.*

Ejemplo 11.1

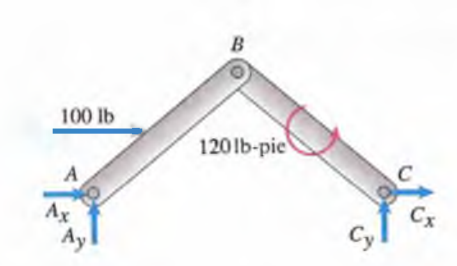
En la estructura de la figura 11.8, use el principio del trabajo virtual para determinar la reacción horizontal en C.

Figura 11.8

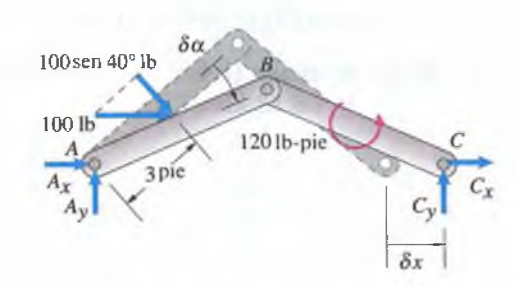


SOLUCIÓN

Selección de un desplazamiento virtual En la figura (a) dibujamos el diagrama de cuerpo libre de la estructura. Nuestro objetivo es determinar C_x. Si mantenemos el punto A fijo y sometemos la barra AB a un giro virtual $\delta\alpha$, mientras el punto C se mueve horizontalmente (Fig. b), el trabajo virtual es realizado sólo por las cargas externas sobre la estructura y por C_x. Las reacciones A_x y A_y no trabajan porque A no se desplaza, y la reacción C_y no trabaja porque es perpendicular al desplazamiento virtual del punto C.



(a) Diagrama de cuerpo libre de la estructura.



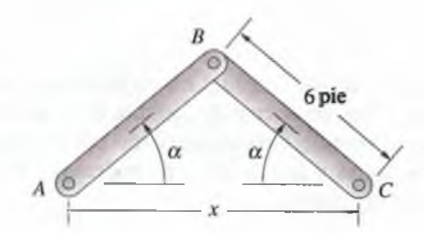
(b) Desplazamiento virtual en el que A permanece fijo y C se mueve horizontalmente.

Determinación del trabajo virtual El trabajo virtual que realiza la fuerza de 100 lb es (100 sen 40°lb)(3 pies) $\delta\alpha$. La barra BC sufre un giro virtual $\delta\alpha$ en sentido antihorario, por lo que el trabajo efectuado por el par es (120 lb-pie)$\delta\alpha$. En función del desplazamiento virtual δx del punto C, el trabajo realizado por C_x es $C_x\,\delta x$. El trabajo virtual total es

$$\delta U = (100 \operatorname{sen} 40^\circ)(3)\delta\alpha + (120)\delta\alpha + C_x\,\delta x = 0.$$

Para obtener C_x de esta ecuación, debemos determinar la relación entre $\delta\alpha$ y δx. De la geometría de la estructura (Fig. c), la relación entre el ángulo α y la distancia x de A a C es

$$x = 2(6 \cos \alpha).$$



(c) Relaciones geométricas para determinar la relación entre $\delta\alpha$ y δx.

La derivada de esta ecuación respecto a α es

$$\frac{dx}{d\alpha} = -12 \text{ sen } \alpha.$$

Un cambio infinitesimal en x está entonces relacionado con un cambio infinitesimal en α por medio de

$$dx = -12 \text{ sen } \alpha \, d\alpha.$$

Como el giro virtual $\delta\alpha$ de la figura (b) implica una disminución de α, concluimos que δx está relacionado con $\delta\alpha$ por

$$\delta x = 12 \text{ sen } 40^\circ \, \delta\alpha.$$

Por consiguiente, el trabajo virtual total es

$$\delta U = [300 \text{ sen } 40^\circ + 120 + C_x(12 \text{ sen } 40^\circ)]\delta\alpha = 0,$$

y obtenemos $C_x = -40.6$ lb.

COMENTARIO

Observe que ignoramos las fuerzas internas que los elementos ejercen entre sí en B. El trabajo virtual que realizan esas fuerzas internas se cancela. Para obtener la solución, necesitamos determinar la relación entre los desplazamientos virtuales δx y $\delta\alpha$. La determinación de las relaciones geométricas entre los desplazamientos virtuales suele ser la parte más difícil de la aplicación del principio del trabajo virtual.

Ejemplo 11.2

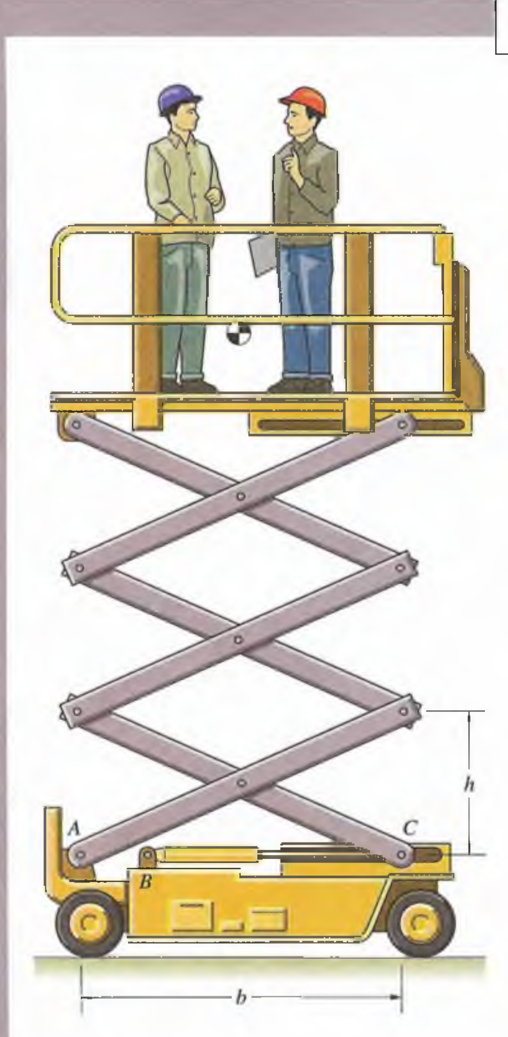


Figura 11.9

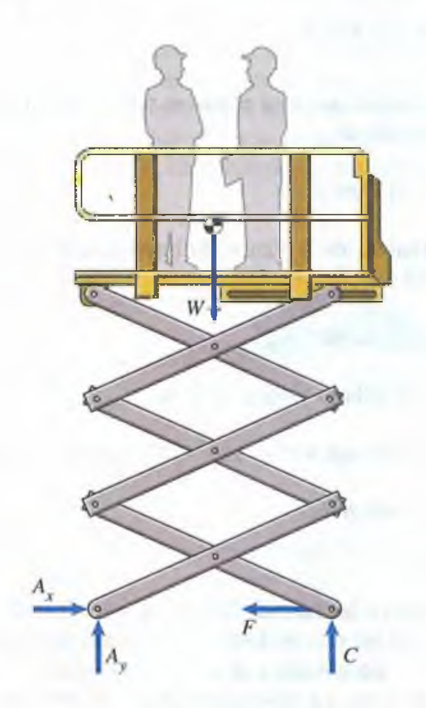
La plataforma extensible sube y baja por medio del cilindro hidráulico BC. El peso total de la plataforma y las personas es W; el de las vigas de soporte de la plataforma puede ignorarse. ¿Qué fuerza axial debe ejercer el cilindro hidráulico para mantener en equilibrio la plataforma en la posición mostrada?

ESTRATEGIA

Podemos usar un desplazamiento virtual que coincida con el desplazamiento real de la plataforma y las vigas cuando cambia la longitud del cilindro hidráulico. Calculando el trabajo virtual efectuado por el cilindro hidráulico y por el peso de las personas y la plataforma, podemos determinar la fuerza ejercida por el cilindro hidráulico.

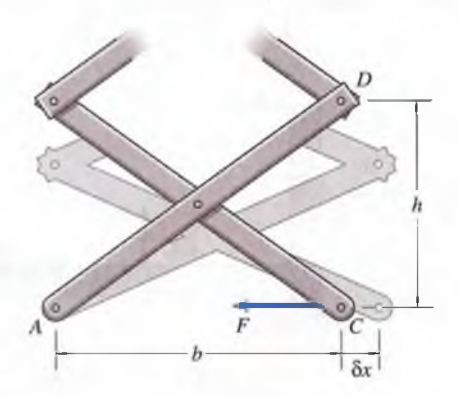
SOLUCIÓN

Selección de un desplazamiento virtual Dibujamos el diagrama de cuerpo libre de la plataforma y las vigas. El objetivo es determinar la fuerza F ejercida por el cilindro hidráulico. Si mantenemos el punto A fijo y sometemos el punto C a un desplazamiento virtual δx, las únicas fuerzas externas que efectúan trabajo virtual son F y el peso W. (La reacción debida al soporte de rodillos en C es perpendicular al desplazamiento virtual.)



(a) Diagrama de cuerpo libre de la plataforma y las vigas de soporte.

Determinación del trabajo virtual El trabajo virtual realizado por la fuerza F cuando el punto C experimenta un desplazamiento virtual δx hacia la derecha (Fig. b) es $-F\,\delta x$. Para determinar el trabajo virtual que efectúa el



(b) Desplazamiento virtual en el que A permanece fijo y C se mueve horizontalmente.

peso W, determinemos los desplazamientos verticales del punto D en la figura (b) cuando el punto C se mueve una distancia δx hacia la derecha. Las dimensiones de b y h están relacionadas por

$$b^2 + h^2 = L^2,$$

donde L es la longitud de la viga AD. Derivando esta ecuación con respecto a b, obtenemos

$$2b + 2h\frac{dh}{db} = 0,$$

o

$$dh = -\frac{b}{h}\,db.$$

Así, cuando b crece una cantidad δx, la dimensión h *decrece* una cantidad $(b/h)\delta x$. Como hay tres pares de vigas, la plataforma se desplaza hacia abajo una distancia $(3b/h)\delta x$, y el trabajo virtual realizado por el peso es $(3b/h)W\delta x$. El trabajo virtual total es

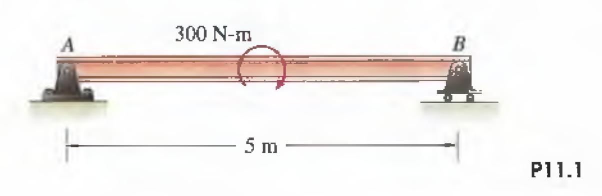
$$\delta U = \left[-F + \left(\frac{3b}{h}\right)W\right]\delta x = 0,$$

y obtenemos $F = (3b/h)W$.

Problemas

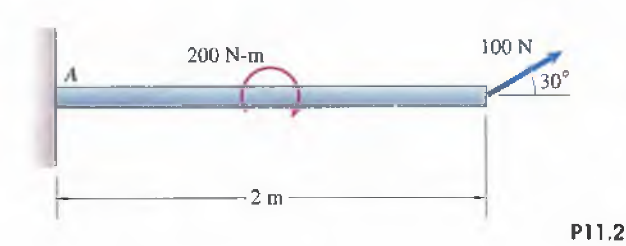
Los siguientes problemas deben resolverse usando el principio del trabajo virtual.

11.1 Determine la reacción en el punto B de la figura.
Estrategia: Someta la viga a un giro virtual respecto a A.



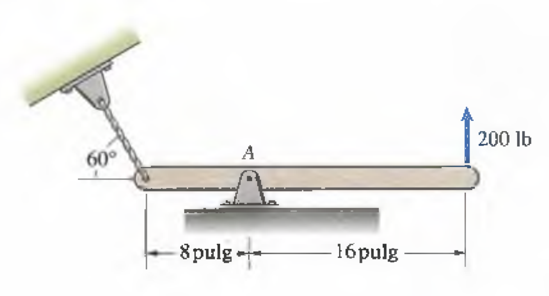
P11.1

11.2 (a) Determine el par ejercido sobre la viga en A.
(b) Determine la fuerza vertical ejercida sobre la viga en A.



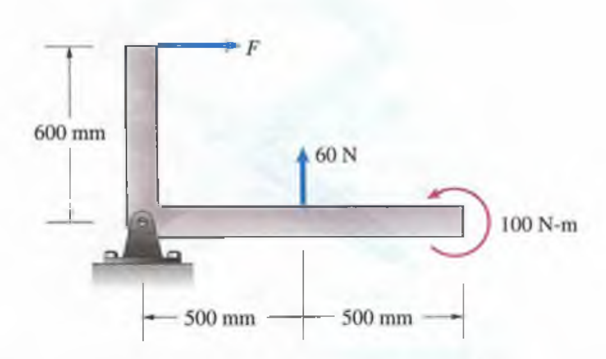
P11.2

11.3 Determine la tensión en el cable mostrado.



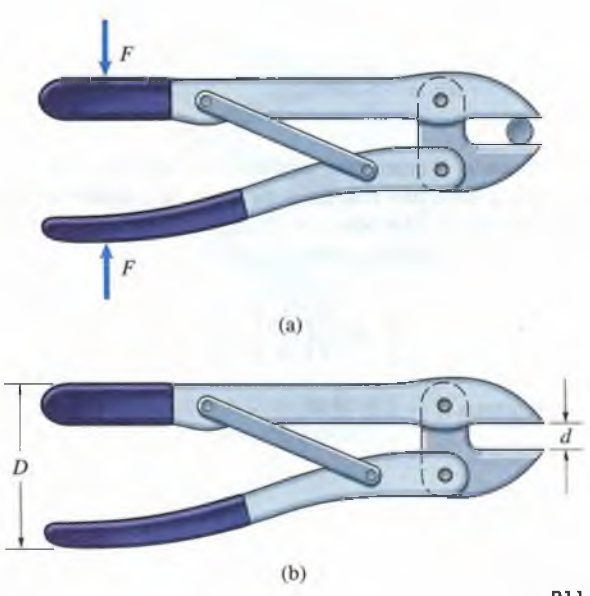
P11.3

11.4 La barra en L está en equilibrio. Determine F.



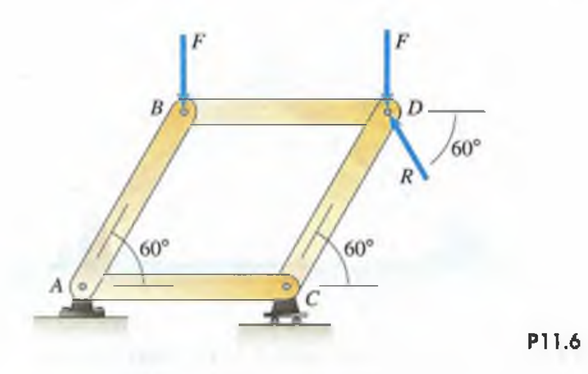
P11.4

11.5 Para calcular la fuerza ejercida sobre el perno por las tenazas cuando los mangos de sujeción están sometidos a fuerzas F, se miden cuidadosamente las dimensiones, se dibujan los diagramas de cuerpo libre y se usan las ecuaciones de equilibrio. Pero hay otro procedimiento: medir el cambio en la distancia entre las mordazas cuando la distancia entre los mangos cambia un poco. Si esto indica que d (Fig. b) disminuye 1 mm cuando D se reduce 8 mm, ¿cuál es el valor aproximado de la fuerza ejercida sobre el perno por cada mordaza al aplicar las fuerzas F? ¿Por qué el resultado es sólo aproximado?



P11.5

11.6 El mecanismo mostrado está en equilibrio. Determine la fuerza R en función de F.



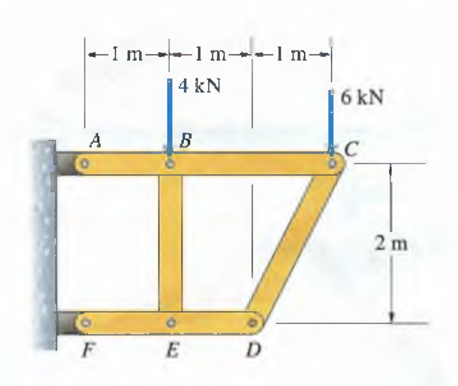
P11.6

11.7 Determine la carga axial en la barra DE de la figura.

P11.7

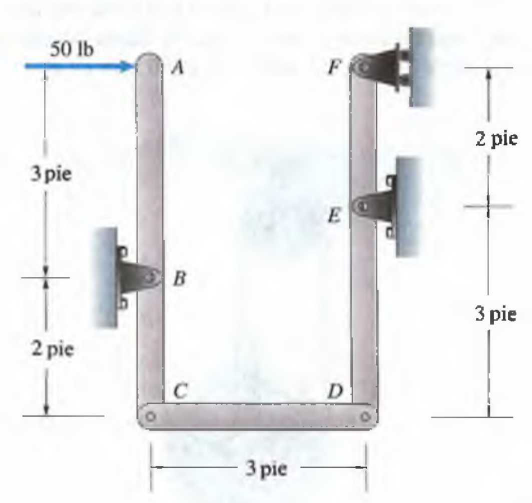
11.8 Determine la carga axial en la barra BD de la armadura del problema 11.7.

11.9 Determine la carga axial en el elemento CD del bastidor mostrado.



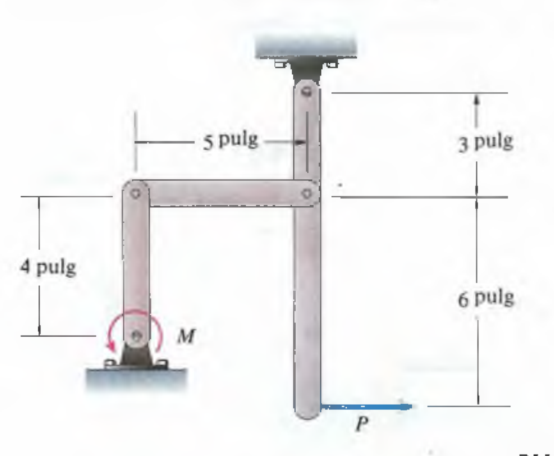
P11.9

11.10 Determine la reacción en el soporte de rodillos de la figura.



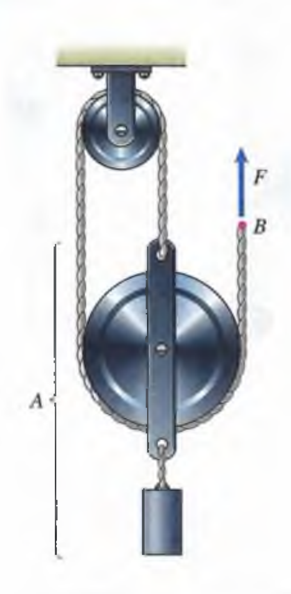
P11.10

11.11 Determine la fuerza P necesaria para que el mecanismo mostrado esté en equilibrio.



P11.11

11.12 El sistema mostrado está en equilibrio. La masa total de la carga suspendida y el dispositivo A es de 120 kg.
(a) Usando la condición de equilibrio, determine la fuerza F.
(b) Usando el resultado de la parte (a) y el principio del trabajo virtual, determine la distancia que la carga suspendida se eleva si el cable es jalado hacia arriba 300 mm en B.

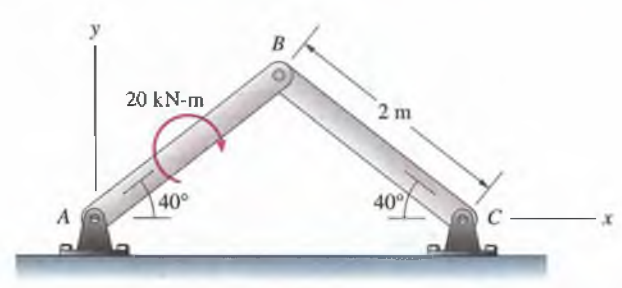


P11.12

11.13 Determine la fuerza P necesaria para que el mecanismo de la figura esté en equilibrio.

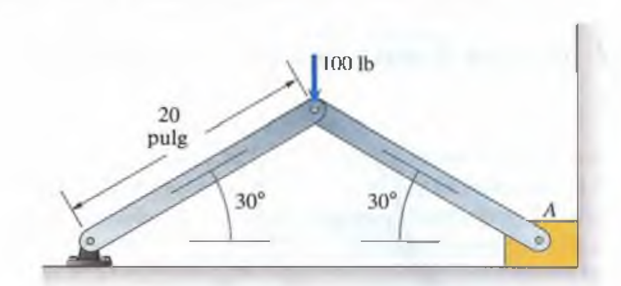
P11.13

11.14 La estructura mostrada está sometida a un par de 20 kN-m. Determine la reacción horizontal en C.



P11.14

11.15 Determine la magnitud de la fuerza ejercida sobre la pared por el bloque en el punto A de la figura.

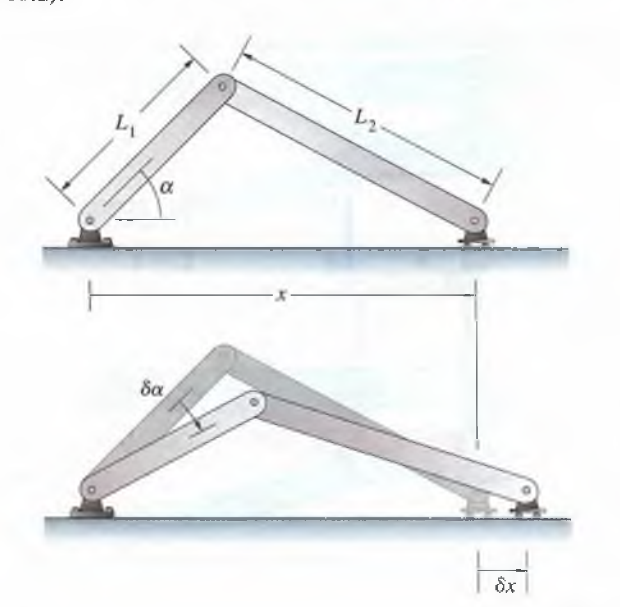


P11.15

11.16 En la figura P11.16, demuestre que δx está relacionada con $\delta\alpha$ por

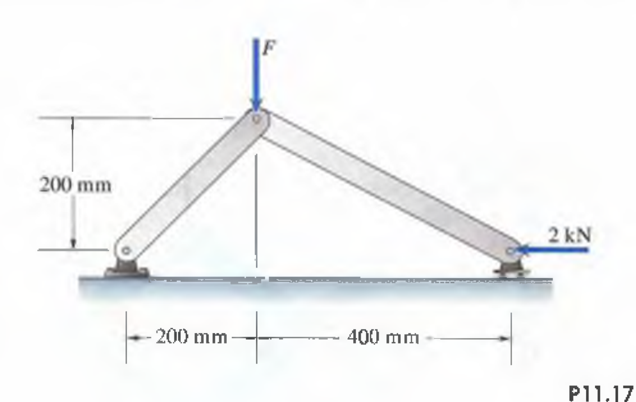
$$\delta x = \frac{L_1 x \operatorname{sen} \alpha}{x - L_1 \cos \alpha}\delta\alpha.$$

Estrategia: Escriba la ley de los cosenos en función de α y derive la ecuación resultante con respecto a α (véase el ejemplo 11.2).



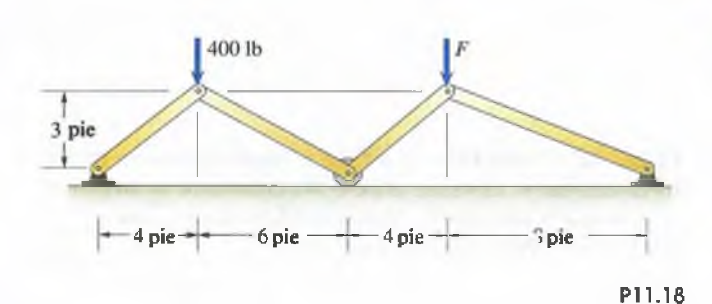
P11.16

11.17 El mecanismo mostrado está en equilibrio. ¿Qué valor tiene la fuerza F?



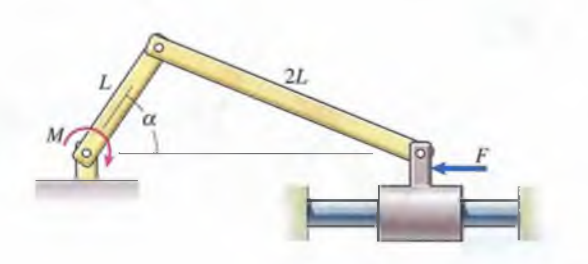
P11.17

11.18 El mecanismo mostrado está en equilibrio. ¿Qué valor tiene la fuerza F?



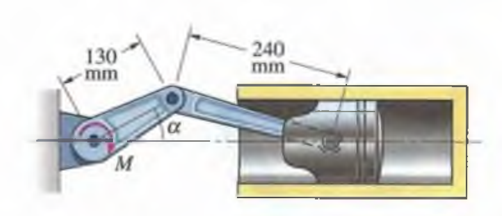
P11.18

11.19 El mecanismo mostrado está en equilibrio. Ignore la fricción entre la barra horizontal y el collarín. Determine M en función de F, α y L.



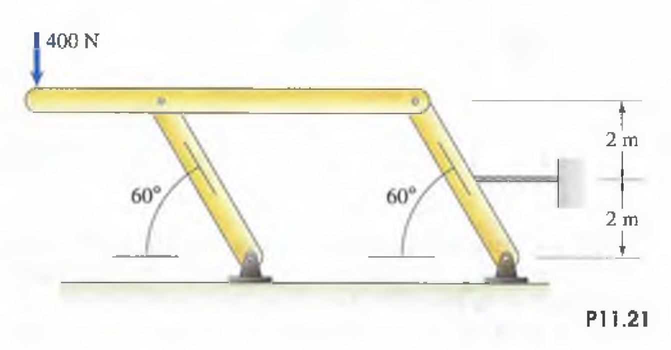
P11.19

11.20 El ángulo $\alpha = 20°$ y la fuerza ejercida sobre el émbolo en reposo por la presión es de 4 kN hacia la izquierda. ¿Qué par M se necesita para mantener el sistema en equilibrio?



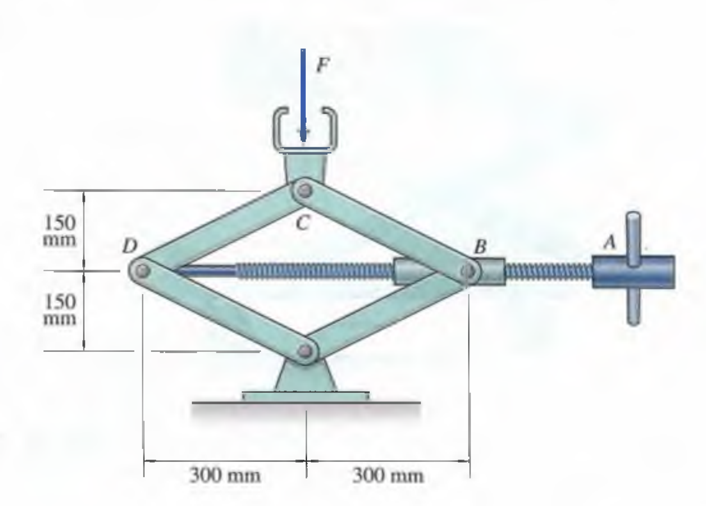
P11.20

11.21 La estructura de la figura está sometida a una carga de 400 N y se mantiene en posición mediante un cable horizontal. Determine la tensión en el cable.



P11.21

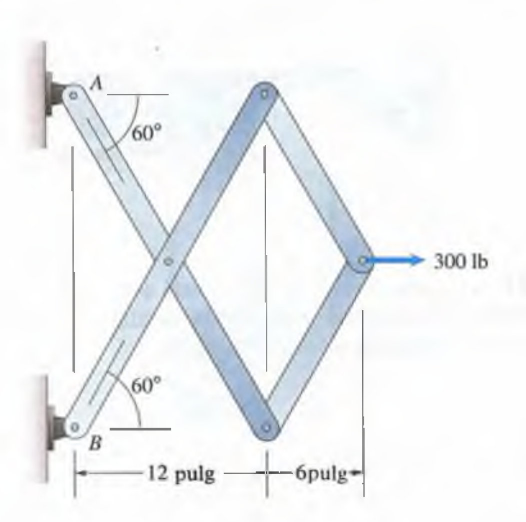
11.22 Si el gato de la figura está sometido a una fuerza $F = 6.5$ kN, ¿cuál es la tensión en el tornillo roscado entre B y D?



P11.22

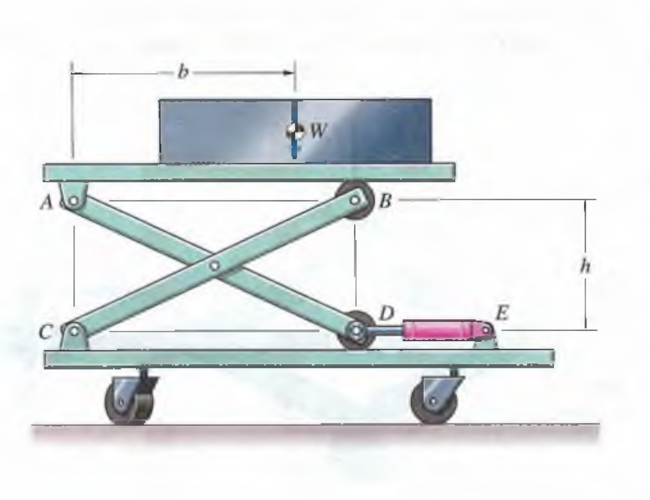
11.23 ¿Qué valor tienen las reacciones en A y B?

Estrategia: Establezca las ecuaciones de equilibrio para determinar las componentes horizontales de las reacciones y utilice el principio del trabajo virtual para determinar las componentes verticales.



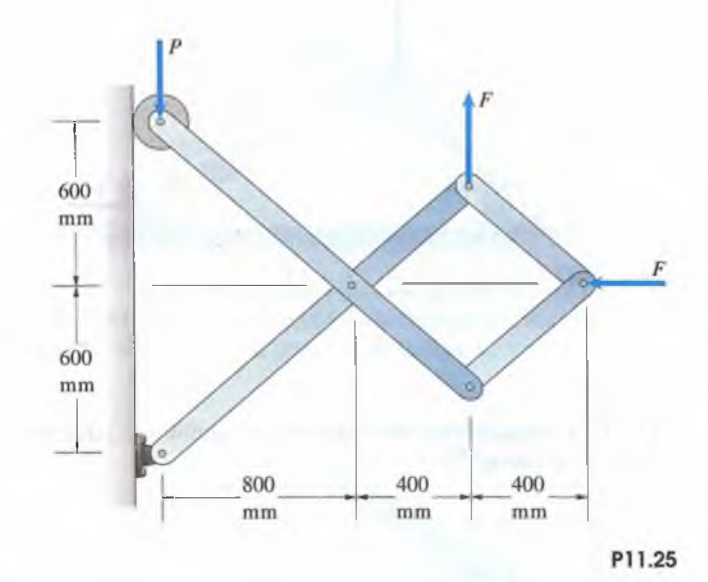
P11.23

11.24 El mecanismo mostrado eleva una carga W extendiendo el actuador hidráulico DE. Las barras AD y BC tienen cada una 2 m de longitud. Las distancias son $b = 1.4$ m y $h = 0.8$ m. Si $W = 4$ kN, ¿qué fuerza debe ejercer el actuador para mantener la carga en equilibrio?



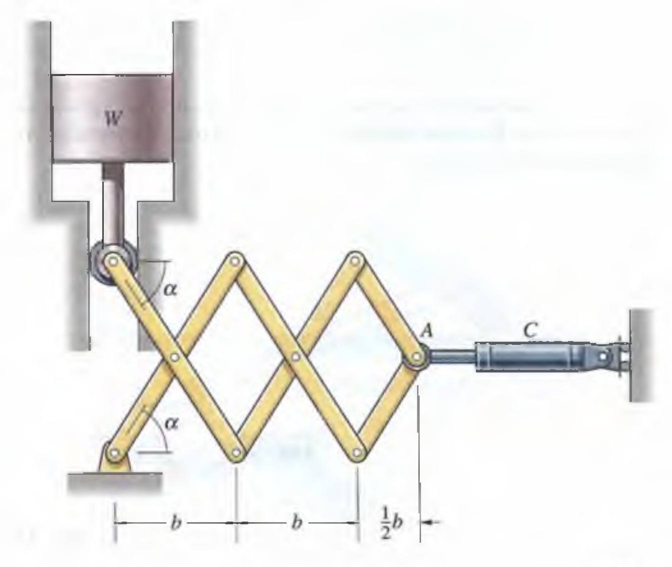
P11.24

11.25 Determine la fuerza P necesaria para que el mecanismo mostrado esté en equilibrio.



P11.25

11.26 El cilindro hidráulico C de la figura ejerce una fuerza horizontal en A, elevando el peso W. Determine la magnitud de la fuerza que el cilindro hidráulico debe ejercer para soportar el peso en función de W y α.



P11.26

11.2 Energía potencial

El trabajo de una fuerza **F** debida a un desplazamiento diferencial de su punto de aplicación es

$$dU = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

Si existe una función V de posición tal que para cualquier $d\mathbf{r}$,

$$dU = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -dV, \tag{11.10}$$

la función V se llama **energía potencial** asociada con la fuerza **F**, y se dice que **F** es **conservativa**. (El signo negativo en esta ecuación es consistente con la interpretación de V como energía "potencial". Una disminución de V origina un trabajo positivo.) Si las fuerzas que trabajan sobre un sistema son conservativas, se puede usar la energía potencial total del sistema para determinar sus posiciones de equilibrio.

Ejemplos de fuerzas conservativas

Los pesos de los cuerpos y las fuerzas ejercidas por resortes lineales son conservativas. En las secciones siguientes deducimos las energías potenciales asociadas con esas fuerzas.

Peso En términos de un sistema coordenado con su eje y dirigido hacia arriba, la fuerza ejercida por el peso de un cuerpo es $\mathbf{F} = -W\mathbf{j}$ (Fig. 11.10a). Si damos al cuerpo un desplazamiento arbitrario $d\mathbf{r} = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k}$ (Fig. 11.10b), el trabajo realizado por su peso es

$$dU = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = (-W\,\mathbf{j}) \cdot (dx\,\mathbf{i} + dy\,\mathbf{j} + dz\,\mathbf{k}) = -W\,dy.$$

Buscamos una energía potencial tal que

$$dU = -W\,dy = -dV, \tag{11.11}$$

o

$$\frac{dV}{dy} = W.$$

Si se ignora la variación en el peso con la altura y se integra, se obtiene

$$V = Wy + C.$$

La constante C es arbitraria, ya que esta función satisface la ecuación (11.11) para cualquier valor de C, y haremos $C = 0$. La posición del origen del sistema coordenado también se puede escoger arbitrariamente. La energía potencial asociada con el peso de un cuerpo es entonces

$$V = Wy, \tag{11.12}$$

donde y es la altura del cuerpo sobre algún nivel de referencia o **datum**.

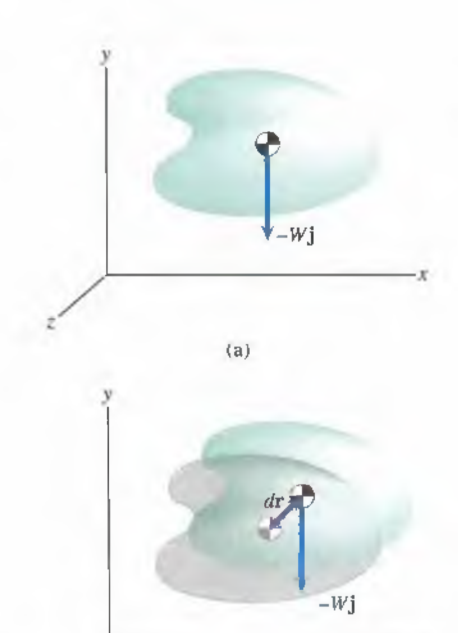


Figura
(a) Fuerza ejercida por el peso de un cuerpo.
(b) Desplazamiento diferencial.

Resortes Consideremos un resorte lineal que conecta un cuerpo a un soporte fijo (Fig. 11.11a). En términos del **alargamiento** $S = r - r_0$, donde r es la longitud del resorte y r_0 es su longitud sin estirar, la fuerza ejercida sobre el cuerpo es kS (Fig. 11.11b). Si el punto en el cual el resorte está unido al cuerpo sufre un desplazamiento diferencial $d\mathbf{r}$ (Fig. 11.11c), el trabajo realizado por la fuerza sobre el cuerpo es

$$dU = -kS\,dS,$$

donde dS es el incremento en el alargamiento del resorte que resulta del desplazamiento (Fig. 11.11d).

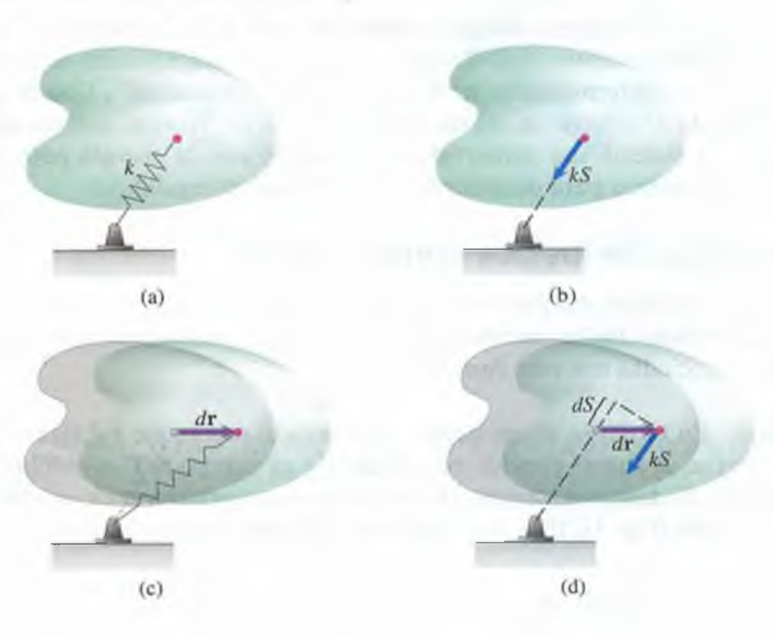


Figura 11.11
(a) Resorte conectado a un cuerpo.
(b) Fuerza ejercida sobre el cuerpo.
(c) Desplazamiento diferencial del cuerpo.
(d) El trabajo realizado por la fuerza es $dU = -kSdS$.

Buscamos una energía potencial V tal que

$$dU = -kS\,dS = -dV, \tag{11.13}$$

o

$$\frac{dV}{dS} = kS.$$

Integrando esta ecuación y haciendo la constante de integración igual a cero, obtenemos la energía potencial asociada con la fuerza ejercida por un resorte lineal:

$$V = \frac{1}{2}kS^2. \tag{11.14}$$

Observe que V es positiva si el resorte está estirado (s es positiva) o comprimido (s es negativa). La energía potencial (potencial de realizar trabajo) es almacenada en un resorte al estirarlo o comprimirlo.

Principio del trabajo virtual para fuerzas conservativas

Como el trabajo realizado por una fuerza conservativa se expresa en función de su energía potencial con Ec. (11.10), hay un enunciado alternativo del principio descrito si un cuerpo se somete a fuerzas conservativas:

> Supongamos que un cuerpo está en equilibrio. Si las fuerzas que realizan trabajo como resultado de una traslación o giro virtual son conservativas, el cambio en la energía potencial total es igual a cero:

$$\delta V = 0. \tag{11.15}$$

Recuerde que no es necesario que todas las fuerzas que actúan sobre el cuerpo sean conservativas para que este resultado sea válido; sólo deben serlo las fuerzas que realizan trabajo. Este principio también se aplica a un sistema de cuerpos interconectados si las fuerzas externas que realizan trabajo son conservativas y las fuerzas internas en las conexiones entre los cuerpos no trabajan o bien son conservativas. Tal sistema es un **sistema conservativo.**

Si la posición de un sistema se puede especificar con una sola coordenada q, se dice que el sistema tiene un **grado de libertad**. La energía potencial total de un sistema conservativo de un grado de libertad se puede expresar en términos de q, y podemos escribir la ecuación (11.15) como

$$\delta V = \frac{dV}{dq}\,\delta q = 0.$$

Así, cuando el cuerpo o sistema está en equilibrio, la derivada de su energía potencial total con respecto a q es igual a cero:

$$\frac{dV}{dq} = 0. \tag{11.16}$$

Se puede utilizar esta ecuación para determinar los valores de q para los cuales el sistema está en equilibrio.

Estabilidad del equilibrio

Supongamos que una barra homogénea de peso W y longitud L está articulada en un extremo. En términos del ángulo α (Fig. 11.12a), la altura del centro de masa relativa al extremo articulado es $-\frac{1}{2}L\cos\alpha$. Por tanto, escogiendo como referencia el nivel de la articulación, podemos expresar la energía potencial asociada con el peso de la barra como

$$V = -\frac{1}{2}WL\cos\alpha.$$

Cuando la barra está en equilibrio,

$$\frac{dV}{d\alpha} = \frac{1}{2}WL\,\text{sen}\,\alpha = 0.$$

Esta condición se satisface cuando $\alpha = 0$ (Fig. 11.12b) y también cuando $\alpha = 180°$ (Fig. 11.12c).

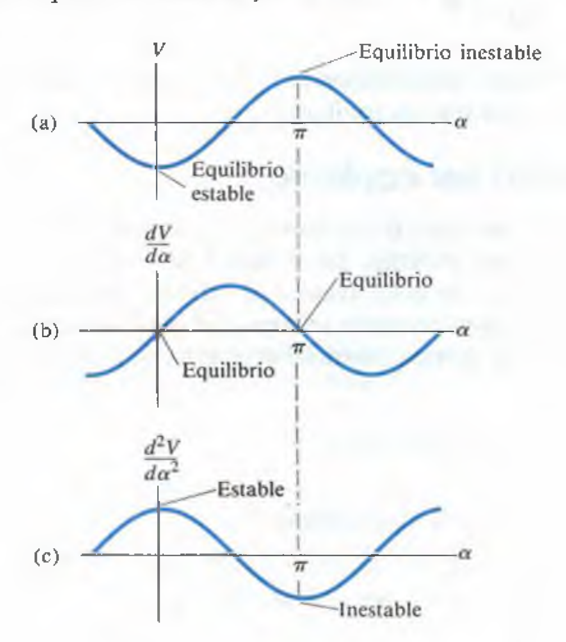
Figura 11.12
(a) Barra suspendida de un extremo.
(b) Posición de equilibrio $\alpha = 0$.
(c) Posición de equilibrio $\alpha = 180°$.

Nivel de referencia
α
$\alpha = 0$
$\alpha = 180°$
(a) (b) (c)

Hay una diferencia fundamental entre las dos posiciones de equilibrio de la barra. En la posición b, si desplazamos la barra ligeramente de su posición de equilibrio y la soltamos, permanecerá cerca de la posición de equilibrio. Se dice entonces que esta posición de equilibrio es **estable**. Cuando la barra está en la posición mostrada en la figura 11.12(c), si la desplazamos ligeramente y la soltamos, la barra se alejará de la posición de equilibrio. Esta posición de equilibrio es **inestable**.

En la figura 11.13(a) se muestra la gráfica de la energía potencial V de la barra en función de α. La energía potencial es un mínimo en la posición de equilibrio estable, $\alpha = 0$, y un máximo en la posición de equilibrio inestable, $\alpha = 180°$. La derivada de V (Fig. 11.13b) es igual a cero en ambas posiciones de equilibrio. La segunda derivada de V (Fig. 11.13c) es positiva en la posición de equilibrio estable, $\alpha = 0$, y negativa en la posición de equilibrio inestable, $\alpha = 180°$.

Figura 11.13
Gráficas de V, $dV/d\alpha$, y $d^2V/d\alpha^2$.



Si un sistema conservativo de un grado de libertad está en equilibrio y la segunda derivada de V evaluada en la posición de equilibrio es positiva, el equilibrio es estable. Si la segunda derivada de V es negativa, el equilibrio es inestable.

$$\frac{dV}{dq} = 0, \qquad \frac{d^2V}{dq^2} > 0: \qquad \text{Equilibrio estable}$$

$$\frac{dV}{dq} = 0, \qquad \frac{d^2V}{dq^2} < 0: \qquad \text{Equilibrio inestable}$$

(Estos resultados se pueden demostrar analizando el desplazamiento del sistema cerca de una posición de equilibrio.) Si la segunda derivada de V es cero, se dice que la posición de equilibrio es **estable neutra** (Fig. 11.14). Por ejemplo, una esfera homogénea en reposo sobre una superficie plana está en equilibrio estable neutro.

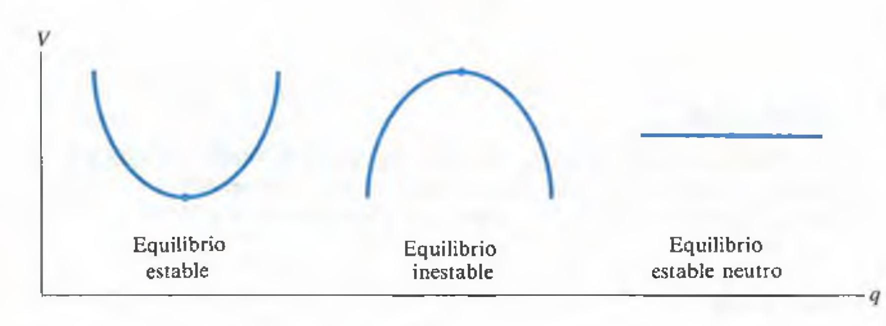


Figura 11.14
Gráficas de la energía potencial V en función de la coordenada q que muestran posiciones de equilibrio estable, inestable y neutro.

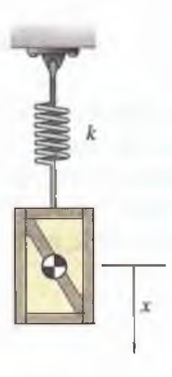
En los siguientes ejemplos usamos la energía potencial para analizar el equilibrio de sistemas de un grado de libertad. Esto consta de tres pasos:

1. Determinar la energía potencial. *Exprese la energía potencial total en función de una sola coordenada que determine la posición del sistema.*
2. Encontrar las posiciones de equilibrio. *Calcule la primera derivada de la energía potencial para determinar la o las posiciones de equilibrio.*
3. Examinar la estabilidad. *Use el signo de la segunda derivada de la energía potencial para determinar si las posiciones de equilibrio son estables.*

Ejemplo 11.3

En la figura 11.15 una caja de peso W está suspendida del techo por un alambre representado como un resorte lineal con constante k. La coordenada x mide la posición del centro de masa de la caja con respecto a la posición en que el alambre no está estirado. Encuentre la posición de equilibrio de la caja, y determine si es estable o inestable.

Figura 11.15



ESTRATEGIA

Las fuerzas que actúan sobre la caja —su peso y la fuerza ejercida por el resorte— son conservativas. El sistema es entonces conservativo y podemos usar la energía potencial para determinar la posición de equilibrio y ver si es estable.

SOLUCIÓN

Determinación de la energía potencial Podemos considerar $x = 0$ como el nivel de referencia para la energía potencial asociada con el peso. Como la coordenada x es positiva hacia abajo, la energía potencial es $-Wx$. El alargamiento del resorte es igual a x, por lo que la energía potencial asociada con la fuerza del resorte es $\frac{1}{2}kx^2$. La energía potencial total es

$$V = \frac{1}{2}kx^2 - Wx.$$

Localización de las posiciones de equilibrio Cuando la caja está en equilibrio,

$$\frac{dV}{dx} = kx - W = 0.$$

La posición de equilibrio es $x = W/k$.

Examen de la estabilidad La segunda derivada de la energía potencial es

$$\frac{d^2V}{dx^2} = k.$$

La posición de equilibrio es estable.

Ejemplo 11.4

La semiesfera homogénea está en reposo sobre la superficie plana. Demuestre que se encuentra en equilibrio. ¿Es estable la posición de equilibrio?

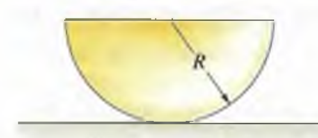


Figura 11.16

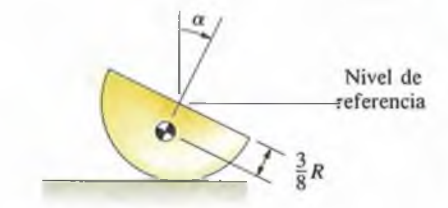
ESTRATEGIA

Para determinar si la semiesfera está en equilibrio y para ver si este equilibrio es estable, debemos establecer una coordenada que especifique su orientación y exprese su energía potencial en términos de esa coordenada. Podemos usar como coordenada el ángulo de giro de la semiesfera respecto a la posición mostrada.

SOLUCIÓN

Determinación de la energía potencial Suponemos que la semiesfera ha girado un ángulo α con respecto a su posición inicial (Fig. a). Mediante el nivel de referencia mostrado, la energía potencial asociada con el peso W de la semiesfera es

$$V = -\frac{3}{8} RW \cos\alpha.$$



(a) Semiesfera girada un ángulo α.

Localización de las posiciones de equilibrio Cuando la semiesfera está en equilibrio,

$$\frac{dV}{d\alpha} = \frac{3}{8} RW \operatorname{sen}\alpha = 0,$$

lo cual confirma que $\alpha = 0$ es una posición de equilibrio.

Examen de la estabilidad La segunda derivada de la energía potencial es

$$\frac{d^2V}{d\alpha^2} = \frac{3}{8} RW \cos\alpha.$$

Esta expresión es positiva en $\alpha = 0$, por lo que la posición de equilibrio es estable.

COMENTARIO

Observe que ignoramos la fuerza normal ejercida por la superficie plana sobre la semiesfera. Esta fuerza no trabaja y por ello no entra en la expresión para la energía potencial.

Ejemplo 11.5

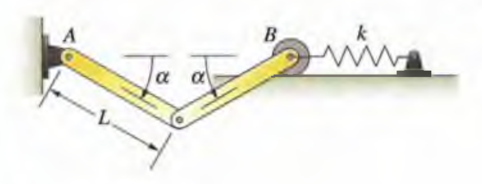


Figura 11.17

Las barras articuladas son mantenidas en posición por el resorte lineal. Cada barra tiene peso W y longitud L. El resorte no está estirado cuando $\alpha = 0$, y las barras están en equilibrio cuando $\alpha = 60°$. Determine la constante de resorte k y si la posición de equilibrio es estable o inestable.

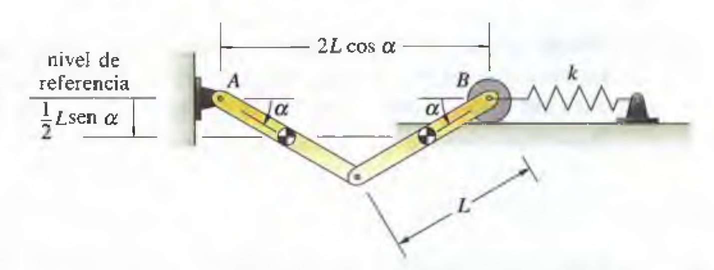
ESTRATEGIA

Las únicas fuerzas sobre las barras son sus pesos y el resorte. Expresando la energía potencial total en función de α y planteando la ecuación (11.16), obtendremos una ecuación de la que podremos despejar la constante k.

SOLUCIÓN

Determinación de la energía potencial Si utilizamos el nivel de referencia de (a), la energía potencial asociada con los pesos de las barras es

$$W\left(-\frac{1}{2}L\operatorname{sen}\alpha\right) + W\left(-\frac{1}{2}L\operatorname{sen}\alpha\right) = -WL\operatorname{sen}\alpha.$$



(a) Determinación de la energía potencial total.

El resorte no está estirado cuando $\alpha = 0$ y la distancia entre los puntos A y B es $2L\cos\alpha$ (Fig. a), por lo que el alargamiento del resorte es $2L - 2L\cos\alpha$. Así, la energía potencial asociada con el resorte es $\frac{1}{2}k(2L - 2L\cos\alpha)^2$, y la energía potencial total es

$$V = -WL\operatorname{sen}\alpha + 2kL^2(1-\cos\alpha)^2.$$

Cuando el sistema está en equilibrio,

$$\frac{dV}{d\alpha} = -WL\cos\alpha + 4kL^2\operatorname{sen}\alpha(1-\cos\alpha) = 0.$$

Como el sistema está en equilibrio cuando $\alpha = 60°$, podemos despejar de esta ecuación la constante de resorte en función de W y L:

$$k = \frac{W\cos\alpha}{4L\operatorname{sen}\alpha(1-\cos\alpha)} = \frac{W\cos 60°}{4L\operatorname{sen}60°(1-\cos 60°)} = \frac{0.289W}{L}.$$

Examen de la estabilidad La segunda derivada de la energía potencial es

$$\begin{aligned}\frac{d^2V}{d\alpha^2} &= WL\operatorname{sen}\alpha + 4kL^2(\cos\alpha - \cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha)\\ &= WL\operatorname{sen}60° + 4kL^2(\mathrm{eos}\,60° - \cos^2 60° + \operatorname{sen}^2 60°)\\ &= 0.866WL + 4kL^2.\end{aligned}$$

Éste es un número positivo, por lo que la posición de equilibrio es estable.

Problemas

11.27 La energía potencial de un sistema conservativo es $V = 2x^3 + 3x^2 - 12x$.
(a) ¿Para qué valores de x está el sistema en equilibrio?
(b) Determine si las posiciones de equilibrio obtenidas en la parte (a) son estables o inestables.

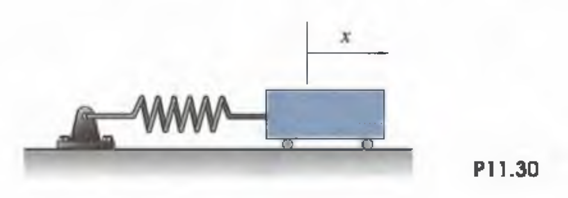
11.28 La energía potencial de un sistema conservativo es $V = 2q^3 - 21q^2 + 72q$.
(a) ¿Para qué valores de q está el sistema en equilibrio?
(b) Determine si las posiciones de equilibrio obtenidas en la parte (a) son estables o inestables.

11.29 En la figura P11.29, el peso $W = 100$ lb y la constante del resorte $k = 50$ lb/pie. El resorte no está estirado cuando $x = 0$.
(a) Halle el valor de x en el cual el peso está en equilibrio.
(b) Determine si la posición de equilibrio es estable o inestable.

k
W
x

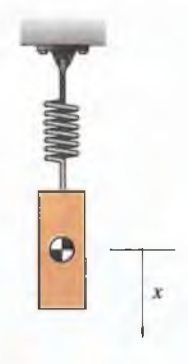
P11.29

11.30 El resorte *no lineal* mostrado ejerce una fuerza $-kx + \epsilon x^3$ sobre la masa, donde k y ϵ son constantes. Determine la energía potencial V asociada con la fuerza ejercida sobre la masa por el resorte.



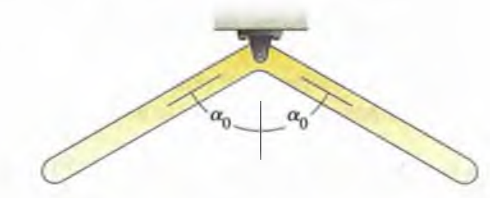
P11.30

11.31 La masa de 1 kg de la figura está suspendida del resorte no lineal descrito en el problema 11.30. Las constantes $k = 10$ y $\varepsilon = 1$, donde x está en metros.
(a) Demuestre que la masa está en equilibrio cuando $x = 1.12$ m y cuando $x = 2.45$ m.
(b) Determine si las posiciones de equilibrio son estables o inestables.



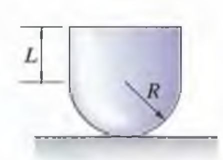
P11.31

11.32 Cada uno de los dos segmentos rectos de la barra mostrada tiene peso W y longitud L. Determine si la posición de equilibrio mostrada es estable si: (a) $0 < \alpha_0 < 90°$; (b) $\alpha_0 = 90°$; (c) $90° < \alpha_0 < 180°$.



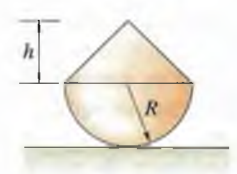
P11.32

11.33 El cuerpo compuesto homogéneo consiste en una semiesfera y un cilindro, y descansa sobre una superficie plana. Demuestre que esta posición de equilibrio es estable sólo si $L < R/\sqrt{2}$.



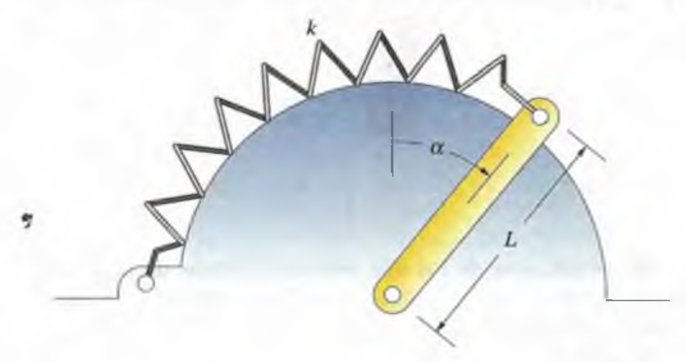
P11.33

11.34 El cuerpo compuesto homogéneo consiste en una semiesfera y un cono sobre una superficie plana. Demuestre que esta posición de equilibrio es estable sólo si $h < \sqrt{3}R$.



P11.34

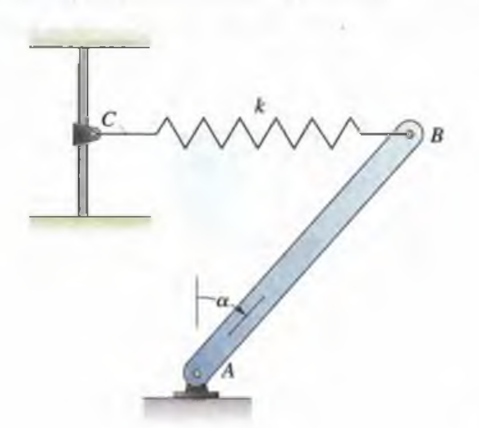
11.35 La barra homogénea mostrada tiene peso W, y el resorte no está estirado cuando la barra se encuentra en posición vertical ($\alpha = 0$).
(a) Utilice la energía potencial para demostrar que la barra está en equilibrio cuando $\alpha = 0$.
(b) Pruebe que el equilibrio $\alpha = 0$ es estable sólo si $2kL > W$.



P11.35

11.36 Suponga que la barra del problema 11.35 está en equilibrio cuando $\alpha = 20°$.
(a) Demuestre que la constante del resorte $k = 0.490\ W/L$.
(b) Determine si la posición de equilibrio es estable.

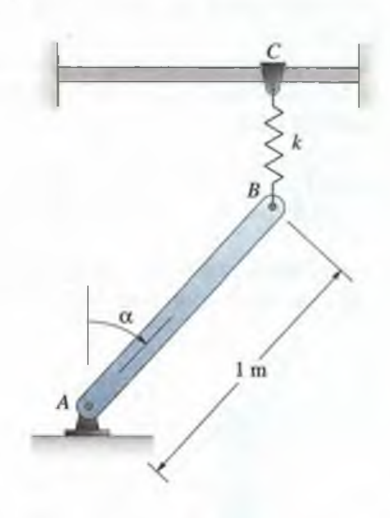
11.37 La barra AB tiene peso W y longitud L. El resorte no está estirado estando la barra en posición vertical ($\alpha = 0$). El collarín ligero C resbala sobre la barra lisa vertical por lo que el resorte permanece horizontal. Demuestre que la posición de equilibrio $\alpha = 0$ es estable sólo si $2kL > W$.



P11.37

11.38 La barra AB (P11.37) pesa 20 lb, su longitud es de 4 pies y la constante de resorte $k = 5$ lb/pie.
(a) Determine el valor de α en el intervalo $0 < \alpha < 90°$ para el cual la barra está en equilibrio.
(b) ¿Es estable la posición de equilibrio determinada?

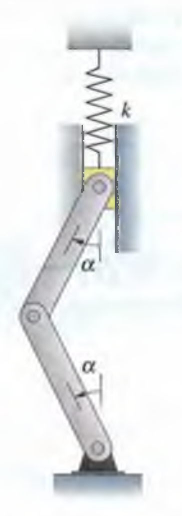
11.39 La barra AB tiene peso W y longitud L. El resorte no se estriba estando la barra vertical ($\alpha = 0$). El collarín C resbala sobre la barra lisa horizontal, y el resorte permanece vertical. Demuestre que la posición de equilibrio $\alpha = 0$ es inestable.



P11.39

11.40 La barra AB descrita en el problema 11.39 tiene una masa de 2 kg y la constante de resorte $k = 80$ N/m.
(a) Determine el valor de α en el intervalo $0 < \alpha < 90°$ para el cual la barra está en equilibrio.
(b) ¿Es estable la posición de equilibrio determinada?

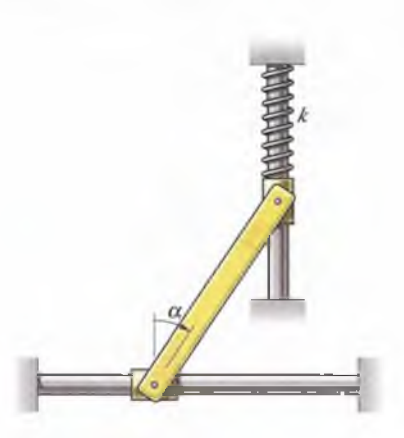
11.41 En la figura P11.41, cada barra homogénea tiene masa m y longitud L. El resorte no está estirado cuando $\alpha = 0$. Si $mg = kL$, determine el valor de α en el intervalo $0 < \alpha < 90°$ para el cual el sistema está en equilibrio.



P11.41

11.42 Determine si la posición de equilibrio obtenida en el problema 11.41 es estable o inestable.

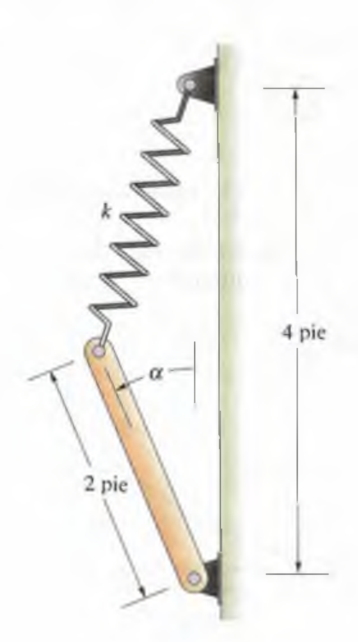
11.43 La masa de la barra mostrada es de 10 kg y tiene 1 m de longitud. Ignore las masas de los dos collarines. El resorte no está estirado cuando la barra se encuentra en posición vertical ($\alpha = 0$), y la constante de resorte $k = 100$ N/m. Determine los valores de α para los cuales la barra está en equilibrio.



P11.43

11.44 Determine si las posiciones de equilibrio de la barra del problema 11.43 son estables o inestables.

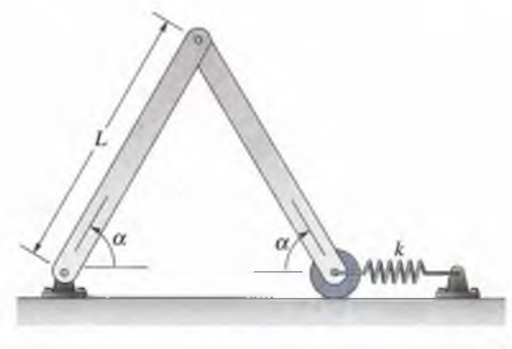
11.45 La barra mostrada pesa 15 lb. El resorte no está estirado cuando $\alpha = 0$. La barra está en equilibrio cuando $\alpha = 30°$. Determine la constante de resorte k.



P11.45

11.46 Determine si las posiciones de equilibrio de la barra del problema 11.45 son estables o inestables.

11.47 Cada barra mostrada tiene peso W y el resorte no está estirado cuando $\alpha = 90°$.
(a) Demuestre que el sistema está en equilibrio cuando $\alpha = \text{arcsen}\,(W/4kL)$.
(b) ¿Es estable la posición de equilibrio descrita en la parte (a)?



P11.47

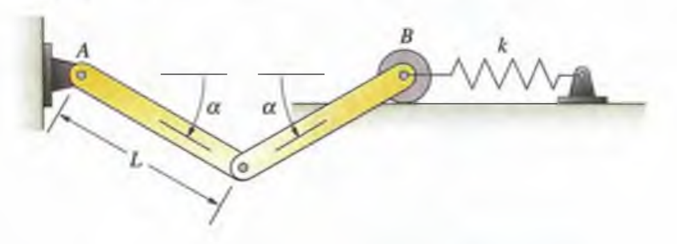
Ejemplos con computador

Los siguientes problemas y el ejemplo están diseñados para ser resueltos con ayuda de una calculadora programable o de un computador.

Ejemplo 11.6

Las dos barras de la figura 11.18 son mantenidas en posición por el resorte lineal. Cada barra tiene peso W y longitud L. El resorte no está estirado cuando $\alpha = 0$. Si $W = kL$, ¿cuál es el valor de α para el cual las barras están en equilibrio? ¿Es estable la posición de equilibrio?

Figura 11.18



ESTRATEGIA

Obteniendo una gráfica de la derivada de la energía potencial total en función de α, podemos calcular el valor de α correspondiente al equilibrio y determinar si la posición de equilibrio es estable.

SOLUCIÓN

Obtuvimos la energía potencial total del sistema y determinamos su derivada con respecto a α en el ejemplo 11.5, lo que nos dio

$$\frac{dV}{d\alpha} = -WL\cos\alpha + 4kL^2 \operatorname{sen}\alpha(1 - \cos\alpha).$$

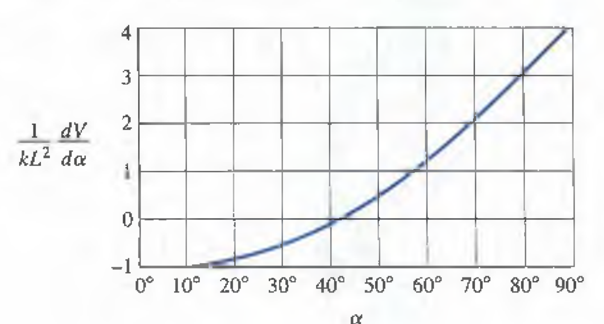
Sustituyendo $W = kL$, obtenemos

$$\frac{dV}{d\alpha} = kL^2[-\cos\alpha + 4\operatorname{sen}\alpha(1 - \cos\alpha)].$$

De la gráfica de esta función (Fig. 11.19), calculamos que el sistema está en equilibrio cuando $\alpha = 43°$.

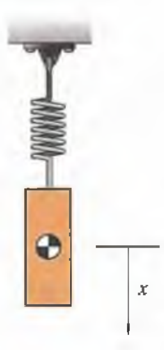
La pendiente $dV/d\alpha$, que es la segunda derivada de V, es positiva en $\alpha = 43°$. Por consiguiente, la posición de equilibrio es estable.

Figura 11.19
Gráfica de la derivada de V.



Problemas

11.48 La masa de 1 kg de la figura está suspendida de un resorte *no lineal* que ejerce una fuerza $-10x + x^3$, donde x está en metros.
(a) Dibuje una gráfica de la energía potencial total del sistema en función de x de $x = 0$ a $x = 4$ m.
(b) Use la gráfica para calcular las posiciones de equilibrio de la masa.
(c) Determine si las posiciones de equilibrio obtenidas en la parte (b) son estables o inestables.



P11.48

11.49 Suponga que la barra homogénea del problema 11.35 pesa 20 lb, que tiene una longitud $L = 2$ pies y que $k = 4$ lb/pie.
(a) Determine el valor de α en el intervalo $0 < \alpha < 90°$ para el cual la barra está en equilibrio.
(b) ¿Es estable la posición de equilibrio encontrada en la parte (a)?

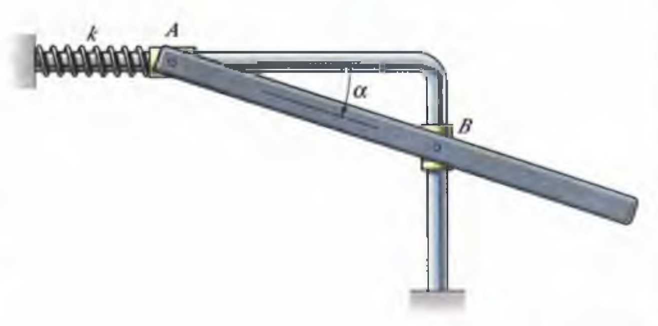
11.50 La barra del problema 11.45 pesa 15 lb y el resorte no está estirado cuando $\alpha = 0$. La constante de resorte $k = 6$ lb/pie.
(a) Determine el valor de α en el intervalo $0 < \alpha < 90°$ para el cual la barra está en equilibrio.
(b) ¿Es estable la posición de equilibrio encontrada en la parte (a)?

11.51 La barra homogénea mostrada tiene longitud L y masa $= 4\,m$.
(a) Determine el valor de α en el intervalo $0 < \alpha < 90°$ para el cual la barra está en equilibrio.
(b) ¿Es estable la posición de equilibrio determinada?



11.51

11.52 La barra de 2 m de largo y 10 kg de masa de la figura está conectada con pasadores en A y en su punto medio B a collarines ligeros que resbalan sobre una barra lisa. El resorte unido en A no está estirado cuando $\alpha = 0$, y su constante es $k = 1.2$ kN/m.
(a) Halle el valor de α estando la barra en equilibrio.
(b) Determine si esa posición de equilibrio es estable.



P11.52

Resumen del capítulo

Trabajo

El **trabajo** realizado por una fuerza **F** como resultado de un desplazamiento *d***r** de su punto de aplicación se define como

$$dU = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}. \quad \textbf{(Ec. 11.1)}$$

El trabajo de un par antihorario M debido a un giro antihorario $d\alpha$ es

$$dU = M\,d\alpha. \quad \textbf{(Ec. 11.2)}$$

Principio del trabajo virtual

Si un cuerpo está en equilibrio, el trabajo virtual realizado por las fuerzas y los pares externos que actúan sobre él es cero para cualquier traslación o giro virtual:

$$\delta U = 0. \quad \textbf{(Ec. 11.9)}$$

Energía potencial

Si existe una función V de posición tal que para cualquier desplazamiento *d***r**, el trabajo realizado por una fuerza **F** es

$$dU = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -dV, \quad \textbf{(Ec. 11.10)}$$

V se llama **energía potencial** asociada con la fuerza, y se dice que **F** es **conservativa**.

La energía potencial asociada con el peso W de un cuerpo es

$$V = Wy, \quad \textbf{(Ec. 11.12)}$$

donde y es la altura del centro de masa sobre algún nivel de referencia, o **dato**.

La energía potencial asociada con la fuerza ejercida por un resorte lineal es

$$V = \frac{1}{2}kS^2, \quad \textbf{(Ec. 11.14)}$$

donde k es la constante de resorte y S es el alargamiento del resorte.

Principio del trabajo virtual para fuerzas conservativas

Un cuerpo o un sistema de cuerpos interconectados es **conservativo** si las fuerzas y los pares externos que efectúan trabajo son conservativas y las fuerzas internas en las conexiones entre los cuerpos, o no trabajan o son conservativas. El cambio en la energía potencial total debido a cualquier desplazamiento virtual de un cuerpo o sistema conservativo es cero:

$$\delta V = 0. \quad \textbf{(Ec. 11.15)}$$

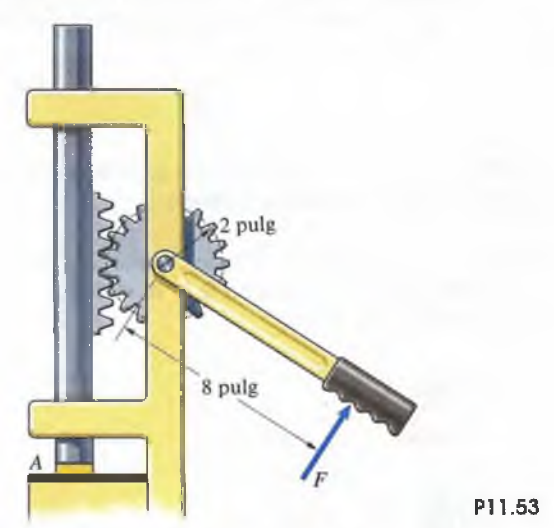
Si la posición de un cuerpo o de un sistema se puede determinar con una sola coordenada q, se dice que tiene un **grado de libertad**. Cuando un cuerpo o un sistema conservativo de un grado de libertad está en equilibrio,

$$\frac{dV}{dq} = 0. \quad \text{(Ec. 11.16)}$$

Si la segunda derivada de V es positiva, la posición de equilibrio es estable, y si la segunda derivada de V es negativa, entonces es inestable. Si la segunda derivada de V es cero, la posición de equilibrio es estable neutra.

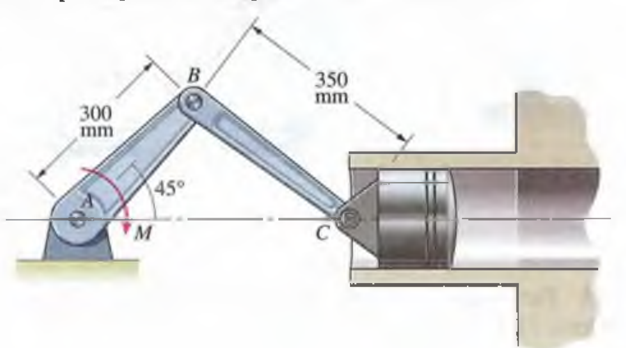
Problemas de repaso

11.53 Este mecanismo se usa para ejercer una fuerza vertical sobre una muestra en A para un estampado. Se ejerce una fuerza $F = 30$ lb sobre el mango; con el principio del trabajo virtual, determine la fuerza ejercida sobre la muestra.



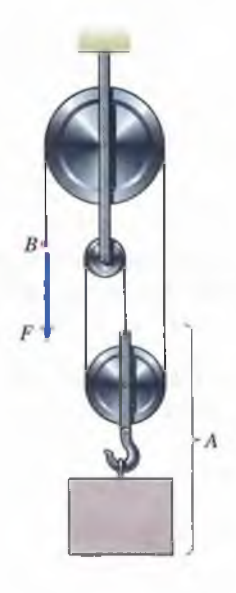
P11.53

11.54 En una máquina de inyección, un par M aplicado al brazo AB ejerce una fuerza sobre el émbolo de inyección en C. La componente horizontal de la fuerza en C es de 4kN; con el principio del trabajo virtual, determine M.



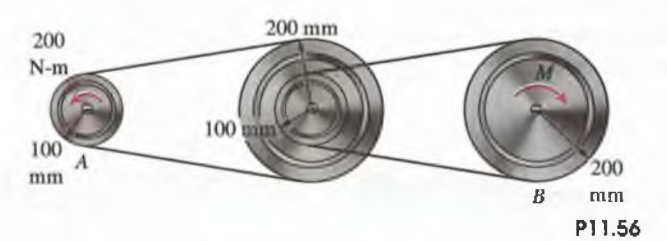
P11.54

11.55 El sistema está en equilibrio. El peso total de la carga suspendida y del dispositivo A es de 300 lb.
(a) Planteando la condición de equilibrio, determine la fuerza F.
(b) Utilizando el resultado de la parte (a) y el principio del trabajo virtual, determine la distancia que la carga suspendida se eleva si el cable en B se jala hacia abajo 1 pie.



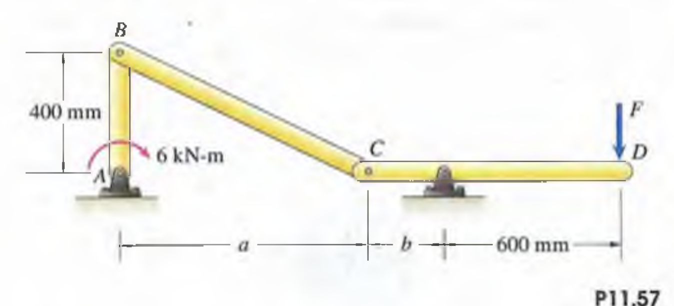
P11.55

11.56 El sistema está en equilibrio.
(a) Dibujando diagramas de cuerpo libre y estableciendo las ecuaciones de equilibrio, determine el par M.
(b) Con el resultado de la parte (a) y el principio del trabajo virtual, determine el ángulo que gira la polea B si la polea A gira un ángulo α.



P11.56

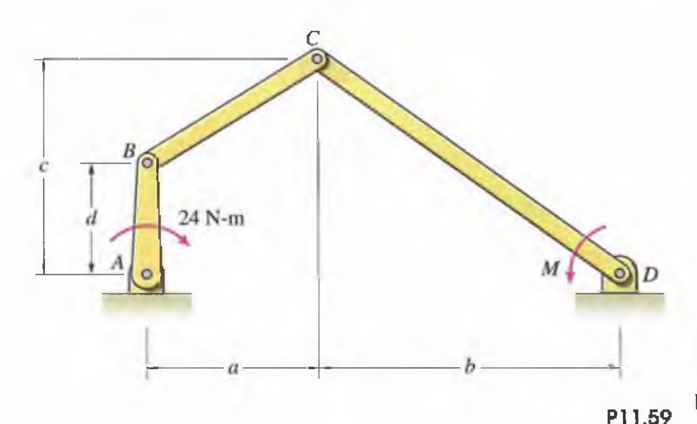
11.57 Demuestre que si la barra AB está sometida a un giro virtual horario $\delta\alpha$, la barra CD sufre una rotación virtual antihoraria $(b/a)\delta\alpha$.



P11.57

11.58 El sistema del problema 11.57 está en equilibrio; a = 800 mm, y b = 400 mm. Use el principio del trabajo virtual para determinar la fuerza F.

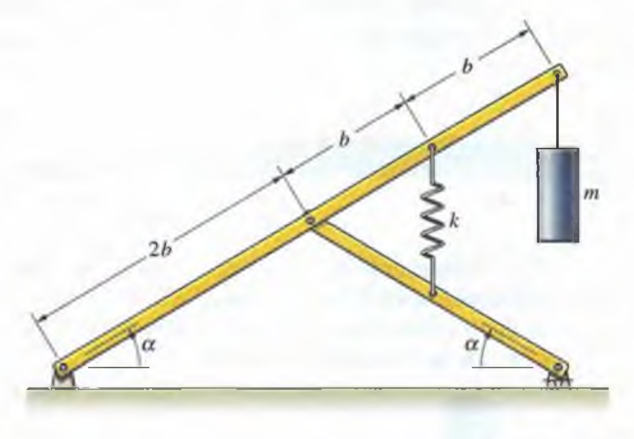
11.59 Demuestre que si la barra AB está sometida a un giro virtual horario $\delta\alpha$, la barra CD sufre un giro virtual horario $[ad/(ac + bc - bd)]\delta\alpha$.



P11.59

11.60 El sistema del problema 11.59 está en equilibrio; a = 300 mm, b = 350 mm, c = 350 mm y d = 200 mm. Utilice el principio del trabajo virtual para determinar el par M.

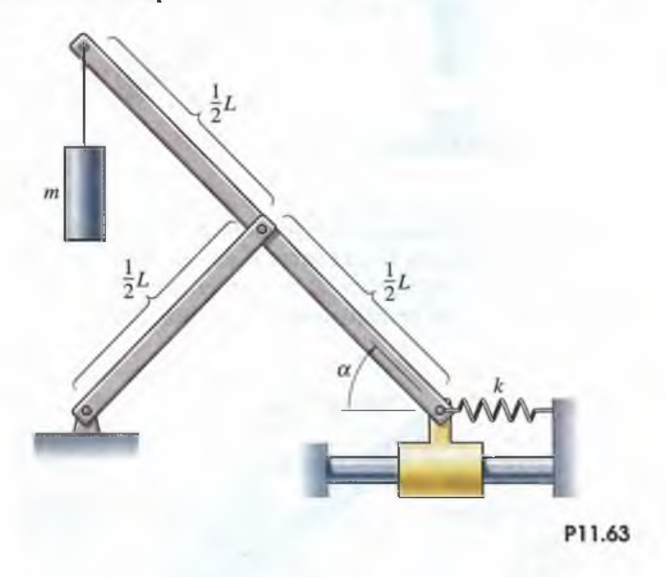
11.61 El resorte no está estirado cuando $\alpha = 90°$. Si $mg = bk/2$, determine el valor de α en el intervalo $0 < \alpha < 90°$ para el cual el sistema está en equilibrio.



P11.61

11.62 Determine si la posición de equilibrio obtenida en el problema 11.61 es estable o inestable.

11.63 El resorte no está estirado cuando $\alpha = 90°$. Determine el valor de α en el intervalo $0 < \alpha < 90°$ para el cual el sistema está en equilibrio.



P11.63

11.64 Determine si la posición de equilibrio obtenida en el problema 11.63 es estable o inestable.

Apéndice A Repaso de matemáticas

A.1 Álgebra

Ecuaciones cuadráticas

Las soluciones de la ecuación cuadrática

$$ax^2 + bx + c = 0$$

son

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Logaritmos naturales

El logaritmo natural de un número real positivo x se denota con $\ln x$ y se define como el número tal que

$$e^{\ln x} = x,$$

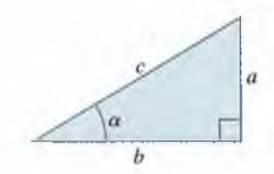
donde $e = 2.7182\ldots$ es la base de los logaritmos naturales.
Los logaritmos tienen las siguientes propiedades:

$$\ln(xy) = \ln x + \ln y,$$

$$\ln(x/y) = \ln x - \ln y,$$

$$\ln y^x = x \ln y.$$

A.2 Trigonometría



Las funciones trigonométricas para un triángulo rectángulo son

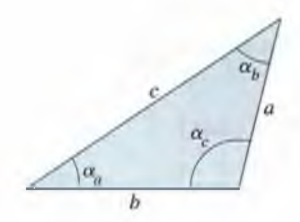
$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{1}{\csc\alpha} = \frac{a}{c}, \qquad \cos\alpha = \frac{1}{\sec\alpha} = \frac{b}{c}, \qquad \tan\alpha = \frac{1}{\cot\alpha} = \frac{a}{b}.$$

El seno y el coseno satisfacen la relación

$$\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1,$$

y el seno y el coseno de la suma y diferencia de dos ángulos satisfacen las relaciones

$$\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen}\alpha \cos\beta + \cos\alpha \operatorname{sen}\beta,$$
$$\operatorname{sen}(\alpha - \beta) = \operatorname{sen}\alpha \cos\beta - \cos\alpha \operatorname{sen}\beta,$$
$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta,$$
$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cos\beta + \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta.$$



La **ley de los cosenos** para un ángulo cualquiera es

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha_c,$$

y la **ley de los senos** es

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha_a}{a} = \frac{\operatorname{sen}\alpha_b}{b} = \frac{\operatorname{sen}\alpha_c}{c}.$$

A.3 *Derivadas*

$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1} \qquad \frac{d}{dx}\operatorname{sen} x = \cos x \qquad \frac{d}{dx}\operatorname{senh} x = \cosh x$$

$$\frac{d}{dx}e^x = e^x \qquad \frac{d}{dx}\cos x = -\operatorname{sen} x \qquad \frac{d}{dx}\cosh x = \operatorname{senh} x$$

$$\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x} \qquad \frac{d}{dx}\tan x = \frac{1}{\cos^2 x} \qquad \frac{d}{dx}\tanh x = \operatorname{sech}^2 x$$

A.4 *Integrales*

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \qquad (n \neq -1)$$

$$\int x^{-1}\,dx = \ln x$$

$$\int (a+bx)^{1/2}\,dx = \frac{2}{3b}(a+bx)^{3/2}$$

$$\int x(a+bx)^{1/2}\,dx = -\frac{2(2a-3bx)(a+bx)^{3/2}}{15b^2}$$

$$\int (1+a^2x^2)^{1/2}\,dx = \frac{1}{2}\left\{x(1+a^2x^2)^{1/2} + \frac{1}{a}\ln\left[x+\left(\frac{1}{a^2}+x^2\right)^{1/2}\right]\right\}$$

$$\int x(1+a^2x^2)^{1/2}\,dx = \frac{a}{3}\left(\frac{1}{a^2}+x^2\right)^{3/2}$$

$$\int x^2(1+a^2x^2)^{1/2}\,dx = \frac{1}{4}ax\left(\frac{1}{a^2}+x^2\right)^{3/2} - \frac{1}{8a^2}x(1+a^2x^2)^{1/2} - \frac{1}{8a^3}\ln\left[x+\left(\frac{1}{a^2}+x^2\right)^{1/2}\right]$$

$$\int (1-a^2x^2)^{1/2}\,dx = \frac{1}{2}\left[x(1-a^2x^2)^{1/2} + \frac{1}{a}\operatorname{arcsen}(ax)\right]$$

$$\int x(1-a^2x^2)^{1/2}\,dx = -\frac{a}{3}\left(\frac{1}{a^2}-x^2\right)^{3/2}$$

$$\int x^2(a^2-x^2)^{1/2}\,dx = -\frac{1}{4}x(a^2-x^2)^{3/2} + \frac{1}{8}[x(a^2-x^2)^{1/2} + a^2\operatorname{arcsen}(x/a)]$$

$$\int \frac{dx}{(1+a^2x^2)^{1/2}} = \frac{1}{a}\ln\left[x+\left(\frac{1}{a^2}+x^2\right)^{1/2}\right]$$

$$\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x$$

$$\int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x$$

$$\int \operatorname{sen}^2 x\,dx = -\frac{1}{2}\operatorname{sen} x\cos x + \frac{1}{2}x$$

$$\int \cos^2 x\,dx = \frac{1}{2}\operatorname{sen} x\cos x + \frac{1}{2}x$$

$$\int \operatorname{sen}^3 x\,dx = -\frac{1}{3}\cos x(\operatorname{sen}^2 x + 2)$$

$$\int \cos^3 x\,dx = \frac{1}{3}\operatorname{sen} x(\cos^2 x + 2)$$

$$\int \cos^4 x\,dx = \frac{3}{8}x + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x + \frac{1}{32}\operatorname{sen} 4x$$

$$\int \operatorname{sen}^n x\cos x\,dx = \frac{(\operatorname{sen} x)^{n+1}}{n+1} \qquad (n \neq -1)$$

$$\int \operatorname{senh} x\,dx = \cosh x$$

$$\int \cosh x\,dx = \operatorname{senh} x$$

$$\int \tanh x\,dx = \ln\cosh x$$

A.5 Serie de Taylor

La serie de Taylor de una función $f(x)$ es

$$f(a+x) = f(a) + f'(a)x + \frac{1}{2!}f''(a)x^2 + \frac{1}{3!}f'''(a)x^3 + \cdots,$$

donde las primas indican derivadas.

Algunas series de Taylor útiles son

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots,$$

$$\operatorname{sen}(a+x) = \operatorname{sen} a + (\cos a)x - \frac{1}{2}(\operatorname{sen} a)x^2 - \frac{1}{6}(\cos a)x^3 + \cdots,$$

$$\cos(a+x) = \cos a - (\operatorname{sen} a)x - \frac{1}{2}(\cos a)x^2 + \frac{1}{6}(\operatorname{sen} a)x^3 + \cdots,$$

$$\tan(a+x) = \tan a + \left(\frac{1}{\cos^2 a}\right)x + \left(\frac{\operatorname{sen} a}{\cos^3 a}\right)x^2 + \left(\frac{\operatorname{sen}^2 a}{\cos^4 a} + \frac{1}{3\cos^2 a}\right)x^3 + \cdots.$$

A.6 Análisis vectorial

Coordenadas cartesianas

El gradiente de un campo escalar ψ es

$$\nabla\psi = \frac{\partial\psi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\psi}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial\psi}{\partial z}\mathbf{k}.$$

La divergencia y el rotacional de un campo vectorial $\mathbf{v} = v_x\,\mathbf{i} + v_y\,\mathbf{j} + v_z\,\mathbf{k}$ son

$$\nabla\cdot\mathbf{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z},$$

$$\nabla\times\mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}$$

Coordenadas cilíndricas

El gradiente de un campo escalar ψ es

$$\nabla\psi = \frac{\partial\psi}{\partial r}\mathbf{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\mathbf{e}_\theta + \frac{\partial\psi}{\partial z}\mathbf{e}_z.$$

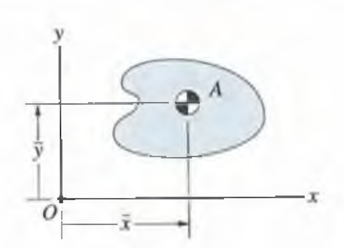
La divergencia y el rotacional de un campo vectorial $\mathbf{v} = v_r\,\mathbf{e}_r + v_\theta\,\mathbf{e}_\theta + v_z\,\mathbf{e}_z$ son

$$\nabla\cdot\mathbf{v} = \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z},$$

$$\nabla\times\mathbf{v} = \frac{1}{r}\begin{vmatrix} \mathbf{e}_r & r\mathbf{e}_\theta & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial\theta} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_r & rv_\theta & v_z \end{vmatrix}$$

Apéndice B Propiedades de áreas y líneas

B.1 Áreas



Las coordenadas del centroide del área A son

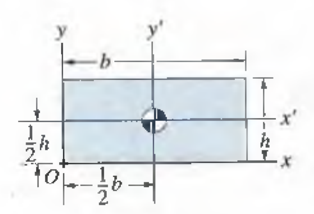
$$\bar{x} = \frac{\int_A x\,dA}{\int_A dA}, \qquad \bar{y} = \frac{\int_A y\,dA}{\int_A dA}.$$

El momento de inercia respecto al eje x, I_x, el momento de inercia respecto al eje y, I_y, y el producto de inercia I_{xy} son

$$I_x = \int_A y^2 dA, \qquad I_y = \int_A x^2 dA, \qquad I_{xy} = \int_A xy\,dA.$$

El momento polar de inercia respecto a O es

$$J_0 = \int_A r^2 dA = \int_A (x^2 + y^2) dA = I_x + I_y.$$

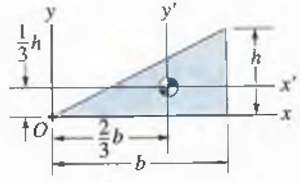


Área rectangular

Área $= bh$

$$I_x = \frac{1}{3}bh^3, \qquad I_y = \frac{1}{3}hb^3, \qquad I_{xy} = \frac{1}{4}b^2h^2$$

$$I_{x'} = \frac{1}{12}bh^3, \qquad I_{y'} = \frac{1}{12}hb^3, \qquad I_{x'y'} = 0$$

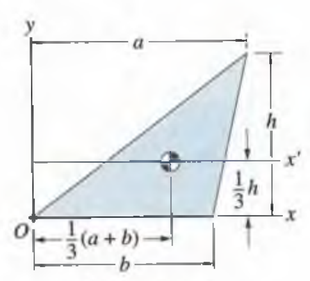


Área triangular

Área $= \frac{1}{2}bh$

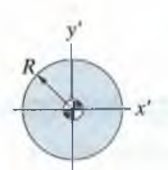
$$I_x = \frac{1}{12}bh^3, \qquad I_y = \frac{1}{4}hb^3, \qquad I_{xy} = \frac{1}{8}b^2h^2$$

$$I_{x'} = \frac{1}{36}bh^3, \qquad I_{y'} = \frac{1}{36}hb^3, \qquad I_{x'y'} = \frac{1}{72}b^2h^2$$



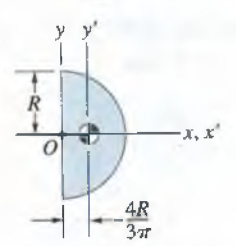
Área triangular

Área $= \frac{1}{2}bh \qquad I_x \; \frac{1}{12}bh^3, \qquad I_{x'} = \frac{1}{36}bh^3$



Área circular

Área $= \pi R^2 \qquad I_{x'} = I_{y'} = \frac{1}{4}\pi R^4, \qquad I_{x'y'} = 0$

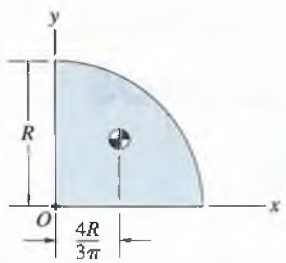


Área semicircular

Área $= \frac{1}{2}\pi R^2$

$$I_x = I_y = \frac{1}{8}\pi R^4, \qquad I_{xy} = 0$$

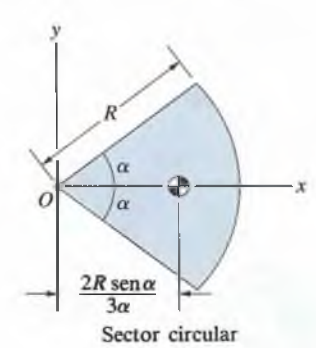
$$I_{x'} = \frac{1}{8}\pi R^4, \qquad I_{y'} = \left(\frac{\pi}{8} - \frac{8}{9\pi}\right) R^4, \qquad I_{x'y'} = 0$$



Área de un cuarto de círculo

$$\text{Área} = \frac{1}{4}\pi R^2$$

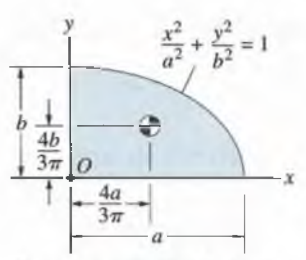
$$I_x = I_y = \frac{1}{16}\pi R^4, \qquad I_{xy} = \frac{1}{8}R^4$$



Sector circular

$$\text{Área} = \alpha R^2$$

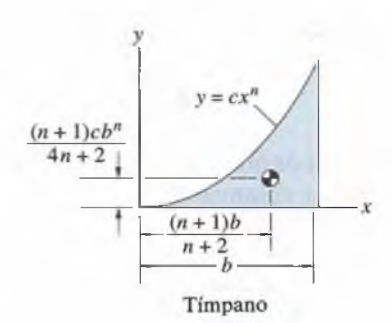
$$I_x = \frac{1}{4}R^4(\alpha - \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2\alpha),\ I_y = \frac{1}{4}R^4(\alpha + \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2\alpha),\ I_{xy} = 0$$



Área de un cuarto de elipse

$$\text{Área} = \frac{1}{4}\pi ab$$

$$I_x = \frac{1}{16}\pi ab^3, \qquad I_y = \frac{1}{16}\pi a^3 b, \qquad I_{xy} = \frac{1}{8}a^2 b^2$$



Tímpano

$$\text{Área} = \frac{cb^{n+1}}{n+1}$$

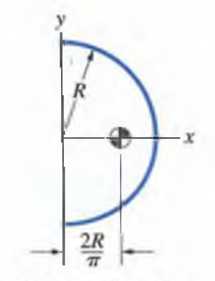
$$I_x = \frac{c^3 b^{3n+1}}{9n+3}, \qquad I_y = \frac{cb^{n+3}}{n+3}, \qquad I_{xy} = \frac{c^2 b^{2n+2}}{4n+4}$$

B.2 *Líneas*

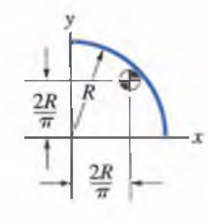
Barra esbelta

Las coordenadas del centroide de la línea L son

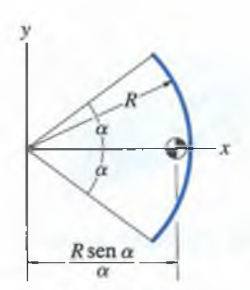
$$\bar{x} = \frac{\int_L x\,dL}{\int_L dL}, \qquad \bar{y} = \frac{\int_L y\,dL}{\int_L dL}, \qquad \bar{z} = \frac{\int_L z\,dL}{\int_L dL}.$$



Arco semicircular

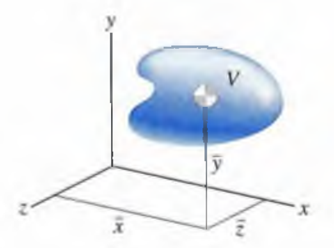


Arco de un cuarto de círculo



Arco circular

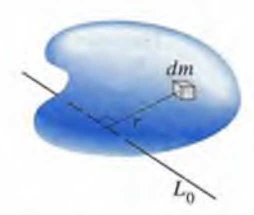
Apéndice C Propiedades de volúmenes y cuerpos homogéneos



Las coordenadas del centroide del volumen V son

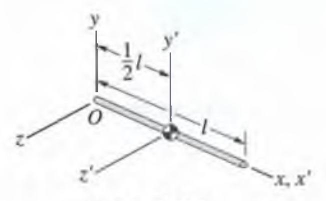
$$\bar{x} = \frac{\int_V x\,dV}{\int_V dV}, \qquad \bar{y} = \frac{\int_V y\,dV}{\int_V dV}, \qquad \bar{z} = \frac{\int_V z\,dV}{\int_V dV}.$$

(El centro de masa de un cuerpo homogéneo coincide con el centroide de su volumen.)



El momento de inercia de masa del cuerpo respecto al eje L_O es

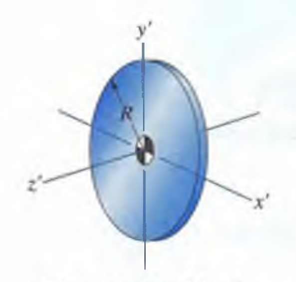
$$I_0 = \int_m r^2 dm.$$



Barra esbelta

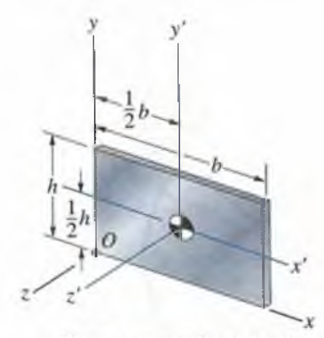
$$I_{(\text{eje } x)} = 0, \qquad I_{(\text{eje } y)} = I_{(\text{eje } z)} = \frac{1}{3}ml^2$$

$$I_{(\text{eje } x')} = 0, \qquad I_{(\text{eje } y')} = I_{(\text{eje } z')} = \frac{1}{12}ml^2$$



Placa circular delgada

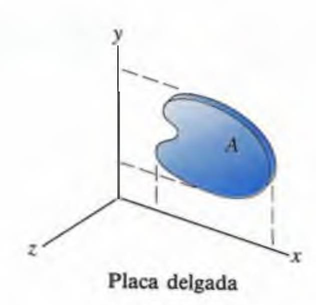
$$I_{(\text{eje } x')} = I_{(\text{eje } y')} = \frac{1}{4}mR^2, \qquad I_{(\text{eje } z')} = \frac{1}{2}mR^2$$



Placa rectangular delgada

$$I_{(\text{eje } x)} = \frac{1}{3}mh^2, \qquad I_{(\text{eje } y)} = \frac{1}{3}mb^2, \qquad I_{(\text{eje } z)} = \frac{1}{3}m(b^2+h^2)$$

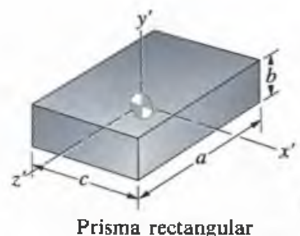
$$I_{(\text{eje } x')} = \frac{1}{12}mh^2, \qquad I_{(\text{eje } y')} = \frac{1}{12}mb^2, \qquad I_{(\text{eje } z')} = \frac{1}{12}m(b^2+h^2)$$



Placa delgada

$$I_{(\text{eje } x)} = \frac{m}{A} I_x^A, \qquad I_{(\text{eje } y)} = \frac{m}{A} I_y^A, \qquad I_{(\text{eje } z)} = I_{(\text{eje } x)} + I_{(\text{eje } y)}$$

(Los superíndices A denotan momentos de inercia del área transversal A de la placa.)

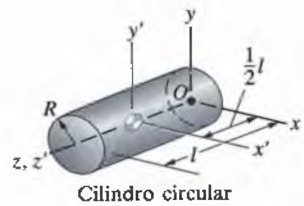


Prisma rectangular

Volumen $= abc$

$$I_{(\text{eje } x')} = \frac{1}{12} m(a^2 + b^2), \qquad I_{(\text{eje } y')} = \frac{1}{12} m(a^2 + c^2),$$

$$I_{(\text{eje } z')} = \frac{1}{12} m(b^2 + c^2)$$

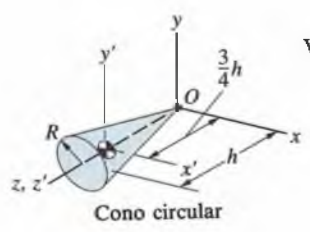


Cilindro circular

Volumen $= \pi R^2 l$

$$I_{(\text{eje } x)} = I_{(\text{eje } y)} = m\left(\frac{1}{3}l^2 + \frac{1}{4}R^2\right), \qquad I_{(\text{eje } z)} = \frac{1}{2} m R^2$$

$$I_{(\text{eje } x')} = I_{(\text{eje } y')} = m\left(\frac{1}{12}l^2 + \frac{1}{4}R^2\right), \qquad I_{(\text{eje } z')} = \frac{1}{2} m R^2$$

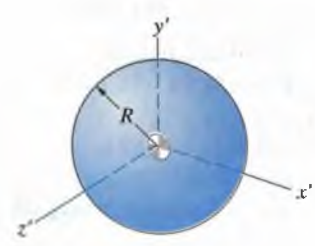


Cono circular

Volumen $= \frac{1}{3} \pi R^2 h$

$$I_{(\text{eje } x)} = I_{(\text{eje } y)} = m\left(\frac{3}{5}h^2 + \frac{3}{20}R^2\right), \qquad I_{(\text{eje } z)} = \frac{3}{10} m R^2$$

$$I_{(\text{eje } x')} = I_{(\text{eje } y')} = m\left(\frac{3}{80}h^2 + \frac{3}{20}R^2\right), \qquad I_{(\text{eje } z')} = \frac{3}{10} m R^2$$



Esfera

Volumen $= \frac{4}{3} \pi R^3$

$$I_{(\text{eje } x')} = I_{(\text{eje } y')} = I_{(\text{eje } z')} = \frac{2}{5} m R^2$$

Respuestas a los problemas pares

Capítulo 1

1.2 2.7183.

1.4 0.950.

1.6 (a) 36.7 pies/s; (b) 40.2 km/h.

1.8 (a) 5000 m/s; (b) 3.11 mi/s.

1.10 $g = 32.2$ pies/s.

1.12 0.310 m^2.

1.14 2.07×10^6 Pa.

1.16 $G = 3.44 \times 10^{-8}$ lb-pie^2/slug^2.

1.18 (a) Las unidades SI de T son kg-m^2/s^2; (b) $T = 73.8$ slug-pies^2/s^2.

1.20 51.2 lb.

1.22 (a) 491 N; (b) 81.0 N.

1.24 163 lb.

1.26 32,100 m.

1.28 4.45 N = 1 lb.

Capítulo 2

2.2 $|\mathbf{F}| = 177$ N, ángulo = 151°.

2.4 $|\mathbf{F}| = 176.8$ N, ángulo = 151.3°.

2.6 $|\mathbf{F}_B| = 132.5$ N.

2.8 $|\mathbf{F}_A| = 5.22$ kN, $|\mathbf{F}_B| = 3.57$ kN.

2.10 (a) $|\mathbf{r}_A + \mathbf{r}_B| = 70$ m. (b) $|\mathbf{r}_A + \mathbf{r}_B| = 50$ m.

2.12 $|\mathbf{F}_{BA} + \mathbf{F}_{BA}| = 917.7$ N.

2.14 $|\mathbf{r}| = 390.3$ m, $\alpha = 21.2°$.

2.18 $F_y = -90$ lb.

2.20 $|\mathbf{F}| = 447.2$ klb.

2.22 $V_x = 16$, $V_y = 12$ o $V_x = -16$, $V_y = -12$.

2.24 $\mathbf{F} = 56.4\,\mathbf{i} + 20.5\,\mathbf{j}$ (lb).

2.26 $\mathbf{r}_{AB} = -4\,\mathbf{i} - 3\,\mathbf{j}$ (m).

2.28 (a) $\mathbf{r}_{AB} = 48\,\mathbf{i} + 15\,\mathbf{j}$(pulg).(b)$\mathbf{r}_{BC} = -53\,\mathbf{i} + 5\,\mathbf{j}$ (pulg). (c) $|\mathbf{r}_{AB} + \mathbf{r}_{BC}| = 20.6$ pulg.

2.30 $x_B = 785.3$ m, $y_B = 907.3$ m o $x_B = 254.7$ m, $y_B = 1172.7$ m.

2.32 $\mathbf{e} = -0.781\,\mathbf{i} - 0.625\,\mathbf{j}$.

2.34 $\mathbf{e} = \frac{3}{5}\,\mathbf{i} - \frac{4}{5}\,\mathbf{j}$.

2.36 $\mathbf{r}_{AB} = -1416\,\mathbf{i} + 909\,\mathbf{j}$ (pies).

2.38 (a) $\mathbf{r}_M = (57 \times 10^6)\,\mathbf{i}$ (km), $\mathbf{r}_V = -(82.7 \times 10^6)\,\mathbf{i} - (69.4 \times 10^6)\,\mathbf{j}$ (km), and $\mathbf{r}_E = -(51.3 \times 10^6)\,\mathbf{i} + (141.0 \times 10^6)\,\mathbf{j}$ (km). (b) La distancia de la Tierra la Mercurio es 177.8×10^6 (km), y la distancia de la Tierra a Venus es 212.7×10^6 km.

2.40 $|\mathbf{F}_{BA} + \mathbf{F}_{BC}| = 917.7$ N.

2.42 $|\mathbf{F}_A| = 1720$ lb, $\alpha = 33.3°$.

2.44 $82.8° \leq \alpha \leq 277.2°$.

2.46 $|\mathbf{F}_A| = 10$ kN, $|\mathbf{F}_D| = 8.66$ kN.

2.48 $|\mathbf{L}| = 216.1$ lb, $|\mathbf{D}| = 78.7$ lb.

2.50 $|\mathbf{F}_A| = 68.2$ kN.

2.52 $|\mathbf{F}_{AC}| = 2.11$ kN, $|\mathbf{F}_{AD}| = 2.76$ kN.

2.54 $\mathbf{r} = (0.814s - 6)\,\mathbf{i} + (0.581s + 1)\,\mathbf{j}$ (m).

2.56 $|\mathbf{F}| = 110$ N.

2.58 $U_x = -3.61$, $U_y = 7.22$, $U_z = 28.89$ or $U_x = 3.61$, $U_y = -7.22$, $U_z = -28.89$.

2.60 (a) $|\mathbf{U}| = 7$, $|\mathbf{V}| = 13$. (b) $|3\mathbf{U} + 2\mathbf{V}| = 27.5$.

2.62 $\theta_x = 56.9°$, $\theta_y = 129.5°$, $\theta_z = 56.9°$.

2.64 $\mathbf{F} = -0.5\,\mathbf{i} + 0.2\,\mathbf{j} + 0.843\,\mathbf{k}$.

2.66 (a) 11pie. (b) $\cos\theta_x = -0.545$, $\cos\theta_y = 0.818$, $\cos\theta_z = 0.182$.

2.68 (a) 5.39 N. (b) $0.557\,\mathbf{i} - 0.743\,\mathbf{j} - 0.371\,\mathbf{k}$.

2.70 $\mathbf{F} = 40\,\mathbf{i} + 40\,\mathbf{j} - 70\,\mathbf{k}$ (kN).

2.72 $|\mathbf{r}_{AB}| = 16.2$ m. (b) $\cos\theta_x = 0.615$, $\cos\theta_y = -0.492$, $\cos\theta_z = -0.615$.

2.74 29,100 pies.

2.76 $\mathbf{r} = 70.7\,\mathbf{i} + 61.2\,\mathbf{j} + 35.4\,\mathbf{k}$ (pulg).

2.78 $\mathbf{r}_{OP} = R_E(0.612\,\mathbf{i} + 0.707\,\mathbf{j} + 0.354\,\mathbf{k})$.

2.80 $\mathbf{F} = 545\,\mathbf{i} + 636\,\mathbf{j} - 545\,\mathbf{k}$ (N).

2.82 259 lb.

2.84 $|\mathbf{F}_{AC}| = 1116$ N, $|\mathbf{F}_{AD}| = 910$ N.

2.86 $\mathbf{T} = -15.4\,\mathbf{i} + 27.0\,\mathbf{j} + 7.7\,\mathbf{k}$ (lb).

2.88 $\mathbf{U} \cdot \mathbf{V} = -300$.

2.90 -250 (lb-pie).

2.92 $U_x = -12$.

2.96 81.6°.

2.98 (a) $F_x\,\mathbf{i}$. (b) $\frac{1}{3}(F_x + F_y + F_z)(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})$.

2.100 (a) 42.5°. (b) $-423\,\mathbf{j} + 604\,\mathbf{k}$ (lb).

2.102 8.25 pies.

2.104 $\mathbf{U} \times \mathbf{V} = -20\,\mathbf{i} - 6\,\mathbf{j} - 18\,\mathbf{k}$.

2.106 $\mathbf{r} \times \mathbf{F} = -80\,\mathbf{i} + 120\,\mathbf{j} - 40\,\mathbf{k}$ (N-m).

2.108 (a) $\mathbf{U} \times \mathbf{V} = \mathbf{0}$. (b) Son paralelos.

2.110 (a), (c) $\mathbf{U} \times \mathbf{V} = -51.8\,\mathbf{k}$. (b), (d) $\mathbf{V} \times \mathbf{U} = 51.8\,\mathbf{k}$.

2.114 (a) $\mathbf{r}_{OA} \times \mathbf{r}_{OB} = -4\,\mathbf{i} + 36\,\mathbf{j} + 32\,\mathbf{k}$ (m^2). (b) $-0.083\,\mathbf{i} + 0.745\,\mathbf{j} + 0.662\,\mathbf{k}$, or $0.083\,\mathbf{i} - 0.745\,\mathbf{j} - 0.662\,\mathbf{k}$.

2.116 $\mathbf{r}_{AB} \times \mathbf{F} = -2400\,\mathbf{i} + 9600\,\mathbf{j} + 7200\,\mathbf{k}$ (lb-pie).

2.118 $x_B = 2.81$ m, $y_B = 6.75$ m, $z_B = 3.75$ m.

2.120 $\mathbf{U} \cdot (\mathbf{V} \times \mathbf{W}) = -4$.

2.124 $U_y = -2$.

2.126 $|\mathbf{A}| = 1109.6$ lb, $\alpha = 29.7°$.

2.128 $|\mathbf{E}| = 313.0$ lb, $|\mathbf{F}| = 140$ lb.

2.130 $\mathbf{e}_{AB} = 0.625\,\mathbf{i} - 0.469\,\mathbf{j} - 0.625\,\mathbf{k}$.

2.132 $\mathbf{F}_P = 8.78\,\mathbf{i} - 6.59\,\mathbf{j} - 8.78\,\mathbf{k}$ (lb).

2.134 $\mathbf{r}_{BA} \times \mathbf{F} = -70\,\mathbf{i} + 40\,\mathbf{j} - 100\,\mathbf{k}$ (lb-pie).

2.136 (a), (b) $685.7\,\mathbf{i} - 485.7\,\mathbf{j} - 514.3\,\mathbf{k}$ (lb-pie).

2.138 $\mathbf{F}_A = 18.2\,\mathbf{i} + 19.9\,\mathbf{j} + 15.3\,\mathbf{k}$ (N), $\mathbf{F}_B = -7.76\,\mathbf{i} + 26.9\,\mathbf{j} + 13.4\,\mathbf{k}$ (N).

2.140 $\mathbf{F}_P = 1.29\,\mathbf{i} - 3.86\,\mathbf{j} + 2.57\,\mathbf{k}$ (kN), $\mathbf{F}_n = -1.29\,\mathbf{i} - 2.14\,\mathbf{j} - 2.57\,\mathbf{k}$ (kN).

2.142 $\mathbf{r}_{AG} \times \mathbf{W} = -16.4\,\mathbf{i} - 82.4\,\mathbf{k}$ (N-m).

Capítulo 3

3.2 $\mathbf{F}_2 = 10\,\mathbf{i} - 5\,\mathbf{j}$ (klb), $\mathbf{F}_3 = -50\,\mathbf{i} - 25\,\mathbf{j}$ (klb).

3.4 (a) $F_3 = 50$ lb. (b) $\alpha = 60°$.

3.6 $T = 763.2$ N, $M = 874.7$ N.

3.8 $T_A = T_C = 72.7$ lb, $T_B = 54.5$ lb.

3.10 Fuerza normal = 196 907 N, fuerza de fricción = 707 N.

3.12 $\alpha = 31.0°$.

3.14 (a) 254 lb. (b) 41.8°.

3.16 150 lb.

3.18 116.1 N.

3.20 (a), (b) 43.6 lb.

3.22 53.2 lb.

3.24 $T_{AB} = 1414$ lb, $T_{AC} = 1000$ lb.

3.26 No. La tensión en los cables BD y CE sería de 4.14 kN.

3.28 Tensión en el cable superior = $0.828W$; tensión en el cable inferior = $0.132W$.

3.30 $T_{AB} = 0.502T$, $T_{AC} = 0.822T$.

3.32 $m = 4.45$ kg.

3.34 21.9 lb.

3.36 $T_{AB} = 687.9$ lb.

3.38 AB: 64.0 kN; BC: 61.0 kN.

3.40 (a) 196 N. (b) $\alpha = 41.8°$.

3.42 (b) Superficie izquierda: 36.6 lb; superficie derecha: 25.9 lb.

3.44 202 N.

3.46 $D = 282$ N, la tensión = 825 N.

3.48 $x = \frac{1}{2}(b - h\cot 30°)$, $y = -\frac{1}{2}(b\tan 30° - h)$.

3.52 $D = 7878$ lb, $L = 28{,}611$ lb.

3.54 (a) $\gamma = -14.04°$. (b) 4 km.

3.56 $T_{AB} = 780$ N, $T_{AC} = 1976$ N, y $T_{AD} = 2568$ N.

3.58 $T_{AC} = 20.6$ lb, $T_{AD} = 21.4$ lb, y $T_{AE} = 11.7$ lb.

3.60 $T_{AB} = 98.2$ N, $T_{AC} = 155.0$ N, $T_{AD} = 177.3$ N.

3.62 12.3 lb.

3.64 $T_{AB} = 420.5$ N, $T_{AC} = 532.7$ N, magnitud = 969.3 N.

3.66 (a) La tensión = 137 lb. (b) La fuerza ejercida por la barra = 94.0i + 34.2j - 75.0k (lb).

3.68 18.0 pies.

3.70 (b) $b < 10.0$ m o $b > 30.0$ m.

3.72 $\alpha = 62.7°$.

3.74 $h = 3.08$ m.

3.76 $W = 25.0$ lb.

3.78 $T_{AB} = 51.8$ lb, $N = 73.2$ lb.

3.80 $F = 162.0$ N.

3.82 $T_{OB} = 3.60$ kN, $T_{OC} = 1.94$ kN, $T_{OD} = 2.02$ kN.

3.84 $T = (mgL)/(R + h)$.

3.86 $T_{AB} = 780.3$ lb, $T_{AC} = 906.5$ lb, $T_{AD} = 844.7$ lb.

3.88 $T_{AB} = 1.54$ lb, $T_{AC} = 1.85$ lb.

Capítulo 4

4.2 (a) −300 lb-pie. (b) Cero. (c) 200 lb-pie.

4.4 −40.5 N-m.

4.6 (a) 1 m. (b) 30° o 150°.

4.8 $F = 4$ klb.

4.10 (a) 1 m. (b) 53.1° o 180°.

4.12 229.3 lb-pie.

4.14 (a) −24.9 lb-pie. (b) −50.9 lb-pie.

4.16 (a)–(c) Cero.

4.18 $F_1 = 30$ kN, $F_2 = 50$ kN.

4.20 (a) $F_A = 24.6$ N, $F_B = 55.4$ N. (b) Cero.

4.22 (a) −5600 lb-pie. (b) −600 lb-pie.

4.24 1757.9 lb-pie.

4.26 (a) $A_x = 18.1$ kN, $A_y = -29.8$ kN, y $B = -20.4$ kN. (b) Cero.

4.28 (a) $A_x = 300$ lb, $A_y = 240$ lb, y $B = 280$ lb. (b) Cero.

4.30 185.7 kg.

4.32 −22.3 lb-pie.

4.34 470.5 N.

4.36 617.2 kN-m.

4.38 −48.4 lb-pie.

4.40 (a) 480 N-m. (b)–(d) $480\,\mathbf{k}$ (N-m).

4.42 (a) $800\,\mathbf{k}$ (kN-m). (b) $-400\,\mathbf{k}$ (kN-m).

4.44 $\mathbf{F} = 20\,\mathbf{i} + 40\,\mathbf{j}$ (N).

4.46 (a), (b) Cero.

4.48 (a) 1273 N-m. (b) $\mathbf{M}_A = 900\,\mathbf{i} + 900\,\mathbf{j}$ (N-m). (c) 1273 N-m.

4.50 $450\,\mathbf{i} - 100\,\mathbf{j} - 200\,\mathbf{k}$ (lb-pie).

4.52 $\mathbf{F} = 40\,\mathbf{i} + 40\,\mathbf{j} + 70\,\mathbf{k}$ (N) o $\mathbf{F} = -40\,\mathbf{i} - 40\,\mathbf{j} - 70\,\mathbf{k}$ (N).

4.54 58.0 kN.

4.56 $|\mathbf{F}| = 363.8$ lb.

4.58 $\mathbf{M}_0 = -rF\,\text{sen}\,\alpha\,\mathbf{i} - (h + r\cos\alpha)F\,\mathbf{k}$.

4.60 (a) $667\mathbf{i} - 2667\mathbf{j} - 4000\,\mathbf{k}$ (N-m). (b) $-667\mathbf{i} + 2667\mathbf{j} + 4000\,\mathbf{k}$ (N-m). (c) 9.71 m.

4.62 $T = 395.8$ lb.

4.64 $T_{AC} = 2.23$ kN, $T_{AD} = 2.43$ kN.

4.66 $T_{AB} = 632.1$ lb, $T_{AC} = 330.5$ lb.

4.68 $-16.4\mathbf{i} - 111.9\mathbf{k}$ (N-m).

4.70 (a) $80\mathbf{i}$ (N-m). (b) $-140\mathbf{j}$ (N-m). (c) Cero.

4.72 (a) Cero. (b) $2.7\mathbf{k}$ (kN-m).

4.74 $-300\mathbf{i}$ (lb-pie).

4.76 $\mathbf{F} = 80\mathbf{i} + 80\mathbf{j} + 40\mathbf{k}$ (lb).

4.78 $\mathbf{M}_{AB} = -76.1\mathbf{i} - 95.1\mathbf{j}$ (N-m).

4.80 $\mathbf{M}_{AO} = 119.1\mathbf{j} + 79.4\mathbf{k}$ (N-m).

4.82 $215.0\mathbf{j}$ (N-m).

4.84 $\mathbf{M}_{(\text{eje } x)'} = 44\mathbf{i}$ (N-m).

4.86 $-338\mathbf{j}$ (lb-pie).

4.88 $|\mathbf{F}| = 13$ lb.

4.90 $\cos\theta_x = 0.800$, $\cos\theta_y = 0.536$, y $\cos\theta_z = 0.272$.

4.92 1 N-m.

4.94 $123.8\mathbf{k}$ (lb-pie).

4.96 (a), (b) $40\mathbf{k}$ (lb-pie).

4.98 (a) $b = 3.14$ m. (b) $-90\mathbf{k}$ (N-m).

4.100 (a), (b) $-400\mathbf{k}$ (N-m).

4.102 40 lb-pie horario, o $-40\mathbf{k}$ (lb-pie).

4.104 330 N-m antihorario, o $330\mathbf{k}$ (N-m).

4.106 (a) $-5\mathbf{i} - \mathbf{j} - 17\mathbf{k}$ (kN-m). (b) 4.74 m.

4.108 356 lb-pie.

4.110 2 kN.

4.112 Sí.

4.114 Los sistemas 1, 2 y 4 son equivalentes.

4.118 $F = 264.6$ N.

4.120 $F = 70$ lb, $M = 130$ lb-pulg.

4.122 (a) $\mathbf{F} = -10\mathbf{j}$ (lb), $M = -10$ lb-pie. (b) $D = 1$ pie.

4.124 (a) $A_x = 0$, $A_y = 20$ lb, $B = 80$ lb. (b) $\mathbf{F} = 100\mathbf{j}$ (lb), $M = -1120$ lb-pulg.

4.126 (a) $A_x = 12$ klb, $A_y = 10$ klb, $B = -10$ klb. (b) $\mathbf{F} = -12\mathbf{i}$ (klb), interseca en $y = 5$ pies. (c) Ambos son cero.

4.128 (a) $\mathbf{F} = 680\mathbf{i}$ (kN), $y = -0.0588$ m. (b) 165.7 kN.

4.130 $\mathbf{F} = 100\mathbf{j}$ (lb), $\mathbf{M} = 0$.

4.132 (a) $\mathbf{F} = 919.6\mathbf{i} - 389.6\mathbf{j}$ (N), $M = -419.0$ N-m. (b) La línea de acción interseca en $y = 456$ mm.

4.134 $\mathbf{F} = 800\mathbf{j}$ (lb), interseca en $x = 7.5$ pulg.

4.136 (a) $-360\mathbf{k}$ (lb-pulg). (b) $-36\mathbf{j}$ (lb-pulg). (c) $\mathbf{F} = 10\mathbf{i} - 30\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ (lb), $\mathbf{M} = -36\mathbf{j} - 360\mathbf{k}$ (lb-pie).

4.138 (a) $\mathbf{F} = 600\mathbf{i}$ (lb), $\mathbf{M} = 1400\mathbf{j} - 1800\mathbf{k}$(lb-pie).(b) $\mathbf{F} = 600\mathbf{i}$ (lb); la línea de acción interseca en $y = 3$ pie $z = 2.33$ pies.

4.140 $\mathbf{F} = 100\mathbf{j} + 80\mathbf{k}$ (N), $\mathbf{M} = 240\mathbf{j} - 300\mathbf{k}$ (N-m).

4.142 (a) $\mathbf{F} = 0$, $\mathbf{M} = rA\,\mathbf{i}$. (b) $\mathbf{F}' = 0$, $\mathbf{M}' = rA\,\mathbf{i}$.

4.144 (a) $\mathbf{F} = 0$, $\mathbf{M} = 4.60\mathbf{i} + 1.86\mathbf{j} - 3.46\mathbf{k}$ (kN-m). (b) 6.05 kN-m.

4.146 $\mathbf{F} = -20\mathbf{i}+20\mathbf{j}+10\mathbf{k}$ (lb), $\mathbf{M} = 50\mathbf{i}+250\mathbf{j}+100\mathbf{k}$ (lb-pulg).

4.148 (a) $\mathbf{F} = 28\mathbf{k}$ (klb), $\mathbf{M} = 96\mathbf{i} - 192\mathbf{j}$ (pies-klb). (b) $x = 6.86$ pies, $y = 3.43$ pies.

4.150 $\mathbf{F} = 100\mathbf{i} + 20\mathbf{j} - 20\mathbf{k}$ (N), $\mathbf{M} = -142.9\mathbf{i} + 405.7\mathbf{j} - 280.0\mathbf{k}$ (N-m).

4.152 $\mathbf{M}_t = 0$, la línea de acción interseca en $y = 0$, $z = 2$ pies.

4.154 $x = 2.41$ m, $y = 3.80$ m.

4.156 $\mathbf{F} = 40.8\mathbf{i} + 40.8\mathbf{j} + 81.6\mathbf{k}$ (N), $\mathbf{M} = -179.6\mathbf{i} + 391.9\mathbf{j} - 32.7\mathbf{k}$ (N-m).

4.158 (a) $320\mathbf{i}$ (lb-pulg). (b) $\mathbf{F} = -20\mathbf{k}$ (lb), $\mathbf{M} = 320\mathbf{i} + 660\mathbf{j}$ (lb-pulg). (c) $\mathbf{M}_t = 0$, $x = 33$ pulg, $y = -16$ pulg.

4.160 $k = 123.5$ lb/pies.

4.162 $d = 13.0$ pies, el momento es $265.4\mathbf{k}$ (lb-pie).

4.164 $T_{AB} = 155.4$ N, $T_{CD} = 445.3$ N.

4.166 (a) 160 N-m. (b) $160\mathbf{k}$ (N-m).

4.168 No. El momento es mgR sen α en sentido antihorario, donde α es el ángulo horario.

4.170 (a) -76.2 N-m. (b) -66.3 N-m.

4.172 670.8 lb.

4.174 $-228.1\mathbf{i} - 68.4\mathbf{k}$ (N-m).

4.176 $\mathbf{M}_{(\text{eje } x)} = -153\mathbf{i}$ (lb-pie).

4.178 (a) $T_{AB} = T_{CD} = 173.2$ lb.
(b) $\mathbf{F} = 300\mathbf{j}$ (lb), $x = 4$ pies.

4.180 $\mathbf{F} = -20\mathbf{i} + 70\mathbf{j}$ (N), $M = 22$ N-m.

4.182 $\mathbf{F}' = -100\mathbf{i} + 40\mathbf{j} + 30\mathbf{k}$ (lb), $\mathbf{M} = -80\mathbf{i} + 200\mathbf{k}$ (lb-pulg).

4.184 $\mathbf{F} = 1165.7\mathbf{i} + 565.7\mathbf{j}$ (N), $y = 13.9$ m.

4.186 $\mathbf{F} = 190\mathbf{j}$ (N), $\mathbf{M} = -98\mathbf{i} + 184\mathbf{k}$ (N-m).

4.188 $\mathbf{F} = -0.364\mathbf{i} + 4.908\mathbf{j} + 1.090\mathbf{k}$ (kN), $\mathbf{M} = -0.131\mathbf{i} - 0.044\mathbf{j} + 1.112\mathbf{k}$ (kN-m).

Capítulo 5

5.4 (b) $A_x = 0$, $A_y = -500$ lb, $B = 1000$ lb.

5.6 (b) $A_x = 0$, $A_y = -2.67$ kN, $B = 3.89$ kN.

5.8 (b) $A_x = 0$, $A_y = 5$ kN, $B = 5$ kN.

5.10 (b) $A = 100$ lb, $B = 200$ lb.

5.12 (b) $A_x = 1.15$ kN, $A_y = 0$, $B = 2.31$ kN.

5.14 Cada mano, 65.1 lb. Cada pie, 22.4 lb.

5.16 (b) $A_x = 0$ lb, $A_y = -1000$ lb, $M_A = -12{,}800$ lb-pie.

5.18 849 lb.

5.20 $R_x = 0$, $R_y = -841$ lb, $M_R = -6496$ lb-pie.

5.22 $R = 12.5$ lb, $B_x = 11.3$ lb, $B_y = 15.3$ lb.

5.24 (a) $A = 53.8$ lb, $B = 46.2$ lb. (b) $F = 21.2$ lb.

5.26 $A = 9211$ N, $B_x = 0$, $B_y = 789$ N.

5.28 $T = 4.71$ lb.

5.32 La tensión es 50 lb, $C_x = -43.3$ lb, $C_y = 25$ lb.

5.34 $A_x = 0$, $A_y = 1.5F$, $B = 2.5F$.

5.36 $A_x = -200$ lb, $A_y = -100$ lb, $M_A = 1600$ lb-pie.

5.38 $0.354W$.

5.40 $B_x = -700$ N, $B_y = -800$ N, $A = 700$ N.

5.42 Tensión = 1200 N, $A_x = 1039$ N, $A_y = 600$ N.

5.44 $A_x = 0$, $A_y = 200$ lb, $M_A = 900$ lb-pie.

5.46 $A_x = 57.7$ lb, $A_y = -13.3$ lb, $B = 15.3$ lb.

5.48 2500 lb.

5.50 $2 \le x \le 4$ pies.

5.54 $W_2 = 2483.6$ lb, $A_x = -2034.4$ lb, $A_y = 2424.5$ lb.

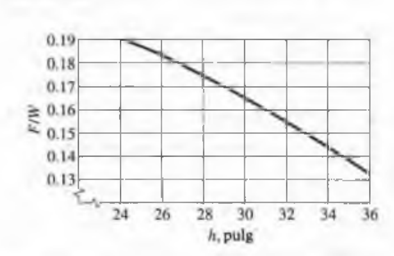
5.56 $W = 46.2$ N, $A_x = 22.3$ N, $A_y = 61.7$ N.

5.58 $F = 44.5$ lb, $A_x = 25.3$ lb, $A_y = -1.9$ lb.

5.66 (1) y (2) están impropiamente soportados. Para (3), las reacciones son $A = F/2$, $B = F/2$, $C = F$.

5.68 $W = 131.5$ lb.

5.70



5.72 $A_x = 0$, $A_y = 360$ N, $A_z = 0$, $M_x^A = -16.4$ N-m, $M_y^A = 0$, $M_z^A = -111.9$ N-m.

5.74 $T_{BC} = 20.3$ kN.

5.76 $|\mathbf{F}|_{\text{máx}} = 2147$ lb.

5.78 $T_A = 54.7$ lb, $T_B = 22.7$ lb, $T_C = 47.7$ lb.

5.80 La fuerza es 800**j** lb, y la línea de acción corta la línea central en $z = 1.5$ pies.

5.82 (b) $A_x = -0.74$ kN, $A_y = 1$ kN, $A_z = -0.64$ kN, $B_x = 0.74$ kN, $B_z = 0.64$ kN.

5.84 $F_y = 40.5$ lb.

5.86 $T_{BD} = 1.47$ kN, $T_{BE} = 1.87$ kN, $A_x = 0$, $A_y = 4.24$ kN, $A_z = 0$.

5.88 La tensión es 60 N, $B_x = -10$ N, $B_y = 90$ N, $B_z = 10$ N, $M_y^B = 1$ N-m, $M_z^B = -3$ N-m.

5.90 $T_{CD} = 6.53$ kN.

5.92 10 klb

5.94 $T = 81.6$ lb.

5.96 $T_{BD} = 200$ lb.

5.98 $T_{AB} = 488$ lb, $T_{CD} = 373$ lb, la reacción es $\mathbf{i} + 823\mathbf{j} - 87\mathbf{k}$ lb.

5.100 $\alpha = 52.4°$.

5.102 Tensión = 33.3 lb; la magnitud de la reacción es de 44.1 lb.

5.104 $\alpha = 73.9°$, la magnitud de la reacción en A es de 4.32 kN y en B es de 1.66 kN.

5.106 (a) No, por el par de 3 kN-m. (b) La magnitud en A = 7.88 kN; la magnitud en B = 6.66 kN. (c) No.

5.110 $\alpha = 75.96°$, $30.96°$, $12.53°$, $4.40°$, y cero.

5.112 $h = 2.46$ m, $A_x = 2.03$ kN, $A_y = 0.34$ kN.

5.114 $\alpha = 37.1°$.

5.116 (b) $N_A = 14.2$ kN, $N_B = 33.7$ kN.

5.118 (b) Fuerza sobre el clavo = 55 lb, fuerza normal = 50.77 lb, fuerza de fricción = 9.06 lb.

5.120 (a) Hay cuatro reacciones desconocidas y tres ecuaciones de equilibrio. (b) $A_x = -50$ lb, $B_x = 50$ lb.

5.122 $A = 500$ N, $B_x = 0$, $B_y = -800$ N.

5.124 $A = 727.1$ lb, $H_x = 225.2$ lb, $H_y = 113.3$ lb.

5.126 $C = 63.09$ kN, $A_x = 1.97$ kN, $A_y = -23.82$ kN

5.128 La fuerza es de 800 N hacia arriba, y su línea de acción pasa por el punto medio de la placa.

5.130 $\alpha = 90°$, $T_{BC} = W/2$, $A = W/2$.

Capítulo 6

6.2 (a) $A = 13.3$ kN, $B_x = -13.3$ kN, $B_y = 10$ kN. (b) AB: cero; BC: 16.7 kN (T); AC: 13.3 kN (C).

6.4 (a) $B = 82.9$ N, $C_x = 40$ N, $C_y = -22.9$ N. (b) AB: 82.9 N (C); BC: cero; AC: 46.1 N (T).

6.6 AB: 429 lb (C); AC: 343 lb (T); BC: 600 lb (T); BD: 485 lb (C); CD: 343 lb (T).

6.8 AB: 16.7 kN (T); AC: 13.3 kN (C); BC: 20 kN (C); BD: 16.7 kN (T); CD: 13.3 kN (C).

6.10 (a) Howe, $2F$ en las barras GH y HI. (b) Son las mismas: $2.12\,F$ en las barras AB y DE.

6.12 AB: 150 lb (T); BC: cero; BD: 75 lb (T).

6.14 $F = 5.09$ kN.

6.16 AC: 60 lb (T); CD: 30 lb (C); DG: 134.2 lb (T).

6.18 1.56 kN.

6.20 AB: 375 lb (C); AC: 625 lb (T); BC: 300 lb (T).

6.22 AB: 2524 lb (C); BC: 2163 lb (C); CD: 1683 lb (C).

6.30 CD: 300 kN (T); IJ: 400 kN (C).

6.32 EG: 400 N (T); EF: 100 N (C); DF: 320 N (C).

6.34 (a),(b) 3 klb (C).

6.36 28.3 klb (T).

6.38 CE: 60 klb (T); DE: zero; DF: 60 klb (C).

6.40 2.50 kN (C).

6.42 3.33 klb (C).

6.44 DH: 25 kN (T); GJ: 25 kN (C).

6.46 (a) 1158 lb (C).

6.48 IL: 16 kN (C). KM: 24 kN (T).

6.52 AD: 4.72 kN (C); BD: 4.16 kN (C); CD: 4.85 kN (C).

6.54 AB: 1.80 kN (T); BC: 1.37 kN (T); BD: 4.16 kN (C).

6.56 AB: 379.4 lb (C); AC: 665.2 lb (C); AD: 159.6 lb (C).

6.58 5.59 kN (C) en cada elemento.

6.60 (c) $A_x = 0$, $A_y = 350$ N, $M_A = 350$ N-m, $B_x = 0$, $B_y = -350$ N.

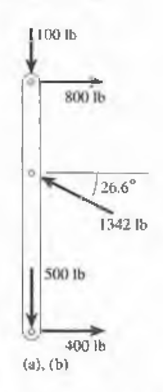
6.62 $A_x = 0$, $A_y = 100$ lb, $M_A = 600$ lb-pie$C = 100$ lb.

6.64 $F = 50$ kN.

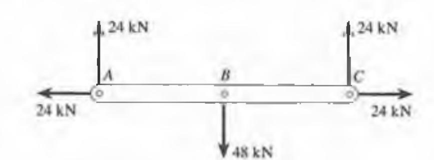
6.66 La fuerza de elevación máxima es de 8.94 kN. La fuerza axial es de 25.30 kN.

6.68 $A = 72.3$ lb, $D_x = 204.0$ lb, $D_y = -216.8$ lb.

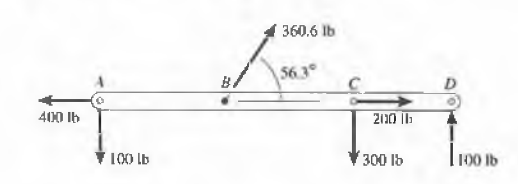
6.70 $A_x = 400$ lb, $A_y = -500$ lb, $B_x = -1200$ lb, $B_y = 600$ lb, $C_x = 400$ lb, $C_y = -100$ lb.



6.72 $A_x = -24$ kN, $A_y = 24$ kN, $B = -48$ kN, $C_x = 24$ kN, $C_y = 36$ kN.



6.74 $A_x = -400$ lb, $A_y = -100$ lb, tensión $= 360.6$ lb, $C_x = 200$ lb, $C_y = -300$ lb, $D = 100$ lb.



6.76 $B_x = -400$ lb, $B_y = -300$ lb, $C_x = 400$ lb, $C_y = 200$ lb, $D_x = 0$, $D_y = 100$ lb.

6.78 $A_x = -310$ lb, $A_y = -35$ lb, $B_x = 80$ lb, $B_y = -80$ lb, $C_x = 310$ lb, $C_y = 195$ lb, $D_x = -80$ lb, $D_y = -80$ lb.

6.80 $A_x = -800$ N, $A_y = -600$ N, $B_x = 0$, $B_y = -600$ N, $C_x = 800$ N, $C_y = 1200$ N.

6.84 $A_x = -22$ lb, $A_y = 15$ lb, $C_x = -14$ lb, $C_y = 3$ lb.

6.86 300 lb (C).

6.88 110 klb.

6.90 538.5 N.

6.92 Fuerza axial = 4kN a compresión, reacción en $A = 4.31$kN.

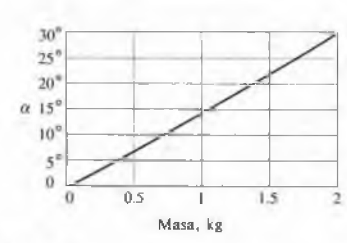
6.94 $T_{BC} = 1364$ N, $T_{DF} = 761$ N.

6.96 9.17 kN.

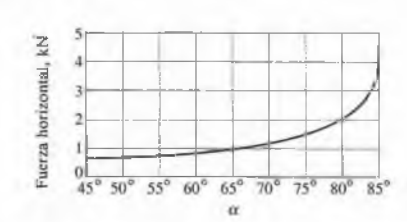
6.98 $A_x = -8$ kN, $A_y = 2$ kN, fuerza axial $= 8$ kN.

6.100 $F = 0.142$ N, $D_x = 1.471$ N, $D_y = 2.5$ N, $I_x = -0.664$ N, $I_y = 0$, $M_x = -0.806$ N, $M_y = 0.142$ N.

6.102 (b) 13.9°.



6.104 (b) $\alpha = 79.49°$.



6.106 $h = 0.392$ m.

6.108 At $\alpha_A = 78°$, $M_A/M_B = -0.603$, y en $\alpha_A = 180°$, $M_A/M_B = 0.750$.

6.110 BC: 120 kN (C); BG: 42.4 kN (T); FG: 90 kN (T).

6.112 AB: 125 lb (C); AC: cero; BC: 187.5 lb (T); BD: 225.3 lb (C). CD: 125 lb (C); CE: 225.3 lb (T).

6.114 AC: 480 N (T); CD: 240 N (C); CF: 300 N (T).

6.116 Tensión: barra AC, 480 lb (T). Compresión: barra BD, 632.5 lb (C).

6.118 182.3 kg.

6.120 $F = 7.92$ klb; BG: 19.35 klb (T); EF: 12.60 klb (C).

6.122 $A_x = -52.33$ kN, $A_y = -43.09$ kN, $E_x = 0.81$ kN, $E_y = -14.86$ kN.

Capítulo 7

7.2 $\bar{y} = \frac{3}{10}$.

7.4 $\bar{x} = 2.08$.

7.6 $\bar{x} = 0.711$ pies, $\bar{y} = 0.584$.

7.8 $\bar{x} = \frac{3}{8}$, $\bar{y} = \frac{3}{5}$.

7.10 $A = 2666.7$ pies², $\bar{x} = 56.25$ pies, $\bar{y} = 14$ pies.

7.12 $\bar{y} = 3.6$.

7.14 $\bar{y} = -7.6$.

7.16 $\bar{x} = 2.27$.

7.18 $a = 0.656$, $b = 6.56 \times 10^{-5}$ m^{-2}.

7.20 $\bar{x} = \bar{y} = 4R/3\pi$.

7.22 $\bar{x} = \frac{2}{3}h$, $\bar{y} = 0$, $\bar{z} = 0$.

7.24 $V = 0.032\ \text{m}^3$, $\bar{x} = 0.45$ m, $\bar{y} = 0$, $\bar{z} = 0$.

7.26 $\bar{x} = 0.675R$, $\bar{y} = 0$, $\bar{z} = 0$.

7.28 $\bar{x} = h(\frac{2}{3}R + \frac{1}{4}a)/(R + \frac{1}{3}a)$, $\bar{y} = 0$, $\bar{z} = 0$.

7.30 $\bar{x} = 3.24$.

7.32 $\bar{x} = R\,\text{sen}\alpha/\alpha$, $\bar{y} = R(1 - \cos\alpha)/\alpha$.

7.34 AD: 2.85 kN (T); CE: 2.96 kN (T).

7.36 $A = 1518$ lb, $B = 1414$ lb.

7.38 $\bar{x} = 56.4$ cm, $\bar{y} = 27.3$ cm.

7.40 $\bar{x} = 9.90$ pulg, $\bar{y} = 0$.

7.42 $\bar{x} = -1.12$ in., $\bar{y} = 0$.

7.44 $\bar{x} = 9$ pulg, $\bar{y} = 13.5$ pulg.

7.46 $\bar{x} = 90.3$ mm, $\bar{y} = 59.4$ mm.

7.48 $b = 58.6$ mm, $h = 14.8$ mm.

7.50 $\bar{x} = 6.47$ pies, $\bar{y} = 10.60$ pies.

7.52 $\bar{x} = 41.4$ mm, $\bar{y} = 31.4$ mm, $\bar{z} = 30$ mm.

7.54 $\bar{x} = 88.4$ mm, $\bar{y} = 0$, $\bar{z} = 0$.

7.56 $\bar{x} = 0$, $\bar{y} = 32.3$ mm, $\bar{z} = 39.7$ mm.

7.58 $\bar{x} = 4.00$ m, $\bar{y} = \bar{z} = 0$.

7.60 $\bar{x} = 6$ m, $\bar{y} = 1.83$ m.

7.62 $\bar{x} = 6.59$ pulg, $\bar{y} = 2.17$ pulg, $\bar{z} = 6.80$ pulg.

7.64 (a) $\bar{x} = 2$ pies, $\bar{y} = 2.33$ pies, $\bar{z} = 3.33$ pies. (b) $\bar{x} = 1.72$ pies, $\bar{y} = 2.39$ pies, $\bar{z} = 3.39$ pies.

7.66 $\bar{x} = 121$ mm, $\bar{y} = 0$, $\bar{z} = 0$.

7.68 $\bar{x}_3 = 82$ mm, $\bar{y} = 122$ mm, $\bar{z} = 16$ mm.

7.70 (a) $\bar{x} = 52$ pulg. (b) $\bar{x} = 49.3$ pulg.

7.72 $A = 18.4$ klb, $B = 38.6$ klb.

7.74 $\bar{x} = 20.1$ pulg, $\bar{y} = 8.03$ pulg, $\bar{z} = 15.35$ pulg.

7.76 Masa $= 407.7$ kg, $\bar{x} = 2.5$ m, $\bar{y} = -1.5$ m.

7.78 $V = 171.7$.

7.80 Volumen $= \pi/5$.

7.82 $\bar{y} = 0.410$.

7.84 $A = 138.0\ \text{pies}^2$.

7.86 $A = 19.09\ \text{m}^2$.

7.8 Volumen $= 2.48 \times 10^6\ \text{mm}^3$.

7.90 $0.136\ \text{m}^2$.

7.92 $\bar{x} = 110.2$ mm.

7.94 $\bar{y} = 21.3$ mm.

7.96 $\bar{x} = 6.16$ pies, $\bar{y} = 0$, $\bar{z} = 0$.

7.98 $\bar{x} = 1.70$ m.

7.100 $\bar{x} = 25.24$ mm, $\bar{y} = 8.02$ mm, $\bar{z} = 27.99$ mm.

7.102 Volumen $= 477.5\ \text{pulg}^3$.

7.104 El centro de masa de los estudiantes C y D debe estar en el punto P con coordenadas $x = 2.94$ pies, $y = -1.26$ pies. Los puntos C y D se encuentran deben estar sobre una línea recta que pase por P, y la distancia d_C de P a C y la distancia d_D de P a D deben satisfacer la relación $d_C W_C = d_D W_D$. Por ejemplo, si ellos están sobre una línea paralela al eje y y que pase por P, C podría estar en el punto $x_C = 2.94$ pies, $y_C = -1.26 + 2 = 0.74$ pies y D debe entonces hallarse en el punto $x_D = 2.94$ pies, $y_D = -1.26 - (W_C/W_D)2 = -3.92$ pies.

Capítulo 8

8.2 (a),(b) $I_x = \frac{1}{3}bh^3$, $k_x = \frac{1}{\sqrt{3}}h$.

8.4 $I_x = 216\ \text{pulg}^4$, $k_x = 1.73$ pulg, $I_y = 864\ \text{pulg}^4$, $k_y = 3.46$ pulg.

8.6 $I_y = \frac{1}{12}hb^3$, $k_y = \frac{1}{\sqrt{6}}b$.

8.8 $I_{xy} = \frac{1}{24}b^2h^2$.

8.10 $I_x = \frac{1}{21}$, $k_x = \sqrt{\frac{1}{7}}$.

8.12 $I_{xy} = \frac{1}{12}$.

8.14 $I_x = \frac{1}{28}\ \text{m}^4$, $k_x = \sqrt{\frac{3}{14}}$ m.

8.16 $I_{xy} = \frac{1}{24}\ \text{m}^4$.

8.18 $k_0 = 110.9$ mm.

8.20 (a) $I_x = \frac{1}{8}\pi R^4$, $k_x = \frac{1}{2}R$.

8.24 $I_x = 22\ \text{pies}^4$, $k_x = 1.91$ pie, $I_{xy} = 6\ \text{pie}^4$.

8.26 $J_0 = 29.33\ \text{m}^4$, $k_0 = 1.91$ m.

8.28 $I_y = \frac{5}{4}\pi R^4$, $k_y = \sqrt{\frac{5}{4}}R$, $J_0 = \frac{3}{2}\pi R^4$, $k_0 = \sqrt{\frac{3}{2}}R$.

8.30 $I_x = 94.2\ \text{pie}^4$, $k_x = 2.24$ pie.

8.32 $I_x = 329.3\ \text{pulg}^4$, $k_x = 3.43$ pulg.

8.34 $I_y = 3.6 \times 10^5\ \text{mm}^4$, $J_0 = 1 \times 10^6\ \text{mm}^4$.

8.36 $2.65 \times 10^8\ \text{mm}^4$, $k_x = 128.6$ mm.

8.38 $I_x = 7.79 \times 10^7\ \text{mm}^4$, $k_x = 69.8$ mm.

8.40 $I_{xy} = 1.08 \times 10^7\ \text{mm}^4$.

8.42 $J_0 = 363\ \text{pie}^4$, $k_0 = 4.92$ pies.

8.44 $I_x = 10.65\ \text{pie}^4$, $k_x = 0.843$ pies.

8.46 $I_{xy} = 7.1\ \text{pie}^4$.

8.48 $J_0 = 351.6\ \text{pulg}^4$, $k_0 = 4.11$ pulg.

8.50 $I_x = 67.6\ \text{pulg}^4$, $k_x = 1.80$ pulg.

8.52 $I_{xy} = 0$.

8.54 $I_y = 65\ \text{m}^4$, $k_y = 1.47$ m.

8.56 $I_y = 5.48 \times 10^7\ \text{mm}^4$, $k_y = 74.7$ mm.

8.58 $I_{xy} = 1.73 \times 10^7\ \text{mm}^4$.

8.60 $I_x = 7.59 \times 10^6\ \text{mm}^4$, $k_x = 27.8$ mm.

8.62 $I_y = 4.34 \times 10^4\ \text{pulg}^4$, $k_y = 10.45$ pulg.

8.64 $I_{xy} = 4.83 \times 10^4\ \text{pulg}^4$.

8.66 $I_x = 8.89 \times 10^3\ \text{pulg}^4$, $k_x = 7.18$ pulg.

8.68 $I_y = 3.52 \times 10^3\ \text{pulg}^4$, $k_y = 4.52$ pulg.

8.70 $I_x = 994.5\ \text{pulg}^4$.

8.72 $I_x = 155.4\ \text{pulg}^4$.

8.74 $I_x = 4020\ \text{pulg}^4$, $I_y = 6980\ \text{pulg}^4$ o $I_x = 6820\ \text{pulg}^4$, $I_y = 4180\ \text{pulg}^4$.

8.78 $I_x = 4.01 \times 10^6\ \text{mm}^4$.

8.82 $I_{x'} = 76.0\ \text{m}^4$, $I_{y'} = 14.7\ \text{m}^4$, $I_{x'y'} = 25.7\ \text{m}^4$.

8.84 $I_{x'} = 9.70$ pie^4, $I_{y'} = 2.80$ pie^4, $I_{x'y'} = -1.47$ pie^4.

8.86 $I_{x'} = 28$ pie^4, $I_{y'} = 12$ pie^4, $I_{x'y'} = -13.9$ pie^4.

8.88 $\theta_p = -20°$, los momentos principales de inercia son 85.3 m^4 y 5.4 m^4.

8.90 $\theta_p = 26.6°$, los momentos principales de inercia son 10 pie^4 y 2.5 pie^4.

8.92 $I_0 = \frac{1}{3}ml^2$.

8.94 $I = \frac{1}{12}ml^2 \operatorname{sen}^2\theta$.

8.96 $I_{\text{eje } x} = \frac{1}{12}mh^2$, $I_{\text{eje } y} = \frac{1}{12}mb^2$, $I_{\text{eje } z} = \frac{1}{12}m(b^2 + h^2)$.

8.98 $I_{\text{eje } y'} = 1.99$ slug-pie^2.

8.100 20.8 kg-m^2

8.102 $I_0 = \frac{17}{12}ml^2$.

8.104 $I_{\text{eje } z'} = 47.0$ kg-m^2.

8.106 3807.5 slug-pie^2.

8.108 $I_{\text{eje } z} = 9.00$ kg-m^2.

8.110 $I_{\text{eje } y} = 0.0881$ slug-pie^2.

8.112 $I_0 = 0.0188$ kg-m^2

8.114 $I_{\text{eje } x} = I_{\text{eje } y} = m(\frac{3}{20}R^2 + \frac{3}{5}h^2)$.

8.116 $I_{\text{eje } x} = I_{\text{eje } y} = m(\frac{1}{20}w^2 + \frac{3}{5}h^2)$.

8.118 $I = 0.460$ slug-pie^2.

8.120 $I_0 = 0.00367$ kg-m^2.

8.122 $I_{\text{eje } z} = 0.714$ slug-pie^2.

8.124 $I_y = 12.8$, $k_y = 2.19$.

8.126 $I_{xy} = 2.13$.

8.128 $I_{x'} = 0.183$, $k_{x'} = 0.262$.

8.130 $I_y = 2.75 \times 10^7$ mm^4, $k_y = 43.7$ mm.

8.132 $I_x = 5.03 \times 10^7$ mm^4, $k_x = 59.1$ mm.

8.134 $I_x = 396$ pie^4, $k_x = 3.63$ pies.

8.136 $\theta_p = 19.5°$, 20.3 m^4, 160.7 m^4.

8.138 $I_y = 0.0702$ kg-m^2.

8.140 $I_x = 3.83$ slug-pie^2.

8.142 0.537 kg-m^2.

Capítulo 9

9.2 $A_x = 0$, $A_y = 250$ kN, $B = 250$ kN.

9.4 $A_x = 0$, $A_y = 1000$ N, $M_A = 3333.3$ N-m.

9.6 $A_x = 0$, $A_y = 800$ lb, $M_A = 0$.

9.8 (a) 1178.1 N, 2500 N-m. (b) $R_x = 0$, $R_y = -913.2$ N, $M_R = 1970.3$ N-m horario.

9.10 $w_B = 225$ lb/pie.

9.12 $T_B = T_C = 15.2$ kN.

9.14 $P_A = P_B = P_C = 0$, $V_A = V_B = V_C = 2$ kN, $M_A = 2$ kN-m, $M_B = 4$ kN-m, $M_C = 6$ kN-m.

9.16 $P_A = 866$ lb, $V_A = -500$ lb, $M_A = 3000$ lb-pie.

9.18 (a) $P_B = 0$, $V_B = -26.7$ lb, $M_B = 160$ lb-pie. (b) $P_C = 0$, $V_C = -26.7$ lb, $M_C = 80$ lb-pie.

9.20 (a) $P_A = 0$, $V_A = 4$ kN, $M_A = 4$ kN-m. (b) $P_A = 0$, $V_A = 2$ kN, $M_A = 3$ kN-m.

9.22 $P_A = 0$, $V_A = 300$ kN, $M_A = -2100$ kN-m.

9.24 $P_A = 0$, $V_A = (L/6 - b^2/2L)w_0$, $M_A = (bL - b^3/L)w_0/6$.

9.26 $P_A = 0$, $V_A = 525$ lb, $M_A = -825$ lb-pie.

9.28 $P = 0$, $V = -913$ lb, $M = 3520$ lb-pie.

9.30 $P_B = 0$, $V_B = 0.8$ kN, $M_B = 19.2$ kN-m.

9.32 $P = 0$, $V = -595$ N, $M = 1925$ N-m.

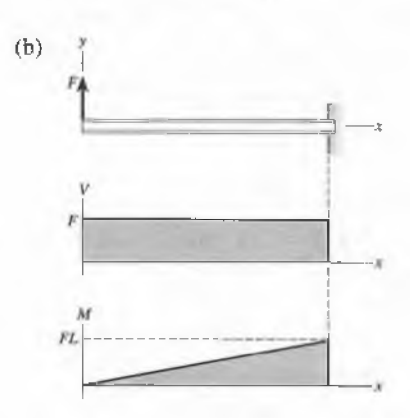
9.34 $P_B = 0$, $V_B = -2$ kN, $M_B = 2$ kN-m.

9.36 $P_B = -300$ N, $V_B = 0$, $M_B = 0$.

9.38 $P_A = 0$, $V_A = -60$ lb, $M_A = 60$ lb-pie.

9.40 (a) $P = 0$, $V = F$, $M = Fx$.

(b)



9.42 80 kN/m.

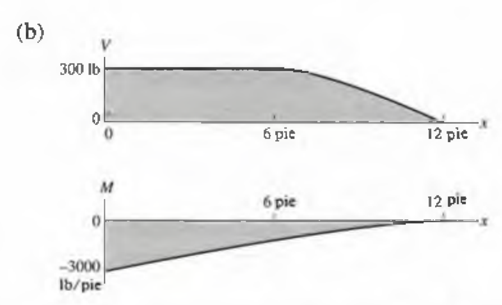
9.44



9.46 (a) $\left.\begin{array}{l} P = 0 \\ V = 300 \text{ lb} \\ M = 300x - 3000 \text{ lb-pie} \end{array}\right\} 0 < x < 6 \text{ pie}$

$$\left.\begin{array}{l} P = 0 \\ V = -\dfrac{100}{12}x^2 + 100x \text{ lb} \\ M = -\dfrac{100}{36}x^3 + 50x^2 - 2400 \text{ lb-pie} \end{array}\right\} 6 < x < 12 \text{ pie}$$

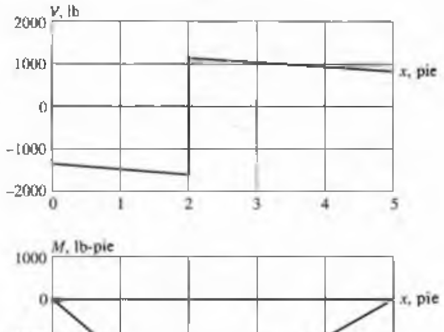
(b)

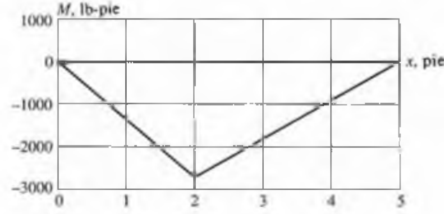


9.48 No; la magnitud del momento flector máximo es de 8 kN-m.

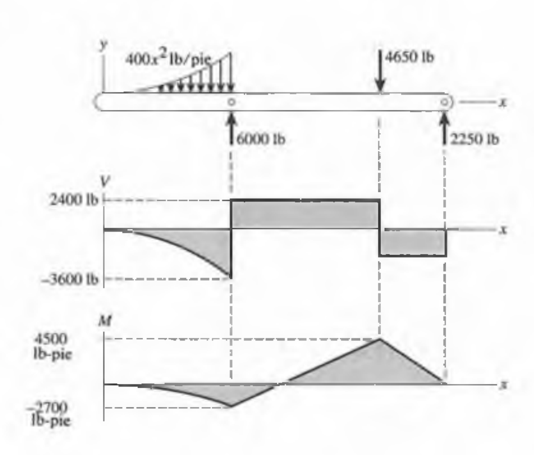
9.52 $M = 577.7$ lb-pulg en $x = 9.33$ pulg.

9.54

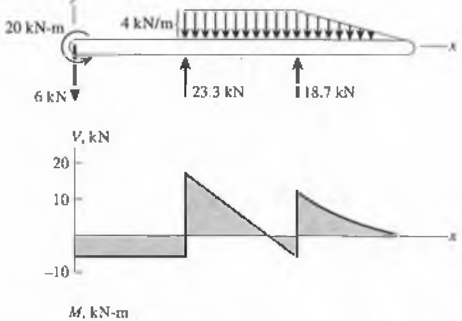


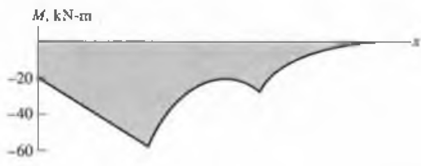


9.56

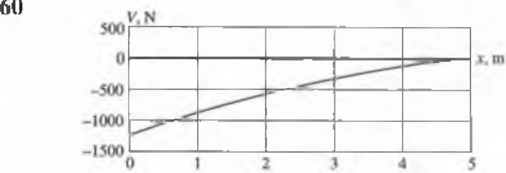


9.58





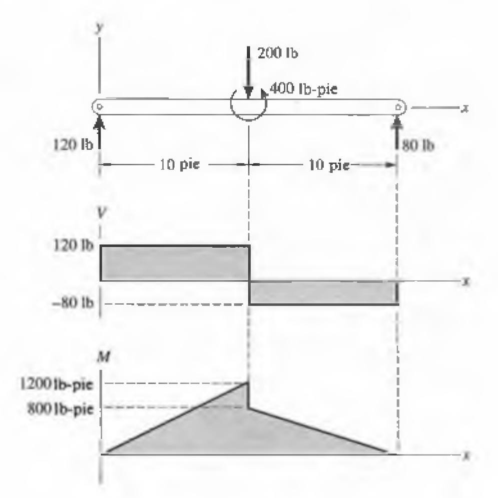
9.60



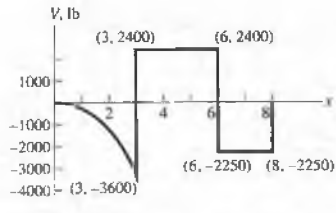
9.62 (a) $V = -w_0(x - x^2/2L)$, $M = -w_0(x^2/2 - x^3/6L)$.
(b) $A_x = 0$, $A_y = -V = w_0L/2$, $M_A = M = -w_0L^2/3$.

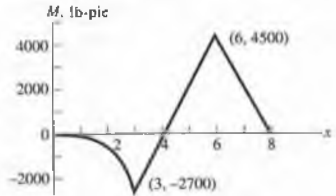
9.64 $V = 250 - 50x$ kN, $M = 250x - 25x^2$ kN-m.

9.66



9.68





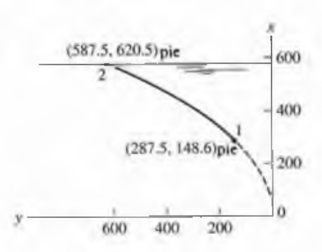
9.70 (a) 15.8 kN. (b) 28.7 m.

9.72 *AC*: 12 700 lb (T); *BC*: 15 000 lb (C).

9.74 Longitud = 108.3 m, h = 37.2 m.

9.76 Longitud = 962.8 pies.

9.78



9.80 (a) h_1 = 4.95 m, h_2 = 2.19 m. (b) T_{AB} = 1.90 kN, T_{BC} = 1.84 kN.

9.82 T_1 = 188.6 N, T_3 = 213.4 N.

9.84 (a) h_2 = 4 pies. (b) 90.1 lb.

9.86 h_2 = 464 mm, h_3 = 385 mm.

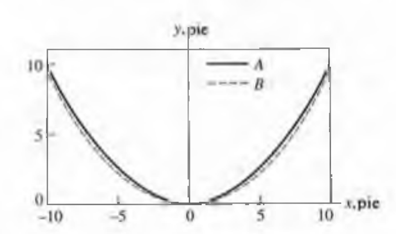
9.88 Sí; la tensión máxima es de 14.5 kN.

9.90 (a) 9.15 N. (b) 4.71 m.

9.92 (a) 10.04 m. (b) 201.3 m.

9.94 (a) h_2 = 1.99 m. (b) T_{AB} = 2.06 kN, T_{BC} = 2.01 kN.

9.96



9.98 (a) 2361 lb/pulg^2. (b) 16.28 MPa.

9.102 x_p = 0.75 m, y_p = 0.3 m.

9.104 1.52 pie.

9.106 6.67 m.

9.108 *A*: 256.7 lb hacia la derecha, 248.2 lb hacia arriba; *B* : 135.9 lb.

9.110 1.5 m.

9.112 (a) 4.08×10^5 Pa. (b) 2629.9 N hacia arriba.

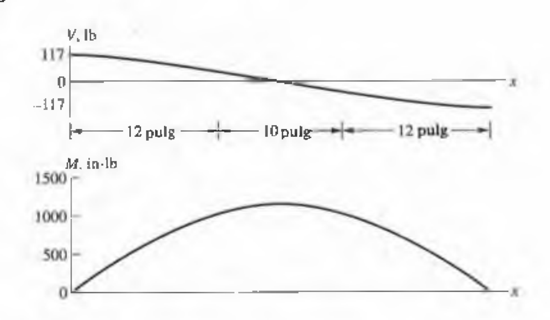
9.114 (a) 376 kN. (b) x_p = 2.02 m.

9.118 $P = 0$, $V = -100$ lb, $M = -50$ lb-pie.

9.124 $\mathbf{F} = -4.32\,\mathbf{i}$ (kN), y = 96 m.

9.126 90.0 kN-m at y = 86.9 m.

9.128



9.130 $A_x = -44.2$ kN, A_y = 35.3 kN, B = 34.3 kN.

9.132 12.93 pie-klb.

Capítulo 10

10.2 23.1 lb.

10.4 (a) 25 N. (b) $\mu_s = 0.577$.

10.6 (a) No. (b) 10.6 lb. (c) 10.2 lb.

10.8 20 lb.

10.10 (a) $T = W(\operatorname{sen}\alpha + \mu_s\cos\alpha)/(\cos\beta + \mu_s\operatorname{sen}\beta)$.

10.12 (a) Sí. La fuerza es $\mu_s W$. (b) $3\,\mu_s W$.

10.14 $\alpha = \arctan(3\mu_s)$.

10.16 $F = W(\operatorname{sen}\alpha - 5\,\mu_s\cos\alpha)$.

10.18 F = 289.9 lb.

10.20 (a) $\alpha = \arctan(\mu_s)$. (b) $\frac{1}{4}\mu_s W$.

10.22 $\mu_s = 0.529$.

10.24 (a) x = 2.07 m. (b) $\mu_s = 0.66$.

10.26 $M = \mu_s RW(1 + \mu_s)/(1 + \mu_s^2)$.

10.28 $\mu_k = 0.35$.

10.30 $\alpha = 2\arctan(\mu_s)$.

10.32 27.7 N-m.

10.36 $\alpha = 9.27°$.

10.38 (a) F = 84 lb. (b) Yes.

10.40 (a) F = 103.8 lb. (b) No.

10.42 (a) F = 5.28 kN. (b) F = 11.41 kN.

10.44 (a) $F = \mu_s W$.
(b) $F = (W/2)(\mu_{sA} + \mu_{sB})/[1 + (h/b)(\mu_{sA} - \mu_{sB})]$.

10.46 $\frac{1}{2}F$.

10.48 $F = 2\mu_s W(1 - \mu_s)$.

10.50 (a) $f = 0.363W$. (b) $\mu_s = 0.453$.

10.52 Sí, μ_s debe ser por lo menos 0.278.

10.54 $f_B = 429.3$ lb.

10.56 (a) $F = 783.3$ lb. (b) Sí.

10.58 $F = 2.35$ kN.

10.60 $\alpha = \arctan\,[2\mu_s/(1 - \mu_s^2)]$.

10.62 $W = 3.36$ kN.

10.64 No. El valor mínimo requerido de μ_s es 0.176.

10.66 $F = 1160$ N.

10.68 1.84 N-m.

10.70 $\mu_s = 0.0398$.

10.72 (a) 28.7 lb-pulg. (b) 14.4 lb-pulg.

10.74 1.13 N-m.

10.76 11.8 lb-pie.

10.78 15.1 N-m.

10.80 8.70 lb-pie.

10.82 4.88 N-m.

10.84 17.4 N-m.

10.86 2.02 kg.

10.88 105.9 N.

10.90 51.9 lb.

10.92 $T = 83.2$ N.

10.94 $M = 1.92$ lb-pie.

10.96 145.9 lb.

10.98 $T = 76.3$ N.

10.100 $M = 0.3$ N-m.

10.102 $M = 9.72$ lb-pie.

10.104 $M = 7.81$ N-m.

10.106 $M = 5.20$ N-m.

10.108 (a) $M = 93.5$ N-m. (b) 8.17%.

10.110 9.51 lb-pie.

10.112 18.4 N.

10.114 $M = rW(e^{\pi\mu_k} - 1)$.

10.116 (a) 14.2 lb. (b) 128.3 lb.

10.118 $84.6 \leq T \leq 215.1$ N.

10.120 $M_A = 65.2$ N-m, $M_B = 32.6$ N-m.

10.122 $M = 19.2$ N-m.

10.126 $\mu_s = 0.298$.

10.128 $\alpha = 37.8°$.

10.130 $D_1 = 29.2$ mm, $D_2 = 162.2$ mm.

10.132 $-1.963 \leq y \leq 0.225$ m.

10.134 $\alpha = 65.7°$.

10.136 $\alpha = 24.2°$.

10.138 $\alpha = 22.7°$.

10.140 $h = 5.82$ pulg.

10.142 285.7 lb.

10.144 1134.8 kg, par torsor = 2.67 kN-m.

10.146 $\mu_s = 0.272$.

10.148 Sí. μ_s debe ser por lo menos 0.533.

10.150 $P = 43.5$ N.

10.152 (a) $W = 109.9$ lb. (b) $W = 264.8$ lb.

10.154 2.77 lb-pie.

Capítulo 11

11.2 (a) $M_A = 100$ N-m. (b) $A_y = -50$ N.

11.4 $F = 217$ N.

11.6 $R = 1.15F$.

11.8 0.577 F (compresión)

11.10 $F = 112.5$ lb.

11.12 (a) $F = 392.4$ N. (b) 100 mm.

11.14 $C_x = -7.78$ kN.

11.18 $F = 360$ lb.

11.20 $M = 270.0$ N-m.

11.22 13 kN.

11.24 9.17 kN.

11.26 $2W/(5 \tan\alpha)$.

11.28 (a) $q = 3$, $q = 4$. (b) $q = 3$ es inestable y $q = 4$ es estable.

11.30 $V = \frac{1}{2}kx^2 - \frac{1}{4}\varepsilon x^4$.

11.32 (a) Estable. (b) Estable neutro. (c) Inestable.

11.36 (b) Es estable.

11.38 (a) $\alpha = 60°$. (b) No.

11.40 (a) $\alpha = 28.7°$. (b) Sí.

11.42 Estable

11.44 $\alpha = 0$ es inestable y $\alpha = 59.4°$ es estable.

11.46 $\alpha = 0$ es inestable y $\alpha = 30°$ es estable.

11.48 (b) $x = 1.12$ m y $x = 2.45$ m. (c) $x = 1.12$ m es estable y $x = 2.45$ m es inestable.

11.50 (a) $\alpha = 43.9°$. (b) Sí.

11.52 (a) $\alpha = 30.53°$. (b) Sí.

11.54 $M = 1.50$ kN-m.

11.56 (a) $M = 800$ N-m. (b) $\alpha/4$.

11.58 $F = 5$ kN.

11.60 $M = 63$ N-m.

11.62 Estable.

11.64 Inestable.

Índice de materias

OTRAS OBRAS DE INTERÉS PUBLICADAS POR **PEARSON:**

ALONSO y FINN: ***Física***
BEDFORD y FOWLER: ***Mecánica para ingeniería: Dinámica***
BOXER: ***Termodinámica***
CLEMENS, O'DAFFER y COONEY: ***Geometría con aplicaciones y solución de problemas***
FULLER y TARWATER: ***Geometría analítica. Séptima edición***
JOHN: ***Ingeniería de los materiales***
SEARS, ZEMANSKY y YOUNG: ***Física universitaria. Sexta edición***
SHERWIN: ***Introducción a la termodinámica***
SMITH, CHARLES, DOSSEY, KEEDY y BITTINGER: ***El álgebra de Addison-Wesley***
THOMAS y FINNEY: ***Cálculo con geometría analítica. Sexta edición***
WRIGHT: ***Introducción a la ingeniería***



Visítenos en:
www.pearson.com.mx

